基于时变 t-Copula 的抵押外汇契约定价研究

李 平 张馨匀 丁倩岩

(北京航空航天大学院)

摘要:借鉴抵押债务契约的定价方法,应用时变 t-Copula 对抵押外汇契约(CFXO)进行了定价研究。首先,给出了 CFXO 的理论定价模型;然后,应用时变 t-Copula 对基于美元、日元、欧元和英镑两两之间汇率的 CFXO 进行了数值定价计算,其中,t-Copula 的相关系数是时变的,可以用来刻画标的汇率之间随时间变化的相关性。CFXO 是一款新型外汇衍生产品,可以使投资者获得关于一揽子外汇资产的暴露评级,并同时从相应所选择的部分到期,收益率以及评级中获益。该产品为投资者投资组合的多样化提供了一个十分有效的工具。

关键词:抵押外汇契约;时变 t-Copula; 违约相关性

中图分类号: C93 文献标识码: A 文章编号: 1672-884X(2012)07-0990-04

CFXO Pricing Based on Time-Varying t-Copulas

LI Ping ZHANG Xinyun DING Qianyan (Beihang University, Beijing, China)

Abstract: In this paper we apply time-varying *t*-copulas to price a CFXO borrowing the pricing method for CDOs (collateralized debt obligations). We first give the theoretical pricing model for a CFXO, and then we apply time-varying *t*-copula to calculate the price for a CFXO written on the exchange rates between U. S. dollar, Japanese yen, Great British Pound and Euro. With the correlation coefficient time-varying, *t*-copula can be used to describe the time varying correlation between exchange rates. CFXO (Collateralized Foreign Exchange Obligation) is a new kind of foreign exchange derivatives, allowing risk protection buyers to hedge the foreign exchange risk for a basket of currency assets, and at the same time allowing protection sellers to benefit from chosen tranche. CFXO provides a new effective portfolio diversification tool for investors.

Key words: CFXO; time-varying t-Copula; default correlation

1 研究背景

次贷危机前后,由于信用市场的脆弱性,投资银行开始开发一些具有较低信用风险暴露的抵押类产品,并将信用市场上流行的证券化技术应用于其他类资产。2007年5月7日美国美林公司推出的首个抵押外汇契约(collateralized foreign exchange obligation, CFXO)就是其中一例。这是一款作为潜在资产类别,旨在将普遍使用于信贷领域的抵押债务契约(collateralized debt obligation,CDO)技术应用于外汇的投资产品,也被称为外汇触发互换。CFXO由东方汇理资产管理公司管理并由标准普尔评级。该产品允许机构投资者获得关于一

揽子外汇资产的暴露评级,并同时从相应所选择的部分到期收益率以及评级中获益。CFXO的推出意味着外汇市场的一次重要发展,其可以凭借自身实力将外汇打造成一个重要的资产类别。由于 CFXO 与传统资产类别的相关性十分低,该产品为投资者投资组合的多样化提供了一个十分有效的工具。

定价是一款交易产品的核心内容。CFXO是一种将CDO技术应用于外汇的新投资产品,是对信用衍生产品理论的发展和补充,它的定价成为学术界及金融业界探讨的一个热点。例如,DORN^{III}指出,CFXO可以看成是一系列外汇触发互换的组合,可通过对标的外汇触发互换进行定价,他还给出了CFXO价格的闭解公

收稿日期: 2012-05-20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70971006,70831001)

式,但没有进行数值计算或实证分析; JAIMUNGAL等^[2]则综合运用降维和蒙特卡 洛模拟法对涉及 10 种汇率的 CFXO 给出了价格所应满足的微分方程,并进行了数值计算。

CFXO 将一揽子外汇作为标的资产,因此, 是一种多元衍生产品。由此,标的资产间相关 性的刻画成为定价的关键。近些年研究者们大 多采用 Copula 函数来刻画金融变量间的相关 结构,进而对多元衍生产品进行定价,如 RA-PUCH 等[3] 和 LI 等[4] 的研究。但早期的研究 大多采用静态高斯 Copula 模型来刻画各资产 间的相关性,如文献[5]的研究。这种模型对于 早期的金融市场有一定的先导性,且应用简便, 但随着市场的变化,其局限性及致命的缺陷就 充分地显现出来。在现实金融市场中,各种金 融资产的收益率并不符合正态分布假设,通常 表现为"尖峰"和"厚尾"特征,各种金融资产的 收益率间也不符合多元正态分布假设,呈现出 尾部相关性。静态高斯 Copula 模型既不能有 效处理相关性偏度的问题,也不能对非标准的 衍生产品进行准确定价。于是在次贷危机前 后,一些研究者开始使用动态 Copula 模型来刻 画资产相关性,并对多元衍生产品进行定价。 例如,PATTON[6] 基于 ARMA 过程建立了一 个动态模型,并将之应用于外汇数据;DUAN[7] 和 GOORBERGH 等[8] 用 GARCH 模型刻画边 际资产的动态特征,然后将之应用于 2 个资产 的期权定价。本研究中将借鉴 LI 等[4] 关于 CDO 的定价方法,应用时变 t-Copula 对涉及几 种主要汇率的 CFXO 进行定价研究。

2 时变 Copula 模型

动态 Copula 模型主要包括时变相关 Copula 模型和时变结构 Copula 模型 2 类。本研究主要考虑前者。构建时变相关 Copula 模型的关键在于给出 Copula 相关参数的演化方程,通常通过假定相应的相关性测度或尾部相关系数的演化过程来建立 Copula 参数的动态演进方程。

PATTON^[6]最先研究时变相关 Copula 模型,他提出可以用一个类似于 ARMA(1,10)的过程来描述二元正态 Copula 函数的相关参数。另外,由于 Joe-Clayton Copula 的参数与尾部相关系数有一一对应关系,因此,可以通过定义尾部相关系数随时间演化的过程来确定该参数的演进方程。在 PATTON 研究的基础上,GOORBERGH 等^[8]提出可用时变 Copula 模型

来研究多元期权的定价问题,其中 Copula 参数的演进方程可由秩相关系数 τ 的演化过程来确定,即 $\tau = \gamma(h_1,h_2)$,其中, h_1 、 h_2 分别代表资产 1 和资本 2 在 t 时刻的波动, $\gamma(\bullet)$ 为指定的函数,用来刻画不同波动水平下资产间相关性的变化。考虑到资产间的相关性会随着资产收益的波动而变化,而在一般情况下,大的波动会促使资产间的相关性增强,因此,给出了函数 $\gamma(\bullet)$ 的如下形式:

 $\gamma(h_1,h_2) = \gamma_0 + \gamma_1 \log[\max(h_1,h_2)]$, (1) 式中,若 $\gamma_1 > 0$,则可以反映出任何一个资本市场所产生的大波动都会促使资产间的相关性增强。最后,根据 Copula 参数与相关性测度或尾部相关系数的对应关系,就能确定 Copula 参数的演进方程。

3 CFXO 及其定价模型

CFXO 是将一揽子外汇作为标的资产,如果一种汇率跌至事先设定的触点以下,则认为发生了违约事件。DORN^{II}认为,CFXO 可以看成是一系列外汇触发互换的组合。外汇触发互换实质上是固定汇率与变动汇率的互换,其中变动汇率等于浮动汇率与触点之差。当浮动汇率跌至触点以下时,违约事件即发生。CFXO 的投资者因为承担了汇率风险而相当于对标的外汇互换出售保护;同时,投资者收到价差或者保费(一般以分券本金的一定百分比表示),以弥补因承担违约风险可能发生的损失。分券持有人违约损失的总价值与收取保费的总价值相等时的价差称为公平价差。CFXO 的结构见图 1。

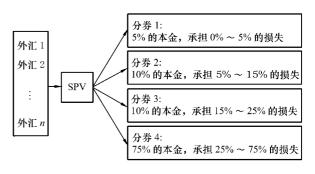


图 1 CFXO 结构图

由此可见,基于外汇的 CFXO 和基于信用风险的 CDO 在结构上相似,故可以应用 CDO 的一些定价方法对 CFXO 进行定价。目前,关于 CDO 定价主要有结构化方法和简约式方法 2 种。文献[9]为前者的代表性研究,但结构化方法已被证明很费时间,而且公司价值具有不

可观测性,所以没有广泛应用。简约式方法是目前应用得比较多的一种方法,其中有代表性的是 LI 等^[4] 的研究。LI 等用高斯 Copula 对 CDO 进行了定价,其方法和结果后来在华尔街被广泛使用,成为业界标准,但前 2 年的次贷危机表明这种方法太过简单,离现实太远。此外,YU^[10]、GIESECKE 等^[11] 也对简约式方法进行了研究。

在对 CFXO 进行定价之前,先给出有关符号的定义:s 为 CFXO 的交易价差;n 为标的互换的总数目; N_c 为 CFXO 的名义本金; $N_{[A,B]}$ 为 CFXO 分券层[A%; B%] 的名义本金;A% 为 CFXO 分券层的着点;B% 为 CFXO 分券层的 分点; N_k 为标的互换 k 的名义本金; $\Gamma(t)$ 为 t 期内的违约次数; $P[\Gamma(t)]$ 为 t 期内分券层[A%; B%]发生 d 次违约的概率;F(x) 为累计损失的概率分布;B(t,T) 为在 T 时刻支付一单位货币的零息债券

如果第 k 个互换违约则将导致 CFXO 的本 金损失,则有:

$$N_{\rm C} = \sum_{k=1}^n N_k \,, \tag{2}$$

$$N_{[A,B]} = (B-A) \% N_{C} = (B-A) \% \sum_{k=1}^{n} N_{k},$$
 (3)

$$F(x,t) = \sum_{d=0}^{x} P[\Gamma(t) = d]. \tag{4}$$

(1) CFXO 的保费收入 考虑到当违约事件发生,且累积组合损失达到分券的着点时,分券本金会随着更多外汇互换组合违约事件的发生而减少,直至本金消失。由此,投资者的价差收入(即保费收入)取决于悬而未决的分券本金。保费收入(P_L)是在分券的存续期内,分券持有者所获得的一系列价差支付的现值之和。

假设一个投资者持有 CFXO 的分券层 [A%;B%],市场无风险利率 r 为常数,引入随机累计损失变量

$$Z(t) = \sum_{k=1}^{N} N_k I_{\langle \tau_k < t \rangle}, \qquad (5)$$

式中 $,\tau_k$ 是第 k 个标的互换发生违约的时间,则 分券层[A%;B%]在 t 时刻的本金为

$$X(t) = (B-A)I_{(Z(t)
(6)$$

则在结算时间 $t=(t_1, t_2, \dots, t_p)$ 时,

$$P_{L} = s \sum_{i=1}^{p} E_{Q} [X(t_{i})] e^{-rt_{i}} (t_{i} - t_{i-1}) .$$
 (7)

②)CFXO 的违约损失 当累积组合损失 达到分券的着点时,分券本金会随着更多违约 事件的发生而减少,分券持有者的收入也会随着违约的发生而减少。由此,定义违约损失 (D_L) 为违约事件导致的分券本金的减少量的现值之和。于是,在 $t=(t_1,t_2,\cdots,t_n)$ 时,

$$D_{L} = \sum_{i=1}^{p} \{ e^{-n_{i-1}} E_{Q} [X(t_{i})] - e^{-n_{i}} E_{Q} [X(t_{i-1})] \} \approx$$

$$\sum_{i=1}^{p} e^{-n_{i}} \{ E_{Q} [X(t_{i-1}) - X(t_{i})] \}, \qquad (8)$$

③)CFXO 的公平价差 CFXO 的公平价差是使分券持有人的预期总 D_t 值与预期总 P_t 值相等时的价差,因此,CFXO 分券层 [A%; B%] 在 $t=(t_1,t_2,\cdots,t_p)$ 时的公平价差为

$$S^{[A;B]}(t) = \frac{\sum_{i} B(t, T_i) E_Q[X(t_{i-1}) - X(t_i)]}{\sum_{i} B(t, T_i) (t_i - t_{i-1}) E_Q[X(t_i)]} . (9)$$

4 基于动态 Copula 的 CFXO 价格数值计算

本研究现考虑一个基于美元(USD)、日元 (JPY)、欧元(EUR)和英镑(GBP)两两之间汇率的 CFXO,选用 t-GARCH 模型拟合各汇率的边际分布,然后应用时变 t-Copula 对 CFXO的各分券层进行定价。

4.1 数据描述及边缘分布估计

本研究使用的样本数据均选自中国货币网,是中国外汇交易中心对外公布的当日人民币对美元、欧元、日元和英镑的汇率中间价,数据的时限为 2006 年 8 月 1 日~2009 年 8 月 3 日,共734 个日交易数据。外汇日收益率为

$$R_i = 1 \ 000(\ln p_{i,t} - \ln p_{i,t-1})$$
 .

通过对各汇率的日收益率数据进行 JB 统计量分析,得知均拒绝正态分布假设,因此,选用下面的 t-GARCH(1,1)模型来刻画各汇率的日收益率:

$$R_{i,t} = \mu + c_{i}R_{i,t-1} + \varepsilon_{i,t};$$

$$h_{i,t}^{2} = \omega_{i} = \alpha_{i}\varepsilon_{i,t-1}^{2} + \beta_{i}h_{i,t-1}^{2};$$

$$\sqrt{\frac{\nu_{i}}{h_{i,t}^{2}(\nu_{i}-2)}} \varepsilon_{i,t} \mid \psi_{t-1} \sim t(\nu_{i}) ,$$
(10)

式中 $,\nu$ 为自由度 $;\phi_{\ell-1}$ 表示t-1 时刻获得的信息集。各汇率收益率序列的边缘分布参数估计结果见表1。

4.2 时变 Copula 的参数估计

构造时变 Copula 模型的关键在于要给出 Copula 函数的相关参数的演化方程。类似 GARCH 过程中对时变波动的描述,本研究假定 Copula 的参数服从某个与时间相关的动态演进方程,以此来刻画参数随时间变化的特性。这里选取 t-Copula 函数来刻画汇率收益率间的相关关系,并用下面的方程[12] 来描述 t-Copula 的参数的时变特征:

表 1 各汇率边缘分布参数估计结果

 参数	USD	EUR	JPY	GBP
	-0.130 975	0.130 232	-0.483 326	-0.056 908
,	(0.014 558)	(0.168 358)	(0.209 399)	(0.176 940)
С	0.035 502	-0.020944	0.007 312	0.044 146
	(0.027 651)	(0.037 243)	(0.037 991)	(0.036 878)
ω	0.038 122	0.165 099	0.572 778	0.252 111
	(0.0120 35)	(0.114 903)	(0.333 156)	(0.173 595)
α	0.364 100	0.040 807	0.090 977	0.075 187
	(0.072 615)	(0.012 311)	(0.022 111)	(0.020 391)
β	0.603 770	0.955 477	0.905 515	0.922 193
	(0.055 665)	(0.013 258)	(0.022 487)	(0.020 387)
ν	2.947 703	7.285 045	6.336 216	9.378 181
	(0.127 678)	(1.287 567)	(1.908 501)	(3.107 629)

 $\rho=(1-\theta_1-\theta_2)R+\theta_1\rho_{t-1}+\theta_2\varphi_{t-1}. \qquad (11)$ 式中,R 为样本的相关系数矩阵; φ_{t-1} 为汇率收益率矩阵的滞后十阶观测值; θ_1 和 θ_2 为非负常数,且满足 $\theta_1+\theta_2{\leqslant}1$ 。时变相关 $t\text{-}\mathrm{Copula}$ 的参数估计结果见表 2。

表 2 时变相关 t-Copula 的参数估计结果

参数	USD-JPY	USD-EUR	USD-GBP	JPY-EUR	JPY-GBP	EUR-GBP
θ_1	0.175 7	0.018 1	0.029 3	0.076 3	0.0898	0.034 0
θ_2	0.607 9	0.977 8	0.947 4	0.878 4	0.856 2	0.937 1

从表 2 可知,持续性参数 θ_1 的符号恒为正,说明各汇率收益率序列之间的相关参数具有持续性,即 t-1 时刻的相关系数 ρ_{t-1} 的值与 t 时刻相关系数 ρ_t 的值具有正的相关关系。同时, θ_2 也为正,说明当期的相关系数也同前 10 期的收益率水平相关。通过比较 2 个系数的大小,可以说明当期相关系数受前一期相关系数的影响较大,而受收益率水平的影响较小。

4.3 基于时变 t-Copula 的 CFXO 定价

现考虑一个包含上述 4 种汇率,即美元、日元、欧元、英镑的 CFXO,其中日元以 100 日元为单位。合约的本金为 400 元人民币,其中每种外币的本金均为 100 元人民币。由于本研究每种外币的汇率表示为一单位外币折合成相应的人民币数值,所以当一种外币的汇率低于事先设置的触发点汇率时,合约的本金就减少100 元人民币,也即合约损失 100 元人民币。

假设 CFXO 为欧式的,即事先设置的触发点只在合约到期日有效,合约期限为 1 年。本研究中将分别对支付函数为 $(L-100)^+$ 、 $(L-125)^+$ 、 $(L-150)^+$ 的分券层进行定价,其中 L为合约的总损失,100、125、150 为预先设置的起赔点 M。无风险利率取 2009 年 8 月 3 日的Shibor 1 年期利率均值 2.091 4%,并对不同的汇率设置触发点 k,然后根据汇率的历史数据

估计各汇率的波动率(见表 3)。

表 3 触发点汇率以及汇率初始波动率的参数设置

类别	USD	JPY	EUR	GBP
触发点	6.832	7.231	9.615	11.182
波动率	0.000 74	0.030 69	0.021 90	0.025 30

由时变 Copula 计算 CFXO 分券层价格的 步骤如下:

(1) 由前文所述的边际分布参数和时变相关系数产生 4 列随机数,它们的边缘分布由 t-GARCH(1,1)模型刻画,相关结构由上述时变Copula 刻画,即模拟 4 列未来外汇收益率,进而计算出未来的外汇价格,模拟 10 000 次。

(2) 将每次所得的外汇价格代入待定价的分券层支付函数, 求均值并将其折现, 即得CFXO的市场价格。各个分券层的价格见表4。

表 4 CFXO 各分券层价格

分券	价格/bp	方差/%	95%置信度下的 分券层价格区间
(L-100)+	71.485 3	51.883 3	[70.4683,72.5023]
$(L-125)^+$	47.607 0	52.019 1	[46.587 3,48.626 6]
$(L-150)^+$	21.8219	51.618 0	[20.814 5,22.829 3]

从表 4 可知,预置的起赔点 *M* 的不同对 CFXO 分券层的价格有不同的影响,即预置的 起赔点 *M* 越高,分券层的价格越便宜,这与现实的金融市场定价规律相符,随着模拟次数的增加,CFXO 分券层的价格方差呈递减趋势,即以方差表示的模拟精度与模拟次数成反比。

5 结语

CFXO 是在次贷危机前后开发的一种抵押类产品,其试图将信用市场上流行的证券化技术应用于外汇资产等具有较低信用风险暴露的资产类中。本研究借鉴 CDO 的定价思路,应用时变 Copula 来刻画标的汇率之间的时变相关结构,先给出 CFXO 的理论定价模型,然后对一个基于 4 种主要货币的 CFXO 给出了数值算例。CFXO 于 2007 年推出后,交易并不是很活跃,这可能是与次贷危机对结构化金融产品所带来的负面影响有关。但正如其他金融衍生产品所具有的双刃剑特性一样,CFXO 这种新产品在规避汇率风险方面有其重要的实际意义,运用该产品的关键在于保持清醒的头脑,对其进行正确定价。相信在不久的将来,CFXO 会在汇率市场上得到应有的重视。

(下转第 1012 页)

2010, 19(2): 133~144.

- [2] YUSUF A A, RESOSUDARMO B P. Does Clean Air Matter in Developing Countries' Megacities? A Hedonic Price Analysis of the Jakarta Housing Market, Indonesia[J]. Ecological Economics, 2009, 68 (5): 1398~1407.
- [3] CLAPP J M, SALAVEI K. Hedonic Pricing with Redevelopment Options: A New Approach to Estimating Depreciation Effects [J]. Journal of Urban Economics, 2010, 67(3): 362~377.
- [4] MEDEIROS M C, MCALEER M, SLOTTJE D, et al. An Alternative Approach to Estimating Demand: Neural Network Regression with Conditional Volatility for High Frequency Air Passenger Arrivals [J]. Journal of Econometrics, 2008, 147(2): 372~383.
- [5] KHALAFALLAH A. Neural Network Based Model for Predicting Housing Market Performance[J]. 清华大学学报:英文版, 2008, 13(s1): 325~328.
- [6] DORSEY R E, HU H, MAYER W J, et al. Hedonic Versus Repeat-sales Housing Price Indexes for Measuring the Recent Boom-bust Cycle [J]. Journal of Housing Economics, 2010, 19(2): 75~93.
- [7] LANCASTER K J. A New Approach to Consumer Theory[J]. Journal of Political Economy, 1966, 74 (2): 132~157.
- [8] GRILICHES Z. Estimating the Returns to Schooling: Some Econometric Problems [J]. Econometrica,

1977, 45(1): $1\sim22$.

- [9] POIRIER D J. The Use of the Box-cox Transformation in Limited Dependent Variable Models[J]. Journal of the American Statistical Association, 1978, 73 (362): 284~287.
- [10] 王贇松,许洪国. 快速收敛的 BP 神经网络算法[J]. 吉林大学学报:工学版, 2003, 33(4): 79~84.
- [11] 张德丰. MATLAB 神经网络设计[M]. 北京:机械工业出版社, 2009.
- [12] TROY A, GROVE J M. Property Values, Parks, and Crime: A Hedonic Analysis in Baltimore, MD [J]. Landscape and Urban Planning, 2008, 87(3): 233~245.
- [13] 周丽萍,李慧民,路鹏飞. Box-cox 变换在构建房地产特征价格模型中的应用[J]. 西安科技大学学报, 2009, 29(2): 240~243.
- [14] REDFEARN C L. How Informative Are Average Effects? Hedonic Regression and Amenity Capitalization in Complex Urban Housing Markets[J]. Regional Science and Urban Economics, 2009, 39(3): 297~306.

(编辑 丘斯迈)

通讯作者:司继文(1959~),女,湖北武汉人。华中科技大学(武汉市 430074)土木工程与力学学院副教授。研究方向为房地产金融。E-mail:sijiwen@mail.hust.edu.cn

(上接第 993 页)

参 考 文 献

- [1] DORN J. Modeling of CFXOs-Selling Protection on Forex Trigger Swaps [R]. Paris: PRISM Research Center, 2008.
- [2] JAIMUNGAL S, LIANG J, XU M Y. Report on Pricing Collateralized Foreign Exchange Obligation [C]//China-Canda Quantitative Finance Problem Solving Workshop, Weihai, 2008.
- [3] RAPUCH G, RONCALLI T. Technical Note: Dependence and Two-Asset Options Pricing[J]. Journal of Computational Finance, 2004, 7(4):26~52.
- [4] LIP, CHEN H S, DENG X T, et al. On default Correlation and Pricing of Collateralized Debt Obligation By Copula Functions, International [J]. Journal of Information Technology & Decision Making, 2006, 26(3): 483~493.
- [5] LI DX. On Default Correlation: A Copula Function Approach [J]. Journal of Fixed Income, 2001,17(9): 43~54.
- [6] PATTON A. Modelling Time-Varying Exchange Rate Dependence Using the Conditional Copula[R]. WP: UCSD,2001.
- [7] DUAN J C. The GARCH Option Pricing Model [J]. Mathematical Finance, 1995, 5(2):13~32.

- [8] GOORBERGH R W J, GENEST C, WERKER B J M. Bivariate Option Pricing Using Dynamic Copula Models [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2005, 37(1): 101~114.
- [9] HULL J, WHITE A. The General Hull White Model and Supercalibration [J]. Financial Analysts Journal, 2001, 57(6): 34~43.
- [10] YU F. Default Correlation in a Reduced-Form Model[J]. Journal of Investment Management, 2005, 3 (4): 33~42.
- [11] GIESECKE K, GOLDBERG L R, DING X. A Top-down Approach to Multi-name Credit[J]. Operations Research, 2009,23(2):161~179.
- [12] TSE Y K, TSUI K C. A Multivariate Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity Model with Time-Varying Correlations[J]. Journal of Business and Economic Statistics, 2002, 20(3): 351~362.

(编辑 郭恺)

通讯作者: 李平 $(1972\sim)$,女,北京人。北京航空航天大学(北京市 100191) 经济管理学院副教授。研究方向为金融衍生产品定价、金融风险管理。E-mail: liping124@buaa. edu. cn