航 空 学 报 Aug. 25 2012 Vol. 33 No. 8 1491-1497
Acta Aeronautica et Astronautica Sinica ISSN 1000-6893 CN 11-1929/V
http://hkxb.buaa.edu.cn hkxb@buaa.edu.cn

文章编号:1000-6893(2012)08-1491-07

SE(3)上一般力学控制系统的运动描述与飞行器建模

左宗玉[1,2,*]

1. 北京航空航天大学 第七研究室,北京 100191
2. 北京航空航天大学 飞行器控制一体化技术重点实验室,北京 100191

摘 要:与 Lie 群上的简单力学控制系统不同,Lie 群上的一般力学控制系统需要考虑势能在位形空间中的变化,故其 Lagrange 算子不再是左不变的,这意味着根据定义 Euler-Poincaré 方程不能直接应用于此类系统。为此,本文首先建立矩阵 Lie 群 SE(3)上的一般力学控制系统的数学描述,重新定义 Lagrange 算子为左不变动能减势能;然后基于连续 Lagrange-d'Alembert法则推导得到了含有势能函数的 Euler-Poincaré 方程,用来刻画 SE(3)上一般力学控制系统的动态;最后给出了四旋翼无人直升机和无人飞艇建模的应用实例。

关键词:一般力学控制系统;矩阵 Lie 群;左不变;Euler-Poincaré 方程;四旋翼直升机;飞艇

中图分类号:V219;N945.12 **文献标识码**:A

力学系统或者更一般的 Lagrange 系统在现代科学与工业领域的应用中广泛存在。简单力学控制系统是一类结构化的非线性控制系统,其关键思想来源于几何力学[1],指的是系统的 Lagrange 算子可表示成动能减势能[2],且若其位形具有 Lie 群结构,则称为 Lie 群上的简单力学系统。由于简单力学系统具备一些特有的属性,如对称性,可以简化控制律的设计。

Lie 群上的简单力学控制系统[2]指的是位形流形 Q 具有矩阵 Lie 群结构,且动能和控制力在群作用下为左不变的,其势能函数为零的一类简单力学系统,其动力学特性可由 Euler-Poincaré 方程进行刻画。文献[3]提出了 Lie 群 SE(2)上欠驱动系统的逆运动规划问题,不需要考虑势能的影响。文献[4]和文献[5]均是研究一类 Lie 群 SE(3)上简单力学控制系统的运动问题,亦未涉及势能影响和非保守力作用。然而像无人飞行器、潜水器等这类一般力学控制系统,需要考虑位形空间中势能函数的变化,以及非保守力(如气动力)的作用。Nordkvist 和 Sanyal[6]给出了 SE(3)上含势能函数和非保守力作用的刚体运动方程,但未给出证明过程,且所给出的转动和平动方程相互独立,当刚体固连坐标系原点选在非质心位置时,无法使用该动力学方程进行建模。Lee 等[7]运用几何控制思想设计了四旋翼直升机 SE(3)上的全局控制律,避免了局部坐标的选择和奇异值问题,但并未建立 Lie 群 SE(3)上力学控制系统的一般运动方程。因此,建立矩阵 Lie 群 SE(3)上一般力学控制系统的运动描述,探索非线性流形内在的几何属性,能够为控制系统设计和控制理论研究提供更加深入的见解。

收稿日期:2011-10-13;退修日期:2011-11-08;录用日期:2011-12-16;网络出版时间:2011-12-31 14:07
网络出版地址:www.cnki.net/kcms/detail/11.1929.V.20111231.1407.006.html
基金项目:国家自然科学基金(61074010)
* 通讯作者.Tel.:010-82338049 E-mail:zzybobby@buaa.edu.cn

引用格式:*Zuo Z Y. Kinematic description of a general mechanical control system on SE(3) and aircraft modeling. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2012, 33(8): 1491-1497.* 左宗玉. SE(3)上一般力学控制系统的运动描述与飞行器建模. 航空学报, 2012, 33(8): 1491-1497.

1 基本概念

给定一个力学系统,需要唯一确定其上所有质点在惯性系中的位置。在几何力学中,用有限维流形 Q 中的元素来确定一个力学系统上所有质点的位置,Q 称为位形空间。Q 的维数称为力学系统的自由度,任意 $q\in Q$ 称为一个力学系统的位形。若流形 Q 与 n 维欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 局部微分同胚,则可定义局部微分同胚映射 $\chi:Q\rightarrow\mathbb{R}^n$ 来建立局部实数坐标系。

设 n 个自由度的力学系统所在位形空间是微分流形 Q,其维数为 n。流形 Q 的开子集 U 上取局部坐标 $(q_1,q_2,\cdots,q_n)$,称其为广义坐标,切向量 $v=(\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_n)\in T_qQ$ 称为广义速度,其中 T_qQ 为流形 Q 在 q 处的切空间。设该力学系统有 Lagrange 函数 $L(q_1,q_2\cdots,q_n;\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_n)$,余切向量 $p=(\partial L/\partial\dot{q}_1,\partial L/\partial\dot{q}_2,\cdots,\partial L/\partial\dot{q}_n)\in T_q^*(Q)$ 称为广义动量,或者 $T_q^*(Q)$ 的元素亦可视为广义力,其中 $T_q^*(Q)$ 为 T_qQ 在 q 处的余切空间。力学系统的动能是 Q 上的一个黎曼度量 $\ll\cdot,\cdot\gg_q$:$T_qQ\times T_qQ\rightarrow\mathbb{R}$,使得 T_qQ 成为一个内积空间,定义惯性张量 $\mathbb{M}_q:T_q(Q)\rightarrow T_q^*(Q)$ 满足 $\ll v,v\gg_q=<\mathbb{M}_q(v),v>$,其中 $<\cdot,\cdot>$ 表示内积。若将速度矢量表示在实数域 $\mathbb{R}^n$ 中,则惯性张量可由 $n\times n$ 维正定矩阵 $\boldsymbol{M}(q)$ 表示。

2 Lie 群上一般力学控制系统的定义

定义 1 受迫简单力学控制系统[2]由以下 6 点定义:①具有 n 维位形流形 Q,其局部坐标为 $(q_1,q_2,\cdots,q_n)$;②存在流形 Q 上的黎曼度量 $M_q:TQ\times TQ\rightarrow\mathbb{R}$ 描述动能;③存在函数 $\Pi:Q\rightarrow\mathbb{R}$ 描述势能;④存在映射 $B:TQ\rightarrow T^*Q$ 描述力学系统上非保守力作用;⑤存在 m 维联合分布 $\mathfrak{F}=\mathrm{span}\{F^1(q),F^2(q),\cdots,F^m(q)\}$ 描述输入方向;⑥存在紧集 U 和有界可测控制输入集合 $u=\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}\in U$。

简单力学控制系统的 Lagrange 函数可表示为

$$L(q,\dot{q})=\dot{q}^{\mathrm{T}}M(q)\dot{q}/2-\Pi(q)$$

则刻画简单力学控制系统动态过程的 Euler-Lagrange 方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}-\frac{\partial L}{\partial q}=B(q,\dot{q})+\sum_{i=1}^{m}F^i(q)u_i \tag{1}$$

对于简单的 Lagrange 系统来说,项 $B(q,\dot{q})$ 一致为零,然而像飞行器这一类力学控制系统,会受到气动力等非保守力的作用,故一般力学控制系统的动力学描述需要考虑非保守力项,以方便处理飞行器的建模问题。

记 $\mathfrak{g}$ 表示 Lie 代数,$\mathfrak{g}^*$ 表示对偶 Lie 代数,利用这种 Lie 群结构往往可以大大简化系统的运动方程,如将动力学方程表示在体坐标系当中[8]。

对于矩阵 Lie 群上力学控制系统势能函数不为零的情况[4],由定义 2 进行描述。

定义 2 Lie 群上的一般力学控制系统 $\mathcal{S}$ 可由以下 5 点进行刻画:①存在 n 维矩阵 Lie 群 G 作为系统 $\mathcal{S}$ 位形流形;②存在惯性张量 $\mathbb{I}:\mathfrak{g}\rightarrow\mathfrak{g}^*$ 来定义系统的动能;③存在势能函数 $\Pi:G\rightarrow\mathbb{R}$;④存在映射 $b:G\times\mathfrak{g}\rightarrow\mathfrak{g}^*$ 描述非保守力的作用,并且表示在体坐标系中;⑤存在体坐标系下的 1-形式集合 $\{f_1,f_2,\cdots,f_m\}\in\mathfrak{g}^*$ 和有界可测输入集合 $\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$,定义输入广义力 $f(t)=\sum_{i=1}^{m}f_iu_i$,并且表示在体坐标系中。

评论 1 考虑三维欧氏空间刚体运动问题,需引入参考坐标系 $\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{B}$,分别固定于空间中的某一点和刚体上的某一点,通常系 $\mathcal{I}$ 和系 $\mathcal{B}$ 具有相同的朝向,空间刚体的位置和姿态由系 $\mathcal{B}$ 相对于系 $\mathcal{I}$ 的关系确定。在飞行力学当中,系 $\mathcal{I}$ 和系 $\mathcal{B}$ 分别称之为惯性系和体坐标系。

3 Euler-Poincaré 方程

Lagrange 力学基于对 Newton 方程力平衡定律背后变分法则的观察而产生[9],故在获得 Euler-Poincaré 方程之前,先给出变分的标准定义。

定义 3 记 Q 为一流形,$q:[a,b]\rightarrow Q$,$a,b\in\mathbb{R}$,$b>a$ 为流形 Q 上的一光滑曲线。曲线 q 的变分为一光滑映射 $(t,\varepsilon)\mapsto q_\varepsilon(t)\in Q$,$\varepsilon\in[c,d]$,$d>0$,$c<0$,且满足

① $q_0(t)=q(t)$。

② $q_\varepsilon(a)=q(a)$,$q_\varepsilon(b)=q(b)$,$\forall\,\varepsilon\in[c,d]$。

则相应的极小变分为

$$\delta q(t)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} q_{\varepsilon}(t)\in T_{q(t)}Q$$

对于光滑函数 $L:TQ\rightarrow\mathbb{R}$，泛函

$$I(q)=\int_a^b L(\dot{q}(t))\,\mathrm{d}t$$

的变分为

$$\delta\int_a^b L(\dot{q}(t))\,\mathrm{d}t=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\int_a^b L(\dot{q}_{\varepsilon}(t))\,\mathrm{d}t$$

L 的泛函导数 $\delta L/\delta q:TQ\rightarrow T^*Q$ 是关于 $\mathrm{id}_Q:Q\rightarrow Q$ 的丛映射。如果泛函导数存在的话，其定义为

$$\delta\int_a^b L(\dot{q}(t))\,\mathrm{d}t=\int_a^b\frac{\delta L}{\delta q}(\dot{q}(t))\cdot\delta q(t)\,\mathrm{d}t$$

定义 4 记 Q 为一流形，$q:[a,b]\rightarrow Q$，$a,b\in\mathbb{R}$，$b>a$ 为流形 Q 上的一条光滑曲线，$F:[a,b]\times TQ\rightarrow T^*Q$ 为关于 id_Q 的丛映射。若对于 $q(t)$ 的每个变分 $q_{\varepsilon}(t)$ 所对应的极小变分有

$$\delta\int_a^b L(\dot{q}(t))\,\mathrm{d}t+\int_a^b F(t,\dot{q}(t))\cdot\delta q(t)\,\mathrm{d}t=0$$

则称 $q(t)$ 满足 Lagrange-d'Alembert 法则。

若 Lagrange 算子 $L:TG\rightarrow\mathbb{R}$ 满足

$$L(g,\dot{g})=L(\mathcal{L}_h(g),T_g\mathcal{L}_h(\dot{g})),\quad\forall g,h\in G$$

式中：$\dot{g}\in T_gG$，$\mathcal{L}_h:G\rightarrow G$ 为左平移映射，满足 $\mathcal{L}_h(g)=hg$。则称 L 为左不变的。对于左不变 Lagrange 算子及矩阵 Lie 群，有

$$L(g,\dot{g})=L(\mathcal{L}_{g^{-1}}(g),T_g\mathcal{L}_{g^{-1}}(\dot{g}))=L(e,g^{-1}\dot{g})=L(e,\xi)=:l(\xi)\tag{2}$$

式中：$\xi:=g^{-1}\dot{g}\in\mathfrak{g}$；$l$ 为 L 到 $\mathfrak{g}$ 的限制。

当位形空间为一 Lie 群且 Lagrange 算子为左不变时，Lagrange 方程等价于 Euler-Poincaré 方程，由定理 1[5] 阐述。

定理 1(Euler-Poincaré 方程) 记 G 为一矩阵 Lie 群，$L:TG\rightarrow\mathbb{R}$ 为左不变 Lagrange 算子，l 为 L 到 $\mathfrak{g}$ 的限制。对于曲线 $g(t)\in G$，定义曲线 $\xi(t)\in\mathfrak{g}$ 为

$$\xi(t)=g^{-1}(t)\dot{g}(t)\tag{3}$$

记 $F:\mathbb{R}\times G\rightarrow T^*G$ 为

$$F(t,g)=T_g^*\mathcal{L}_{g^{-1}}f(t)=(g^{-1})^{\mathrm{T}}f(t)$$

式中：$f(t)\in\mathfrak{g}^*$ 为表示在体坐标系中的力。则 $g(t)$ 满足 Lagrange-d'Alembert 法则的充分必要条件为 $\xi(t)$ 满足 Euler-Poincaré 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\delta l}{\delta\xi}=\mathrm{ad}_{\xi}^*\frac{\delta l}{\delta\xi}+f(t)\tag{4}$$

式中：ad_{ξ}^* 矩阵表示为 ad_{ξ} 矩阵表示的转置；ad_{ξ} 为李括号算子。

评论 2 式(3)刻画的是系统的运动学，而式(4)刻画的是系统动力学。

4 Lie 群上一般力学控制系统的运动描述

4.1 运动学描述

记 $\boldsymbol{R}\in\mathbb{R}^{3\times3}$ 来描述空间刚体的姿态，考虑到方向余弦矩阵满足性质 $\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$ 和 $\det(\boldsymbol{R})=1$，故方向余弦矩阵的集合通常记为 SO(3)。在矩阵乘法运算下 $\mathrm{SO}(3)\in\mathbb{R}^{3\times3}$ 是一个群，称做 $\mathbb{R}^3$ 上的旋转变换群。SO(3) 的 Lie 代数记为 $\mathfrak{so}(3)$，可用如下形式的 3×3 反对称矩阵表示：

$$\hat{\boldsymbol{\chi}}=\begin{bmatrix}0&-\chi_3&\chi_2\\\chi_3&0&-\chi_1\\-\chi_2&\chi_1&0\end{bmatrix},\quad\forall\boldsymbol{\chi}=[\chi_1\quad\chi_2\quad\chi_3]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^3\tag{5}$$

其 Lie 括号结构为

$$[\hat{\boldsymbol{\omega}}_1,\hat{\boldsymbol{\omega}}_2]=\hat{\boldsymbol{\omega}}_1\hat{\boldsymbol{\omega}}_2-\hat{\boldsymbol{\omega}}_2\hat{\boldsymbol{\omega}}_1=\widehat{(\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{\omega}_2)},\quad\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2\in\mathbb{R}^3$$

故 $\boldsymbol{\omega}\mapsto\hat{\boldsymbol{\omega}}$ 是 Lie 代数($\mathbb{R}^3$, ×)与 Lie 代数($\mathfrak{so}(3)$, [·, ·])之间的一个 Lie 代数同构。

记 $\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^3$ 来描述空间刚体的位置，把 $\mathbb{R}^3$ 和 SO(3) 的半直积[10]空间称为刚体的位形空间，记为 SE(3)[6]。与 SO(3) 类似，在矩阵乘法运算下 SE(3) 为一般线性群 GL($\mathbb{R}^4$) 的 Lie 子群，SE(3) 的 Lie 代数记为 $\mathfrak{se}(3)$，可用如下形式的 4×4 维矩阵表示：

$$\hat{\xi}=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{\omega}}&\boldsymbol{v}\\\boldsymbol{0}&0\end{bmatrix}$$

式中：$\hat{\boldsymbol{\omega}}\in\mathfrak{so}(3)$；$\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3$。其 Lie 括号结构为

$$[\hat{\xi}_1,\hat{\xi}_2]=\hat{\xi}_1\hat{\xi}_2-\hat{\xi}_2\hat{\xi}_1=\begin{bmatrix}\widehat{\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{\omega}_2}&\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{\omega}_2\times\boldsymbol{v}_1\\\boldsymbol{0}&0\end{bmatrix}$$

矢量空间 $\mathfrak{se}(3)$ 通过映射 $\hat{\boldsymbol{\xi}}\mapsto\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{v})\in\mathbb{R}^6$ 与 $\mathbb{R}^6$ 同构。

若刚体的位形空间为 SE(3)，并记 $\boldsymbol{\omega}\in\mathbb{R}^3$ 和 $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3$ 分别为刚体角速度和线速度，且表示在体坐标系中，得微分同胚 $T\mathrm{SE}(3)\simeq\mathrm{SE}(3)\times\mathfrak{se}(3)$。由式(3)可得描述空间刚体平动和转动的运动学方程为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{R}}=\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{\omega}}\\ \dot{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{v}\end{cases}\tag{6}$$

4.2 动力学描述

Euler-Poincaré 方程(式 4)能够刻画左不变系统的动态,如 Lie 群上的简单力学控制系统,然而当需要考虑系统的势能变化时,系统的 Lagrange 算子不再是左不变的,因此不能够如式(2)那样定义 $l(\xi)$,也就意味着不能直接应用 Euler-Poincaré 方程来描述此类系统,但是仍然可以用势能和左不变动能来处理并获得相应的方程,即 $L=l(\xi)-\Pi(g)$。

命题 1 记 $\Pi(\boldsymbol{p},\boldsymbol{R}):\mathrm{SE}(3)\rightarrow\mathbb{R}$ 表示势能映射,定义内积为迹配对 $\langle\cdot,\cdot\rangle:\mathbb{R}^{n\times m}\times\mathbb{R}^{n\times m}$,即 $\langle\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\rangle=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})$。即 $\boldsymbol{M}$ 为质量矩阵,$\boldsymbol{J}$ 为惯性矩阵,$\boldsymbol{R}\in\mathrm{SO}(3)$ 为方向余弦矩阵,$\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^3$ 为空间刚体质心位置在惯性系中的表示,$\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 分别表示空间刚体的转动和平动,且表示在体坐标系中,则空间刚体的动力学方程为

$$\begin{cases}\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{v}}=-\hat{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}+\mathcal{U}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{R})+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{T}\\ \boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}=-\hat{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega}-\hat{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}+\mathcal{M}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{R})+\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\tau}\end{cases}\tag{7}$$

式中:$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 分别为非保守力和力矩;$\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{\tau}$ 分别为控制力和力矩;$\mathcal{U},\mathcal{M}\in\mathbb{R}$ 为

$$\begin{cases}\mathcal{U}=-\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\dfrac{\partial\Pi}{\partial\boldsymbol{p}}\\ \hat{\mathcal{M}}=\left(\dfrac{\partial\Pi}{\partial\boldsymbol{R}}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\left(\dfrac{\partial\Pi}{\partial\boldsymbol{R}}\right)\end{cases}\tag{8}$$

证明 SE(3)上刚体运动的 Lagrange 算子为

$$L(\boldsymbol{p},\boldsymbol{v},\boldsymbol{R},\boldsymbol{\omega})=\frac{1}{2}\langle\boldsymbol{M}\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle+\frac{1}{2}\langle\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega}\rangle-\Pi(\boldsymbol{p},\boldsymbol{R})\tag{9}$$

系统的动态满足连续 Lagrange-d'Alembert 法则

$$\delta\int_a^b L(\boldsymbol{p},\boldsymbol{v},\boldsymbol{R},\boldsymbol{\omega})\mathrm{d}t+\int_a^b(\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{\gamma}\rangle+\langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\Sigma}\rangle+\langle\boldsymbol{T},\boldsymbol{\gamma}\rangle+\langle\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\Sigma}\rangle)\mathrm{d}t=0\tag{10}$$

式中:$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{R}^{-1}\delta\boldsymbol{p}$;$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}=\boldsymbol{R}^{-1}\delta\boldsymbol{R}$。对运动学方程(式(6))求变分可得

$$\widehat{\delta\boldsymbol{\omega}}=\delta(\boldsymbol{R}^{-1}\dot{\boldsymbol{R}})=-\boldsymbol{R}^{-1}(\delta\boldsymbol{R})\boldsymbol{R}^{-1}\dot{\boldsymbol{R}}+\boldsymbol{R}^{-1}(\delta\dot{\boldsymbol{R}})=-\hat{\boldsymbol{\Sigma}}\hat{\boldsymbol{\omega}}+\boldsymbol{R}^{-1}(\delta\dot{\boldsymbol{R}})\tag{11}$$

$$\delta\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{R}^{-1}(\delta\boldsymbol{R})\boldsymbol{R}^{-1}\dot{\boldsymbol{p}}+\boldsymbol{R}^{-1}(\delta\dot{\boldsymbol{p}})=-\hat{\boldsymbol{\Sigma}}\boldsymbol{v}+\boldsymbol{R}^{-1}(\delta\dot{\boldsymbol{p}})\tag{12}$$

注意到

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\Sigma}}}=-\boldsymbol{R}^{-1}\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}^{-1}(\delta\boldsymbol{R})+\boldsymbol{R}^{-1}(\delta\dot{\boldsymbol{R}})=-\hat{\boldsymbol{\omega}}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}+\boldsymbol{R}^{-1}(\delta\dot{\boldsymbol{R}})\tag{13}$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}=-\boldsymbol{R}^{-1}\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}^{-1}(\delta\boldsymbol{p})+\boldsymbol{R}^{-1}(\delta\dot{\boldsymbol{p}})=-\hat{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{R}^{-1}(\delta\dot{\boldsymbol{p}})\tag{14}$$

联系式(11)和式(13)可得

$$\widehat{\delta\boldsymbol{\omega}}=-\hat{\boldsymbol{\Sigma}}\hat{\boldsymbol{\omega}}+\dot{\hat{\boldsymbol{\Sigma}}}+\hat{\boldsymbol{\omega}}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}=\dot{\hat{\boldsymbol{\Sigma}}}+[\hat{\boldsymbol{\omega}},\hat{\boldsymbol{\Sigma}}]\tag{15}$$

即 $\delta\boldsymbol{\omega}=\dot{\boldsymbol{\Sigma}}+\hat{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\Sigma}$。联立式(12)和式(14)可得

$$\delta\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{\gamma}}+\hat{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\gamma}+\hat{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{\Sigma}\tag{16}$$

有

$$\begin{aligned}&\delta\int_a^b L(\boldsymbol{p},\boldsymbol{v},\boldsymbol{R},\boldsymbol{\omega})\mathrm{d}t=\delta\int_a^b\Big[\frac{1}{2}\langle\boldsymbol{M}\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle+\frac{1}{2}\langle\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega}\rangle-\Pi(\boldsymbol{p},\boldsymbol{R})\Big]\mathrm{d}t=\\&\int_a^b\left[\langle\boldsymbol{M}\boldsymbol{v},\delta\boldsymbol{v}\rangle+\langle\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega},\delta\boldsymbol{\omega}\rangle-\left\langle\frac{\partial\Pi}{\partial\boldsymbol{p}},\delta\boldsymbol{p}\right\rangle-\left\langle\frac{\partial\Pi}{\partial\boldsymbol{R}},\delta\boldsymbol{R}\right\rangle\right]\mathrm{d}t=\\&\int_a^b\left[\langle\boldsymbol{M}\boldsymbol{v},\dot{\boldsymbol{\gamma}}+\hat{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\gamma}+\hat{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{\Sigma}\rangle+\langle\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega},\dot{\boldsymbol{\Sigma}}+\hat{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\Sigma}\rangle-\left\langle\frac{\partial\Pi}{\partial\boldsymbol{p}},\boldsymbol{R}\boldsymbol{\gamma}\right\rangle-\left\langle\frac{\partial\Pi}{\partial\boldsymbol{R}},\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}\right\rangle\right]\mathrm{d}t=\\&\int_a^b\left[\left\langle-\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{v}}-\hat{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}-\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\frac{\partial\Pi}{\partial\boldsymbol{p}},\boldsymbol{\gamma}\right\rangle-\frac{1}{2}\left\langle(\widehat{\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}+\hat{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega}+\hat{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}})+2\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\frac{\partial\Pi}{\partial\boldsymbol{R}},\hat{\boldsymbol{\Sigma}}\right\rangle\right]\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{17}$$

式(17)推导中用到了如下关系式:

$$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{1}{2}\langle\hat{\boldsymbol{a}},\hat{\boldsymbol{b}}\rangle,\ \forall\,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^3$$

考虑到 $\boldsymbol{\gamma}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的任意性以及 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ 的斜对称性,将式(17)代入式(10)易得式(7)。证毕。

评论 3 命题 1 式(7)给出了空间刚体的平动和转动方程,其依赖于体坐标系的选择,在选择非质心位置时,平动和转动不再相互独立,不能用式(7)描述刚体动力学特性。

评论 4 当 $\boldsymbol{M}=m\boldsymbol{I}_3$ 时,式(7)的第 2 个表达式可化简为 $\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}=-\hat{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega}+\mathcal{M}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{R})+\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\tau}$,此时式(7)等价于 Newton-Euler 方程[11]。

命题 2(含势能函数的 Euler-Poincaré 方程) 记 $\Xi(G,\mathbb{I},\Pi,b,f)$ 表示如定义 2 所述的力学控制系统,G 为一矩阵 Lie 群,$g(t)\in G$,曲线 $\xi(t)\in\mathfrak{g}$ 满足 $\dot{g}=g\xi$,泛函 $L=l(\xi)-\Pi(g)$ 为 Lagrange 算子,$l(\xi)=\langle\mathbb{I}\,\xi,\xi\rangle/2$ 为左不变动能,那么该系统的运动方程为

$$\dot{g}=g\xi\tag{18}$$

$$\mathbb{I}\,\dot{\xi}=\mathrm{ad}_{\xi}^{*}\ \mathbb{I}\,\xi-g^{*}\,\mathrm{d}\Pi+b(g,\xi)+f \tag{19}$$

证明 系统$\Xi(G,\mathbb{I},f)$的 Lagrange 函数为

$$L=l(\xi)-\Pi(g)=\frac{1}{2}\langle\mathbb{I}\,\xi,\xi\rangle-\Pi(g)$$

式中：$l(\xi)$ 为左不变动能，且

$$\frac{\delta l}{\delta\xi}=\frac{\partial l}{\partial\xi}=\mathbb{I}\,\xi \tag{20}$$

记 $g(t)$ 的变分为 $g_{\varepsilon}(t)$，则 $\xi_{\varepsilon}(t)=g_{\varepsilon}^{-1}(t)\dot{g}_{\varepsilon}(t)$ 为 $\xi(t)$ 的变分，而 $g(t)$ 和 $\xi(t)$ 的极小变分分别为

$$\begin{cases}\delta g(t)=\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}g_{\varepsilon}(t)\in T_{g(t)}G\\ \delta\xi(t)=\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\xi_{\varepsilon}(t)\in\mathfrak{g}\end{cases}$$

定义 $\eta(t)=g^{-1}(t)\delta g(t)\in\mathfrak{g}$，则有

$$\delta\xi(t)-\dot{\eta}(t)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}[g_{\varepsilon}^{-1}(t)\dot{g}_{\varepsilon}(t)]-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[g^{-1}(t)\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}g_{\varepsilon}(t)\right]=\mathrm{ad}_{\xi(t)}\eta(t)$$

即 $\delta\xi(t)=\mathrm{ad}_{\xi(t)}\eta(t)+\dot{\eta}(t)$，其中 $\eta(t)$ 在端点处取零。因为 $F\cdot\delta g=f\cdot g^{-1}(t)\delta g(t)=f\cdot\eta$，故 Lagrange-d'Alembert 方程等价于

$$\delta\int_{a}^{b}L(g,\xi)\mathrm{d}t+\int_{a}^{b}(f+b)\cdot\eta(t)\mathrm{d}t=0 \tag{21}$$

运用变分 $\delta\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 的特性，有

$$\begin{aligned}&\delta\int_{a}^{b}L(g,\xi)\mathrm{d}t=\delta\int_{a}^{b}l(\xi)\mathrm{d}t-\delta\int_{a}^{b}\Pi(g)\mathrm{d}t=\\&\int_{a}^{b}\frac{\delta l}{\delta\xi}\cdot\delta\xi(t)\mathrm{d}t-\int_{a}^{b}\frac{\delta\Pi}{\delta g}\cdot\delta g(t)\mathrm{d}t=\\&\int_{a}^{b}\frac{\delta l}{\delta\xi}(\dot{\eta}(t)+\mathrm{ad}_{\xi(t)}\eta(t))\mathrm{d}t-\int_{a}^{b}\frac{\delta\Pi}{\delta g}\cdot g\eta(t)\mathrm{d}t=\\&\int_{a}^{b}\left(\frac{\delta l}{\delta\xi}\dot{\eta}(t)+\frac{\delta l}{\delta\xi}\mathrm{ad}_{\xi(t)}\eta(t)\right)\mathrm{d}t-\int_{a}^{b}\left(g^{*}\ \frac{\delta\Pi}{\delta g}\eta(t)\right)\mathrm{d}t=\\&\int_{a}^{b}\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ \frac{\delta l}{\delta\xi}\eta(t)+\mathrm{ad}_{\xi(t)}^{*}\ \frac{\delta l}{\delta\xi}\eta(t)\right)\mathrm{d}t+\left[\frac{\delta l}{\delta\xi}\eta(t)\right]_{a}^{b}-\int_{a}^{b}\left(g^{*}\ \frac{\delta\Pi}{\delta g}\eta(t)\right)\mathrm{d}t=\\&\int_{a}^{b}\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ \frac{\delta l}{\delta\xi}+\mathrm{ad}_{\xi(t)}^{*}\ \frac{\delta l}{\delta\xi}-g^{*}\ \frac{\delta\Pi}{\delta g}\right)\eta(t)\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{22}$$

记余向量 $\mathrm{d}\Pi=\dfrac{\delta\Pi}{\delta g}\in T^{*}G$，并将式(20)和式(22)代入式(21)可得式(19)。

评论 5 式(19)形式紧凑简单，更具一般性，且不依赖于局部坐标系的选择。

5 应用实例

地表惯性系 $\mathcal{I}(O_{e}x_{e}y_{e}z_{e})$（或称惯性系）的原点 O_{e} 固定在地面某一点，$O_{e}x_{e}$ 处于地面内指向飞行航向，$O_{e}z_{e}$ 垂直于地面指向地心，$O_{e}y_{e}$ 垂直于平面 $O_{e}x_{e}z_{e}$，其指向满足右手定则。

体坐标系 $\mathcal{B}(Oxyz)$（或称固连坐标系）的原点 O 固定在无人飞行器上的某一点（如质心或形心），Ox 在飞行器的对称平面内并平行于飞行器的设计轴线指向前进方向，Oy 垂直于飞行器对称平面指向右方，Oz 在飞行器的对称平面内与 Ox 垂直指向机身下方。

5.1 四旋翼无人直升机建模

四旋翼无人直升机体坐标系$\mathcal{B}$的坐标原点O选在四旋翼的质心，其位形空间可由 SE(3) 群上的元素 g 表示，由式(6)可得四旋翼直升机的运动学方程

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{R}}=\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{\omega}}\\ \dot{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{v}\end{cases}$$

式中：$\boldsymbol{R}\in\mathrm{SO}(3)$为方向余弦矩阵；$\boldsymbol{p}$ 为四旋翼直升机体坐标系$\mathcal{B}$原点位置矢量在惯性系中的表示；$\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 分别为其角速度和线速度，均表示在体坐标系$\mathcal{B}$中。

四旋翼直升机的动能可表示为

$$K=\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega}+\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}$$

则惯性张量为$\mathbb{I}=\mathrm{diag}\{\boldsymbol{J},m\boldsymbol{I}_{3}\}$；而四旋翼直升机的势能为 $\Pi=-m\bar{g}\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_{3}$，其中 $\boldsymbol{e}_{3}=[0\quad0\quad1]^{\mathrm{T}}$，利用式(8)可知

$$\mathcal{U}=-\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\ \frac{\partial\Pi}{\partial\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}m\bar{g}\boldsymbol{e}_{3},\ \hat{\mathcal{M}}=0$$

式中：$\bar{g}$ 为重力加速度。故由式(7)可得四旋翼直升机的动力学方程为

$$\begin{cases}\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}=-\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\beta}(g,\xi)+\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{u})\\ m\dot{\boldsymbol{v}}=-\boldsymbol{\omega}\times m\boldsymbol{v}+m\bar{g}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_{3}+\boldsymbol{b}(g,\xi)+\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})\end{cases}$$

式中：$\boldsymbol{\beta}(g,\xi)$ 和 $\boldsymbol{b}(g,\xi)$ 分别为非保守力矩和力（包括气动和陀螺效应）[7,12-13]；$\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{u})$ 和 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})$ 分别为 4 个螺旋桨产生的控制力矩和总推力。

5.2 高空无人飞艇建模

考虑到高空飞艇质心位置常常随负载或飞行任务不同发生较大变化，而形心（浮心）位置相对

不变，故系$\mathcal{B}$的原点O选在飞艇的形心。考虑到命题1要求系$\mathcal{B}$原点O选在系统的质心位置，无法应用于飞艇建模，可选择命题2所给出的更一般的动力学方程对飞艇进行建模。

根据定义2，高空无人飞艇属于矩阵Lie群SE(3)上的一般力学控制系统，则$g\in \mathrm{SE}(3)$的矩阵表示为

$$g=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R} & \boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{0} & 1\end{bmatrix}$$

式中：$\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^3$为飞艇系$\mathcal{B}$原点位置矢量在惯性系中的表示。

$\hat{\xi}\in\mathfrak{se}(3)$的矩阵表示为

$$\hat{\xi}=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{\omega}} & \boldsymbol{v}\\ \boldsymbol{0} & 0\end{bmatrix}$$

式中：$\boldsymbol{\omega}$和$\boldsymbol{v}$分别为飞艇的角速度和艇系$\mathcal{B}$原点O线速度，均表示在系$\mathcal{B}$中。由式(18)可得飞艇的运动学方程，即

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{R}}=\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{\omega}}\\ \dot{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{v}\end{cases}$$

记$\boldsymbol{v}_C\in\mathbb{R}^3$为飞艇质心$C$的线速度，$\boldsymbol{J}_C$为飞艇关于质心的惯性矩阵并表示在系$\mathcal{B}$中，$\boldsymbol{r}\in\mathbb{R}^3$为质心在系$\mathcal{B}$中的位置矢量，则飞艇的动能为

$$K=\frac{1}{2}\langle m\boldsymbol{v}_C,\boldsymbol{v}_C\rangle+\frac{1}{2}\langle\boldsymbol{J}_C\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega}\rangle=$$
$$\frac{1}{2}m(\boldsymbol{v}+\hat{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{r})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{v}+\hat{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{r})+\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_C\boldsymbol{\omega}=$$
$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\omega} & \boldsymbol{v}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{J} & m\hat{\boldsymbol{r}}\\ -m\hat{\boldsymbol{r}} & m\boldsymbol{I}_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\omega}\\ \boldsymbol{v}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\langle\mathbb{I}\xi,\xi\rangle$$

式中：$\boldsymbol{J}\triangleq\boldsymbol{J}_C-m(\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}\boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}})$为飞艇关于形心$O$的惯性矩阵。

飞艇的势能为

$$\varPi=-(m-\rho V)\bar{g}\langle\boldsymbol{p},\boldsymbol{e}_3\rangle-m\bar{g}\langle\boldsymbol{r},\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_3\rangle$$

由式(8)可得

$$\begin{cases}\mathcal{U}=-\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\dfrac{\partial\varPi}{\partial\boldsymbol{p}}=-(m-\rho V)\bar{g}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_3\\ \hat{\mathcal{M}}=\left(\dfrac{\partial\varPi}{\partial\boldsymbol{R}}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\left(\dfrac{\partial\varPi}{\partial\boldsymbol{R}}\right)=\\ \qquad -m\bar{g}\boldsymbol{r}\boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}+m\bar{g}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\end{cases}$$

故有

$$\mathcal{M}=-m\bar{g}[\boldsymbol{r}(\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_3)^{\mathrm{T}}-(\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{r}]^{\vee}=$$
$$-m\bar{g}\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_3)$$

式中：符号$\vee$为符号$\wedge$的逆运算。

在矩阵乘法运算下，伴随算子可写成

$$\mathrm{ad}_\xi=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{\omega}} & \boldsymbol{0}\\ \hat{\boldsymbol{v}} & \hat{\boldsymbol{\omega}}\end{bmatrix},\ \mathrm{ad}_\xi^*=\mathrm{ad}_\xi^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}-\hat{\boldsymbol{\omega}} & -\hat{\boldsymbol{v}}\\ \boldsymbol{0} & -\hat{\boldsymbol{\omega}}\end{bmatrix}$$

则由式(19)可得飞艇的动力学方程为

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{J} & m\hat{\boldsymbol{r}}\\ -m\hat{\boldsymbol{r}} & m\boldsymbol{I}_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{\omega}}\\ \dot{\boldsymbol{v}}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{\omega}} & \hat{\boldsymbol{v}}\\ \boldsymbol{0} & \hat{\boldsymbol{\omega}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{J} & m\hat{\boldsymbol{r}}\\ -m\hat{\boldsymbol{r}} & m\boldsymbol{I}_3\end{bmatrix}\cdot$$
$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\omega}\\ \boldsymbol{v}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}(m-\rho V)\bar{g}\\ m\bar{g}\hat{\boldsymbol{r}}\end{bmatrix}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_3+\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}\\ \boldsymbol{b}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{\tau}\\ \boldsymbol{T}\end{bmatrix}$$

式中：$\boldsymbol{\beta}$和$\boldsymbol{b}$分别为非保守力矩和力(包括气动和附加惯性力)[14-16]；$\boldsymbol{\tau}$和$\boldsymbol{T}$分别为舵和螺旋桨产生的控制力矩和总推力。

6 结 论

基于几何力学中关于一类简单力学控制系统(即Lagrange算子$L=l(\xi)$为左不变的)的Euler-Poincaré方程，针对一类不属于左不变力学系统的动力学描述问题，给出了关于矩阵Lie群SE(3)上一般力学控制系统的数学定义，并推导了适用于描述此类系统的动力学方程，特点如下：

1) 具有矩阵Lie群结构的力学控制系统运动方程简单，且表示在体坐标系中。

2) 含势能函数的Euler-Poincaré方程描述具有全局性，不依赖于局部坐标的选择。

3) 对于受到非保守力及势能影响的无人飞行器等力学控制系统，均可采用文中的命题结论直接获得系统的动力学描述。

致 谢

感谢夏威夷大学(University of Hawaii at Mānoa) Nikolaj NORDKVIST以及北京航空航天大学第七研究室霍伟教授对本文工作的帮助。

参 考 文 献

[1] Arnold B И. Mathematical methods of classical mechanics. Qi M Y, translated. Beijing: Higher Education Press, 2006. (in Chinese)
B И 阿诺尔德. 经典力学的数学方法. 齐民友, 译. 北京: 高等教育出版社, 2006.

[2] Bullo F, Lewis A D. Geometric control of mechanical systems—modeling, analysis, and design for simple mechanical control systems. New York: Springer, 2004.

[3] Martínez S, Cortés J, Bullo F. A catalog of inverse-kinematics planners for underactuated systems on matrix groups. IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, 2003: 625-630.

[4] Bullo F, Leonard N E, Lewis A D. Controllability and motion algorithms for underactuated Lagrangian systems on Lie groups. IEEE Transactions on Automatic Control, 2000, 45(8): 1437-1454.

[5] Nordkvist N. Motion control along relative equilibria. Denmark: Department of Mathematics, Technical University of Denmark, 2008.

[6] Nordkvist N, Sanyal A. A Lie group variational integrator for rigid body motion in SE(3) with applications to underwater vehicle dynamics. 49th IEEE Conference on Decision and Control, 2010: 5414-5419.

[7] Lee T, Leok M, McClamroch N H. Geometric tracking control of a quadrotor UAV on SE(3). 49th IEEE Conference on Decision and Control, 2010: 5420-5425.

[8] Frazzoli E. Robust hybrid control for autonomous vehicle motion planning. Cambridge: Department of Aeronautics and Astronautics, Massachusetts Institute of Technology, 2001.

[9] Marsden J, Ratiu T. Introduction to mechanics and symmetry—a basic exposition of classical mechanical systems. 2nd ed. New York: Springer, 1999: 1-9.

[10] Kallem V, Chang D E, Cowan N J. Task-induced symmetry and reduction with application to needle steering. IEEE Transactions on Automatic Control, 2010, 55(3): 664-673.

[11] Zuo Z, Zhu M, Wu Y, et al. Modeling, stability analysis and simulation of a stratosphere hybrid tethered platform. AIAA-2011-6316, 2011.

[12] Zuo Z. Trajectory tracking control design with command-filtered compensation for a quadrotor. IET Control Theory and Applications, 2010, 4(11): 2343-2355.

[13] Huang M, Xian B, Diao C, et al. Adaptive tracking control of underactuated quadrotor unmanned aerial vehicles via backstepping. American Control Conference, 2010: 2076-2081.

[14] Azinheira J, Moutinho A, de Paiva E C. Airship hover stabilization using a backstepping control approach. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2006, 29(4): 903-914.

[15] Li Y, Nahon M, Sharf I. Dynamics modeling and simulation of flexible airships. AIAA Journal, 2009, 47(3): 592-605.

[16] Bestaoui Y. A Lagrangian approach to modeling of an airship with wind and varying mass effects. AIAA-2010-40, 2010.

作者简介:

左宗玉 男,博士,讲师。主要研究方向:无人飞行器控制理论与应用。

Tel: 010-82338049

E-mail: zzybobby@buaa.edu.cn

Kinematic Description of a General Mechanical Control System on SE(3) and Aircraft Modeling

ZUO Zongyu[1,2,*]

1. The Seventh Research Division, Beihang University, Beijing 100191, China

2. Science and Technology on Aircraft Control Laboratory, Beihang University, Beijing 100191, China

Abstract: Unlike simple mechanical control systems on a Lie group, a general mechanical control system on a Lie group includes a variable potential in configuration space, which makes it impossible for the Lagrangian of such a system to be left-invariant. This means, by definition, that the Euler-Poincaré equation cannot be applied directly to such a system. This paper first introduces the mathematical definitions of a general mechanical control system on matrix Lie group SE(3). Secondly, by redefining the Lagrangian of left-invariant kinematic energy minus potential energy, a modified Euler-Poincaré equation involving a potential function is deduced and obtained based on the continuous Lagrange-d'Alembert principle to describe the dynamics of the general mechanical control systems on SE(3). Finally, two applications of modeling an unmanned quadrotor and an unmanned airship are presented to verify the proposed approach.

Key words: general mechanical control system; matrix Lie group; left-invariant; Euler-Poincaré equation; quadrotor; airships

Received: 2011-10-13; **Revised**: 2011-11-08; **Accepted**: 2011-12-16; **Published online**: 2011-12-31 14:07

URL: www.cnki.net/kcms/detail/11.1929.V.20111231.1407.006.html

Foundation item: National Natural Science Foundation of China (61074010)

* **Corresponding author.** Tel.: 010-82338049 E-mail: zzybobby@buaa.edu.cn