【信息科学与控制工程】　　doi：10.11809/scbgxb2013.05.030

频谱细化算法分析

赵宏强

（海军航空工程学院 青岛校区，山东 青岛　266041）

摘要：介绍了当前广泛应用的 ZFFT、FFT-FS 和 CZT 三种频谱细化算法的原理，通过大量蒙特卡洛仿真计算归纳了各自的应用特点：ZFFT 可以抑制频率间的干涉，对整周期采样信号分析精度高，否则误差较大；FFT-FS 和 CZT 对单频信号分析精度高，不适用于密集多频信号的分析，但估计精度不受整周期采样的影响；从频率分辨率的角度对三种频谱细化算法的实质进行了分析比较：FFT-FS 和 CZT 是一致的，都是在不增加数据长度的前提下，通过插值增加 FFT 的变换点数，提高计算分辨率，不能改善信号的频率分辨能力；ZFFT 和 DN 点 FFT 变换是一致的，它并不能真正提高物理分辨率实现频谱细化的功能，只是一种节省运算量的快速算法，可以改善信号的频率分辨能力，但以增加数据长度为代价。

关键词：ZOOM-FFT（ZFFT）；FFT-FS；线性调频 Z 变换（CZT）；频谱细化；频率分辨率

中图分类号：TN911.7　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1006－0707（2013）05－0105－05

Analysis of Spectrum Zoom Algorithms

ZHAO Hong-qiang

（Qingdao Campus, Naval Aeronautical and Astronautical University, Qingdao 266041, China）

Abstract: The principles of ZFFT, FFT-FS and CZT spectrum zoom analysis algorithms that are widely used were introduced. Each of their application characteristics were summarized by a great deal of Monte Carlo simulation: ZFFT can restrain the frequency interference, and accurately measure the parameters of the integer-period sampling signal, but has big error to non-integer-period sampling signal; FFT-FS and CZT can accurately measure the parameters of the single frequency signal, and not apply to the signal with intensive multi-frequency components. The signal with or not integer-period sampling can not affect the estimation precision of the signal components by CZT. A comparison of three spectrum zoom analysis algorithms essence was presented by frequency resolution: FFT-FS and CZT are the same essentially. They both increase the FFT points by interpolation on the premise of not increasing the sampling points, to improve computation resolution, but are not able to improve the frequency resolution ability. ZFFT and FFT with DN points are the same essentially. ZFFT can not improve the physical resolution, nor can perform spectrum zoom analysis really. ZFFT is just a fast algorithm which can reduce computation, and is able to improve frequency resolution ability at the price of increasing the sampling points.

Key words: ZOOM-FFT（ZFFT）; FFT-FS; chirp Z transform（CZT）; spectrum zoom; frequency resolution

频谱分析是信号处理中最常用的方法，传统的频谱分析方法一般采用快速傅里叶变换（FFT），FFT 得到的是整个折叠频率上的粗略的“全景频谱”，而在实际应用中，往往需要对感兴趣的窄带频谱区间进行细微观察和分析，这就需要较高的频率分辨率。FFT 算法中频率分辨率和采样点数成反比，在采样频率不变的前提下，要提高频率分辨率，就必须增

收稿日期：2012－12－26

作者简介：赵宏强（1976—），男，硕士，主要从事光电控制及其信息处理技术研究。

加采样点数,但增加采样点数就会增加 FFT 的计算量。因此,FFT 的频率分辨率和计算量是相互矛盾的,这也在一定程度上限制了 FFT 的应用。

为了解决对窄带频谱区间进行细致观测的问题,提出了频谱细化的概念,其基本思路是对信号频谱中的某一频段进行局部放大,实现选带分析。频谱细化技术近年来发展迅速,常见算法有:FFT-FS 算法、ZOOM-FFT(以下简称 ZFFT)算法和线性调频 Z 变换(Chirp-Z 变换,以下简称 CZT)算法。本文主要对上述三种频谱细化算法的原理进行比较,通过仿真分析总结各自的应用特点,并从频率分辨率的角度对三种算法的实质进行了分析研究。

1 频谱细化算法的原理

设采样序列为 $x(n)$,$n=0,1,\cdots,N-1$,采样频率为 f_s,需要进行细化的频带为 $f_1 \sim f_2$,对信号进行 N 点 FFT 变换。因此,

信号初始的频率分辨率为 $\Delta f = f_s/N$,选带的中心频率为 $f_0=(f_1+f_2)/2$,带宽为 $f_W=f_2-f_1$。

1.1 FFT-FS 频谱细化原理

序列 $x(n)$ 的傅立叶系数:

$$\begin{cases} a_k = \dfrac{2}{N}\sum\limits_{n=0}^{N-1} x(n)\cos(2\pi nk/N) \\ b_k = \dfrac{2}{N}\sum\limits_{n=0}^{N-1} x(n)\sin(2\pi nk/N) \end{cases} \tag{1}$$

式(1)中,$k=0,1,\cdots,N/2$。

频率 $k\Delta f$ 处幅值谱矢量表达式为 $a_k - jb_k$,即 a_k 和 b_k 分别对应频谱幅值的实部和虚部。由采样定理知,序列 $x(n)$ 中包含着 $0 \sim f_s/2$ 的频段信息,所以如果用连续的傅立叶变换对频谱进行计算,把频谱曲线看成是连续的,即把式(1)中的 k 看作区间($0 \leqslant k \leqslant N/2$)内连续变化的实变量 f($0 \leqslant f \leqslant f_s/2$),则可将式(1)变成:

$$\begin{cases} a(f) = \dfrac{2}{N}\sum\limits_{n=0}^{N-1} x(n)\cos(2\pi nf/f_s) \\ b(f) = \dfrac{2}{N}\sum\limits_{n=0}^{N-1} x(n)\sin(2\pi nf/f_s) \end{cases} \tag{2}$$

于是,利用式(2)便可得连续的频谱曲线,从而使频率分辨率不再受采样点数 N 的限制,f 是一个连续的频率。这便是 FFT-FS 频谱细化算法的基本原理[1]。

在实际运用中,在定义域 $f \in [f_1, f_2]$ 内,直接采用式(2)进行计算,然后根据所需的频率分辨率 $\Delta f'$ 来设定选频带内的取样点数 M,两者之间的关系为 $\Delta f' = f_W/(M-1)$。

1.2 CZT 频谱细化原理

N 点 FFT 计算的频谱实际上是 z 平面单位圆上的 N 点等间隔取样,CZT 计算的则是 z 平面螺旋线周线上 Z 变换的等间隔取样,这些取样在螺旋线的某一部分上按等角度分布。$X(z)$ 表示序列 $x(n)$ 的 Z 变换,利用 CZT 算法,可以计算下列给定点 z_k 上的 $X(z_k)$。

$$z_k = AW^{-k}, k=0,1,\cdots,M-1 \tag{3}$$

式(3)中 $A=A_0e^{-j\theta_0}$,$W=W_0e^{-j\varphi_0}$,A_0 和 θ_0 分别表示起始抽样点 z_0 的矢量半径长度和相角,W_0 表示螺旋线的伸展率,φ_0 表示两相邻抽样点之间的角度差,M 为所要分析复频谱的抽样点数,不一定等于 N。按式(3)给定的 z_k 值,经过推导,可得 $X(z_k)$:

$$\begin{aligned} X(z_k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z_k^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)A^{-n}W^{nk} = \\ &\sum_{n=0}^{N-1} x(n)A^{-n}W^{\frac{k^2}{2}}W^{\frac{n^2}{2}}W^{-\frac{(k-n)^2}{2}} = \\ &W^{\frac{k^2}{2}}\sum_{n=0}^{N-1}[x(n)A^{-n}W^{\frac{n^2}{2}}]W^{-\frac{(k-n)^2}{2}} \end{aligned} \tag{4}$$

令

$$g(n) = x(n)A^{-n}W^{\frac{n^2}{2}} \tag{5}$$

$$h(n) = W^{-\frac{n^2}{2}} \tag{6}$$

则

$$\begin{aligned} X(z_k) &= W^{\frac{k^2}{2}}\sum_{n=0}^{N-1} g(n)h(k-n) = \\ &W^{\frac{k^2}{2}}[g(k)*h(k)] = W^{\frac{k^2}{2}}y(k) \end{aligned} \tag{7}$$

式(7)中,

$$y(k) = g(k)*h(k) = \sum_{n=0}^{N-1} g(n)W^{-\frac{(k-n)^2}{2}} \tag{8}$$

以上便是 CZT 频谱细化算法的基本原理[2-5],其计算流程如图 1 所示。

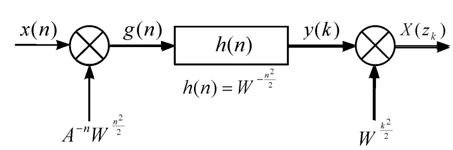


图 1 CZT 的计算流程

在实际运用中,首先根据所需的频率分辨率 $\Delta f'$ 来设定选频带内的取样点数 M,两者之间的关系为 $\Delta f' = f_W/(M-1)$,然后根据选频带 $f_1 \sim f_2$ 确定 CZT 的相关参数,因为希望得到的是信号的频谱分析,故应该在单位圆上去实现 CZT,所以取 $A_0=W_0=1$,$\theta_0=2\pi f_1/f_s$,$\varphi_0=2\pi\Delta f'/f_s$,最后根据图 1 的计算流程进行 CZT 计算。

1.3 ZFFT 频谱细化原理

ZFFT 频谱细化算法的基本原理可归纳为[6-8]:将初始信号与单位复指数信号 $\exp(-2\pi nf_0/f_s)$ 相乘进行复调制,将实序列变为复序列,利用傅里叶变换的移频性质把选频段的中心频率移至零频,再通过低通抗混叠滤波和整数倍抽取,最后对抽取后的信号做 FFT 分析和频率调整,便可以得到选频段的细化频谱。ZFFT 的计算流程如图 2 所示。

在实际运用中,首先根据所需的频率分辨率 $\Delta f'$ 来设定重采样的细化倍数 D,两者之间的关系为 $\Delta f' = f_s/DN = \Delta f/D$,假设要进行 N 点 FFT 变换,信号的长度为 L,则 D 的取值范围应满足 $DN \leqslant L$;然后根据选频带 $f_1 \sim f_2$ 确定低通滤波器的参数,滤波器的截止频率 f_d 的取值范围应满足 $f_d \leqslant f_s/2D$;最后再根据图 2 的计算流程进行计算即可。

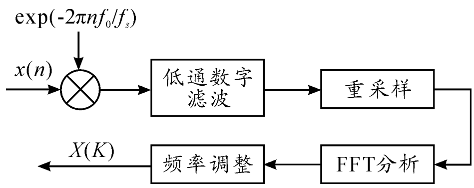


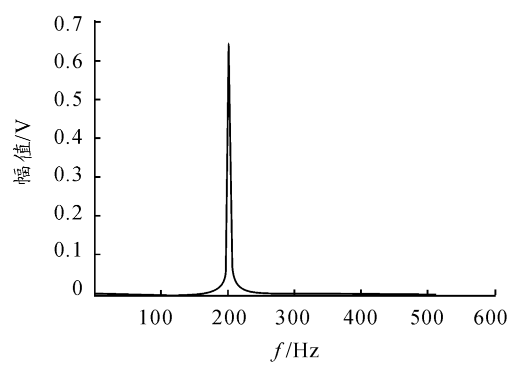
图 2　ZFFT 的计算流程

2　仿真算例分析

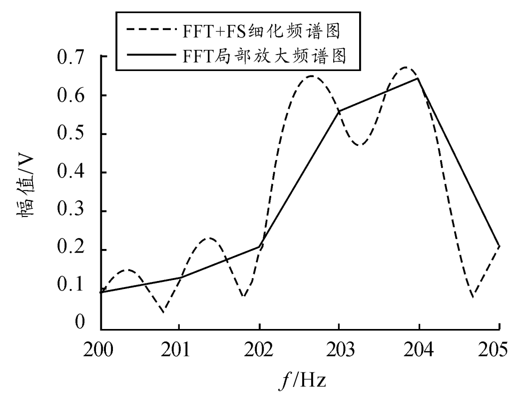
2.1　仿真算例 1

设仿真信号为:$x(t)=\cos(2\pi\times 203t)+\cos(2\pi\times 203.9t+\pi/3)$,信号的采样频率为 1 024 Hz,采样点数为 1 024 点,频率分辨率为 $\Delta f=1$ Hz。分别采用基带 FFT、ZFFT、FFT-FS 和 CZT 对信号进行分析,分析结果如图 3 所示。

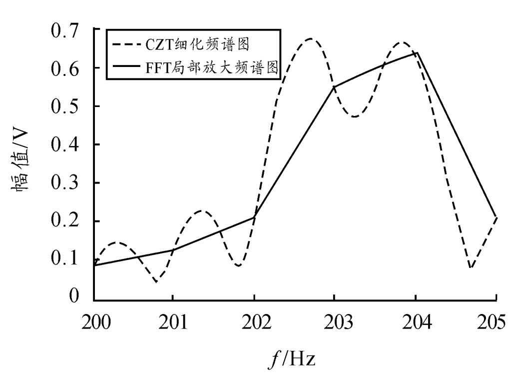
在由基带 FFT 得到的全景频谱中,无法分辨出信号中的两个频率成分,通过局部放大 FFT 频谱,尽管可以得到两个极大值,但由于两频率成分间隔为 0.9 Hz $<\Delta f$,所以不能确定信号是单频信号还是多频信号。通过设定参数,对频带 200 ~ 205 Hz 进行细化,使三种频谱细化算法的频率分辨率都为 0.1 Hz,三种算法都能看到两个明显的峰值,可以确定信号是由两个频率构成的多频信号。从而验证了三种频谱细化算法的有效性。



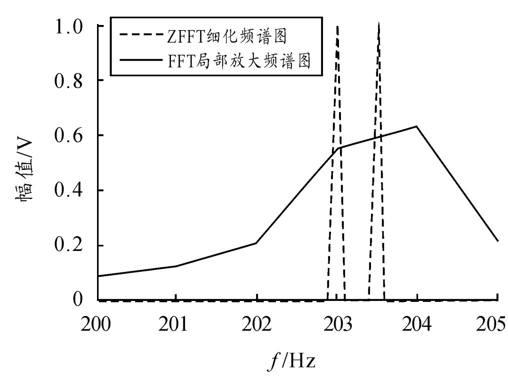
(a) 信号的FFT频谱图



(b) 信号的FFT+FS频谱细化图



(c) 信号的CZT频谱细化图



(d) 信号的ZFFT频谱细化图

图 3　基带 FFT、FFT-FS、CZT 和 ZFFT 的分析对比

尽管 FFT-FS 与 CZT 频谱细化的算法不同,但是由图 3 可以看出两者的细化结果非常接近,为了进一步研究,分别对抽样点 M 为 11、21 和 51,即频率分辨率分别为 0.5 Hz、0.25 Hz 和 0.1 Hz 三种情况下对上述仿真信号进行了分析,两者频谱幅值绝对误差的数量级都为 10^{-13},如图 4 所示。因此,FFT-FS 与 CZT 的仿真结果可以认为是一致的,在下面的仿真中仅以 FFT-FS 作为代表进行分析。

当多频信号中频率间隔较小时,两频率之间会产生干涉现象,上述仿真条件不变,FFT-FS 与 ZFFT 的频率分辨率都为 $\Delta f'_1=0.1$ Hz,改变信号两频率的大小进行分析。当频率间隔为 $5\Delta f'_1$ 时,分析结果如图 5(a)所示,FFT-FS 仍能分辨出两个频率,但发生了峰值漂移,有了相互排斥的现象,幅值衰减达 20%;当频率间隔为 $2\Delta f'_1$ 时,分析结果如图 5(b)所示,FFT-FS 已经不能分辨出两个频率,即使增加抽样点数 M 也无济于事,由于两频率的叠加使幅值增加 30%;但是在这两种情况下,ZFFT 都能正确分辨出信号中的两个频率,并且频率和幅值估计值几乎没有误差。尽管两次仿真的频率间隔都大于 FFT-FS 细化后的频率分辨率,但是 FFT-FS 对于密集多频信号间的干涉无能为力,不能有效分辨密集多频信号,而 ZFFT 却可以有效抑制信号间的干涉,高精度地分辨密集多频信号。

ZFFT 之所以有很高的分辨精度,并能抑制频率间的干涉,主要是因为进行 ZFFT 仿真时,所需的数据长度是 FFT-FS 的 D 倍(D 为细化倍数),它的高分辨率是以增加数据长

度来实现的。实际上,ZFFT 的性能与对原数据做 DN 点 FFT 后,在选频带内的局部放大的效果相近。

以上的仿真都是在没有噪声干扰的情况下进行的,下面将在不同信噪比(SNR)下,对 DN 点的 FFT、ZFFT、FFT-FS 和 CZT 4 种算法的性能及特点进行比较。

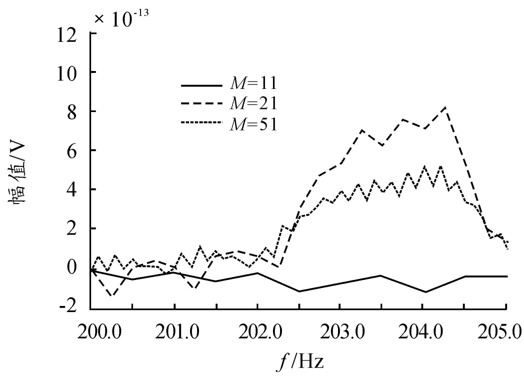
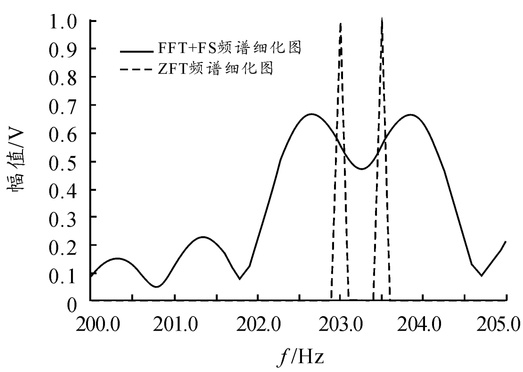
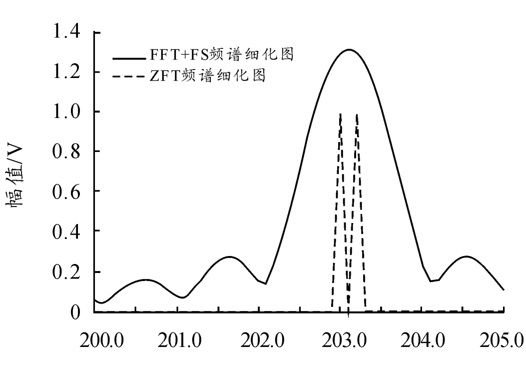


图 4　FFT-FS 与 CZT 频谱幅值的绝对误差



(a) 频率间隔为 $5\Delta f_1'$ 时的频谱细化图



(b) 频率间隔为 $2\Delta f_1'$ 时的频谱细化图

图 5　FFT-FS 与 ZFFT 的分析对比图

2.2　仿真算例 2

设仿真信号:$x1 = 2\cos(2\pi\times203t+10\pi/180)$,$x2 = \cos(2\pi\times203.85t+20\pi/180)$,$x3=2\cos(2\pi\times203.7t+10\pi/180)$,$x4=\cos(2\pi\times203.83t+20\pi/180)$

$s(n)$ 为加性高斯白噪声,信号的采样频率为 1 024 Hz,采样点数为 1 024 点,初始频率分辨率为 1 Hz,令 ZFFT 中的 $D=20$,FFT-FS 和 CZT 中的 $M=51$,选频带为 200 ~ 205 Hz,从而保证 3 种算法细化后的频率分辨率都为 $\Delta f'_2=0.05$ Hz。算例(A－C)分别是在 $SNR=-10,0,10$ 三种情况下对信号 $x1+x2+s(n)$ 进行的仿真,算例(D－F)是在 $SNR=10$ 的情况下分别对信号 $x2+x3+s(n)$、$x1+x4+s(n)$、$x4+s(n)$ 进行的仿真,所有的仿真结果都是在进行了 1 000 次蒙特卡洛仿真后取的平均值,如表 1 所示。

1) 上述所有情况下的仿真都表明,DN 点的 FFT 和 ZFFT 的性能是接近的,FFT-FS 和 CZT 的性能是接近的,一般情况下可认为彼此是一致的,下面仅以 ZFFT 和 FFT-FS 两种方法为代表进行比较;

2) 由算例(A－C)可得,随着 SNR 的增加,ZFFT 的性能得到提高,频率、幅值和相位三者的误差都变小;FFT-FS 只有相位误差变小,而频率和幅值误差变化不大;尽管随着 SNR 的增加 ZFFT 和 FFT-FS 的性能都得到一定程度的改善,但改善程度较小,因此,两种方法的抗噪性都较好;

3) 算例(F)是一个单频信号,而算例(E)比(F)多了一个频率接近的信号,但仿真结果显示 FFT-FS 的幅值误差和相位误差在(F)中比在(E)都小了一个数量级,频率误差也小了一倍,性能得到明显提高;而 ZFFT 性能变化不大。说明了 FFT-FS 比较适合于单频信号的频谱细化,否则精度将受到影响;

4) 算例(D)与(C)相比,只是缩小了两频率间的频率间隔,但 FFT-FS 的频率、幅值和相位误差分别为 $10\Delta f'_2$,43.2893% 和 24.560 1 度,信号已经完全失真,而 ZFFT 的性能却几乎没有受到任何影响。证明了 FFT-FS 不适用于频率间隔较小的密集多频信号,而 ZFFT 却可以有效抑制频率间的干涉;

5) 算例(D)和(E)相比,只是其中一个信号的频率成分由 203.85 Hz 改为了 203.83 Hz,但仿真结果显示 ZFFT 在(E)中的幅值误差达 25%,相位误差近 75 度,信号完全失真;算例(F)中对频率为 203.83 Hz 的单频信号进行分析,ZFFT 在(F)中的误差和(E)接近,并没有得到改善。这主要是由于 203.85 Hz 是整周期采样($\Delta f'_2=0.05$Hz),而 203.83 Hz 不是整周期采样。因此,ZFFT 仅适用于整周期采样的信号,其估计精度较高,对非整周期采样的信号分析其复制和相位就会完全失真,算例(F)也说明即使是对单频非整周期采样信号也无能为力。比较而言,FFT-FS 对于信号是否是整周期采样影响不大。

表1 各种频谱细化方法的性能比较

条件	理论参数	*DN* 点的 FFT 误差	ZFFT 误差	FFT-FS 误差	CZT 误差
(A) -10 db 多频	频率(Hz):203.85	0	0	5.389 0$\Delta f'_2$	5.389 0$\Delta f'_2$
	幅值:1	3.897 3%	4.033 7%	2.452 2%	2.452 2%
	相位(度):20	2.273 0	2.755 7	16.278 6	17.231 8
(B)0 db 多频	频率(Hz):203.85	0	0	5.797 0$\Delta f'_2$	5.797 0$\Delta f'_2$
	幅值:1	1.259 7%	1.791 2%	1.267 6%	1.267 6%
	相位(度):20	0.704 2	1.981 6	6.736 4	9.341 2
(C)10 db 多频	频率(Hz):203.85	0	0	5.400 0$\Delta f'_2$	5.400 0$\Delta f'_2$
	幅值:1	0.402 8%	1.552 0%	1.391 1%	1.391 1%
	相位(度):20	0.211 6	1.947 1	5.358 0	8.691 8
(D)10 db 多频	频率(Hz):203.85	0	0	10$\Delta f'_2$	10$\Delta f'_2$
	幅值:1	0.399 4%	1.510 5%	43.289 3%	43.289 3%
	相位(度):20	0.232 2	1.936 7	21.226 1	24.560 1
(E)10 db 多频	频率(Hz):203.83	0.400 0$\Delta f'_2$	0.400 0$\Delta f'_2$	6.883 2$\Delta f'_2$	6.883 2$\Delta f'_2$
	幅值:1	24.294 0%	25.312 4%	0.998 6%	0.998 6%
	相位(度):20	72.002 5	74.043 7	10.443 7	13.777 7
(F)10 db 单频	频率(Hz):203.83	0.400 0$\Delta f'_2$	0.400 0$\Delta f'_2$	0.843 8$\Delta f'_2$	0.843 8$\Delta f'_2$
	幅值:1	24.323 4%	25.238 3%	0.506 8%	0.506 8%
	相位(度):20	72.006 9	73.887 8	0.530 9	3.657 2

3 频谱细化算法的本质分析

频谱细化算法之所以能够对选频段的频谱进行细化,根本原因在于频率分辨率的提高,下面从频率分辨率的含义入手,对频谱细化算法的本质就行分析。

文献[3]对频率分辨率进行了较详细的阐述,给出了物理分辨率 $\Delta fp = f_s/L$ 和计算分辨率 $\Delta fc = f_s/N$ 两个概念,其中 f_s 为采样频率,L 为信号长度,N 为 FFT 的变换点数。计算分辨率是靠计算得出的,它并不能反映真实信号的频率分辨能力,而真正反映信号频率分辨能力的是物理分辨率,在采样频率不变的前提下,要提高信号的分辨能力,只能通过增加数据的实际长度来实现。

FFT-FS 和 CZT 频谱细化算法本质上是相同的。就是在不增加数据长度的前提下,用不同的数学处理方式在选频带内通过插值,增加 FFT 的变换点数,从而提高信号的计算分辨率,实现对局部频段的细化,但不能提高物理分辨率,因而不能改善信号的频率分辨能力。

ZFFT 频谱细化算法通过滤波重采样使采样频率 f_s 降低 D 倍,因而物理分辨率变为 f_s/DL,进而提高频率分辨能力,但该过程隐含的条件是对原始数据长度增加 D 倍后进行的重采样,实际数据长度为 DL,信号最初的物理分辨率也为 f_s/DL。因此,ZFFT 并不能提高信号的物理分辨率,它只是在假定信号长度为 L 不变的错误前提下,通过一系列数学变换使得选频带内物理分辨率貌似从 f_s/L 提高到了 f_s/DL,得到了提高频率分辨能力的假象,而信号的物理分辨率在整个过程中并没有改变,通过 ZFFT 得到的改善频率分辨能力的结果,并不是通过 ZFFT 算法实现的,根本原因在于信号数据长度的增加。ZFFT 的实际效果和对信号直接进行 DN 点 FFT 变换是一致的。综上可得,ZFFT 本质上并不能真正实现频谱细化,它只是一种节省运算量的快速算法。

4 结论

介绍了当前三种频谱细化算法的原理,通过大量的仿真对各种算法的特点进行研究,最后通过频率分辨率的概念对各种算法的本质进行了分析。

1) ZFFT 和 DN 点 FFT 变换是一致的,它并不能真正实现频谱细化,它只是一种节省运算量的快速算法。ZFFT 可以改善信号的频率分辨能力,但以增加数据长度为代价。ZFFT 对整周期采样信号进行分析,在 $SNR = -10$ dB 的情况下,频率误差为0,幅值误差约为4%,相位误差小于3度;但对于非整周期采样,即使在 $SNR = 10$ dB 的情况下,幅值误差达25%,相位误差近75度。因此,ZFFT 仅适用于整周期采样的信号分析,精度较高。

2) FFT-FS 和 CZT 在本质上是一致的,(**下转第112页**)