

面内轨道转移过程中的绳系系统摆振特性研究

孙亮, 赵国伟*, 黄海, 朱鸥宁

北京航空航天大学 宇航学院, 北京 100191

摘要: 轨道转移过程中的绳系系统处于非开普勒轨道, 导致系统呈现复杂的动力学行为并影响着星体的飞行安全, 因此研究系统摆振特性具有重要的理论和实际意义。针对复杂的非线性和强耦合问题, 利用动量定理建立绳系系统姿态动力学方程, 以切向常值加速度轨道转移为任务背景, 给出了系统质心运动轨迹; 通过分析面内摆角的静态分岔现象, 推导了面内、面外摆角的一阶摆动解析解; 引入经典的珠点模型, 研究系绳纵向和横向的振动特性, 并分析了系绳摆动与系绳振动之间的耦合关系。仿真结果表明: 面内轨道转移过程中, 面内、面外摆角以固定的频率绕平衡位置做往返摆动, 摆动频率大小以及平衡位置的变化均与系绳长度、推力加速度和所处轨道密切相关, 面内摆角摆动频率接近轨道角频率时会引起共振现象, 系绳在轨道转移过程中会出现大幅度横向振动等现象。

关键词: 绳系系统; 轨道转移; 动力学; 摆振特性; 常值推力

中图分类号: V412.4

文献标识码: A

绳系系统是航天工程中的一项新兴技术, 具有广泛的用途和应用前景, 尤其在深空、近地空间、地球大气以及地球表面环境探测等方面具有不可忽视的潜在价值。加拿大空间局于 1995 年开展了 OEDIPUS-C 计划^[1-2], 利用绳系系统观测电离层数据, 随后各国都相继开展了有关空间环境探测方面的绳系研究和实验。较为典型的绳系系统是由母星、探测器(子星)和系绳及其收放机构组成, 母星可利用收放机构控制探测器的距离, 同时对系绳的摆动进行抑制。随着任务的不断发展, 对探测器的需求也越来越高, 同一探测器需要在不同的轨道高度上进行探测, 因此仅利用系绳已无法满足任意轨道转移的需求, 而利用化学或电推进提供小常值连续推力, 从而实现绳系系统轨道平稳转移的技术可以满足多样化探测需求。

常值推力作用下的绳系系统是一种强时变非

线性系统。与经典绳系系统相比, 轨道转移过程中的系统摆角平衡位置随着时间发生变化, 其摆动特性及轨道变化所引起的摆动和振动耦合关系更为复杂, 因此对轨道转移过程中的绳系系统摆振特性进行研究对探测器的平稳转移具有重要的理论和实际意义。

对空间绳系系统摆动及振动的研究主要包括绳系回收或释放过程中的摆振特性分析^[3-4], 大气阻力、轨道因素以及电动力对系统摆振特性的影响^[5-8]等方面。非开普勒轨道绳系系统摆振特性的分析主要集中在电动力绳系系统研究上。例如: Mankala 和 Agrawal^[9]研究了赤道上柔性电动力系绳的平衡机动问题; Corsi 和 Iess^[10]对电动力绳系的稳定性和控制问题进行了研究; Fujii 等^[11]研究了电动力绳系系统卫星的横向传递波振动, 并研究了基于波吸收方法的振动控制; Ya-

收稿日期: 2011-09-05; 退修日期: 2011-10-10; 录用日期: 2011-11-07; 网络出版时间: 2011-12-14 08:57

网络出版地址: www.cnki.net/kcms/detail/11.1929.V.20111214.0857.001.html

基金项目: 中央高校基本科研业务费专项资金

* 通讯作者. Tel.: 010-82339067 E-mail: zhaoguwei@buaa.edu.cn

引用格式: Sun L., Zhao G W., Huang H., et al. Analysis of librational and vibrational characteristics for tethered systems during orbital transfer in plane. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2012, 33(7): 1245-1254. 孙亮, 赵国伟, 黄海, 等. 面内轨道转移过程中的绳系系统摆振特性研究. *航空学报*, 2012, 33(7): 1245-1254.

maigiwa 等^[12]研究了椭圆轨道上电动力绳系系统的动力学行为,分析了系绳动力学特性随着球体质量以及系绳长度的变化情况。与电动力绳系离轨不同,绳系拖拽中的轨道转移采用化学或电推进作为强制推进力,因此系统受到的不再是系绳分布力而是集中力。此外,化学推进力与电动力相比量级要大很多,方向也可以进行调节。文献[13]提出了连续常值推力绳系系统的轨道转移策略和基于系绳张力系统的摆振抑制策略。

本文基于绳系系统姿态动力学和质心运动轨迹,推导了平面切向连续常值小推力作用下的系统摆角一阶摆动解析解,分析了绳系系统的摆动特性。引入经典珠点模型,研究了系绳纵向和横向的振动特性,分析了系绳摆动与系绳振动之间的耦合关系。

1 绳系系统建模

1.1 哑铃模型

针对所研究问题的特殊性,结合国内外研究资料,采用哑铃模型^[14]分析系统摆动特性,并作出如下合理性假设:

- 1) 将母星和子星均视为质点。
- 2) 将系绳视为无拉伸、无压缩和无弯曲变形的理想直杆,且不考虑其质量和阻尼特性。
- 3) 系统质心始终处于平面内非开普勒轨道上。
- 4) 不考虑空间摄动的影响。

如图1所示,母星的质量为 M ,子星质量为 m ,系绳长度为 L ,且绳长不发生变化,系统质心为 O ,母星指向子星的单位矢量为 l 。母星受到平面连续推力 F 的作用,使得系统质心 O 运行在平面非开普勒轨道上。

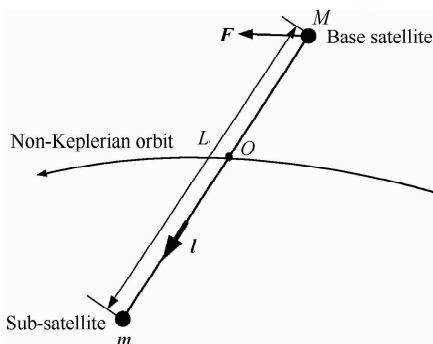


图1 绳系系统哑铃模型描述

Fig. 1 Description of a dumbbell modeled tethered system

此时,垂直于系绳方向且通过质心的系统转动惯量 I 可以写为

$$I = \frac{Mm}{M+m}L^2 \quad (1)$$

1.2 姿态动力学

定义质心赤道惯性坐标系 $Ex'y'z'$: 坐标原点 E 在地球中心, x' 轴沿地球赤道面和黄道面的交线指向春分点, z' 轴指向北极, y' 轴由右手法则确定。根据动量矩定理,绳系系统姿态动力学方程可以写为

$$\frac{d\mathbf{H}_O}{dt} = \mathbf{M}_O + \mathbf{M}_F \quad (2)$$

式中: \mathbf{M}_O 和 \mathbf{M}_F 分别为重力梯度力矩和连续推力力矩; \mathbf{H}_O 为绳系系统的角动量,可以表示为 $\mathbf{H}_O = \bar{\mathbf{I}}_O \times \boldsymbol{\omega}$, $\bar{\mathbf{I}}_O$ 为中心惯性张量, $\boldsymbol{\omega}$ 为角速度矢量, $\boldsymbol{\omega}$ 可表示为

$$\boldsymbol{\omega} = l \times \dot{l} \quad (3)$$

式中: \dot{l} 为矢量 l 在惯性坐标系下的一阶导数。

由于 $\boldsymbol{\omega} = l \times \dot{l}$ 指向主惯量方向,则绳系系统角动量为

$$\mathbf{H}_O = \bar{\mathbf{I}}_O \times \boldsymbol{\omega} = I(l \times \dot{l}) \quad (4)$$

因此,式(2)可以转化为

$$l \times \ddot{l} = (\mathbf{M}_O + \mathbf{M}_F)/I \quad (5)$$

式中: \ddot{l} 为矢量 l 在惯性坐标系下的二阶导数。

定义绳系系统轨道坐标系 $Oxyz$: 以系统质心 O 为原点, z 轴指向地心方向, x 轴在轨道面内与 z 轴垂直,且沿着轨道极角增大的方向, z 轴与 x 轴和 y 轴成右手坐标系,其坐标单位矢量为 (i, j, k) 。绳系系统面内、面外摆角 θ 和 ϕ 由矢量 l 在轨道坐标系下的投影进行定义,如图2所示,矢量 l 表示为

$$l = i \cos \phi \cos \theta - j \sin \phi + k \cos \phi \sin \theta \quad (6)$$

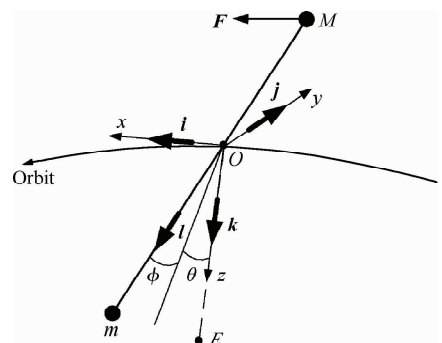


图2 轨道坐标系和绳系系统姿态

Fig. 2 Orbital frame and attitude of the tethered system

矢量 l 在惯性坐标系下的二阶导数可表示为

$$\ddot{i} = l'' + \alpha_o \times l + 2\omega_o \times l' + \omega_o \times (\omega_o \times l) \quad (7)$$

式中: l' 和 l'' 为矢量 l 在轨道坐标系下的一阶导数和二阶导数; $\omega_o = -\dot{u}j$ 为轨道坐标旋转角速度, u 为面内轨道极角; $\alpha_o = -\ddot{u}j$ 为轨道坐标旋转角加速度。

式(5)可以转化为

$$l \times l'' = (M_o + M_F)/I - l \times (\alpha_o \times l) + 2(\omega_o \cdot l) \times l' - (l \times \omega_o)(l \cdot \omega_o) \quad (8)$$

重力梯度力矩 M_o 可以表示为

$$M_o \approx (3\mu/r^3)k \times (\bar{I}_o \cdot k) = (3\mu/r^3)I(l \times k)(l \cdot k) \quad (9)$$

式中: r 为轨道向径; μ 为地球引力常数。

连续推力力矩 M_F 可以表示为

$$M_F = -Lm(M+m)^{-1}F \times l \quad (10)$$

1.3 质心运动轨迹

如图3所示,平面切向连续常值小推力可以有效地实现两个圆轨道之间的转移,适合空间探测器轨道转移的任务需求。因此,本文将研究切向连续常值小推力作用下的绳系系统摆振特性,并假设初始时刻系统质心处于圆轨道上。

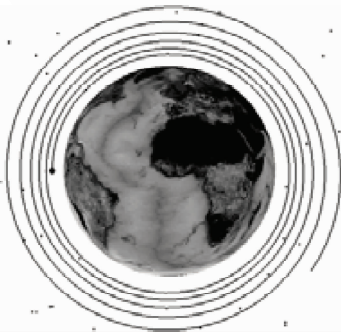


图3 切向小推力作用下的系统质心运动轨迹

Fig. 3 Trajectory of the center of mass under a small, continuous, constant thrust in tangential direction

施加于母星上的连续常值小推力 F 沿质心切向运动方向,对系统质心造成的切向加速度 f_t 为

$$f_t = F(M+m)^{-1} = if_t \cos \gamma - kf_t \sin \gamma \quad (11)$$

式中: f_t 为切向加速度大小; γ 为切向加速度 f_t 与周向分量 f_u 间的夹角,称为飞行方向角,如图4所示。

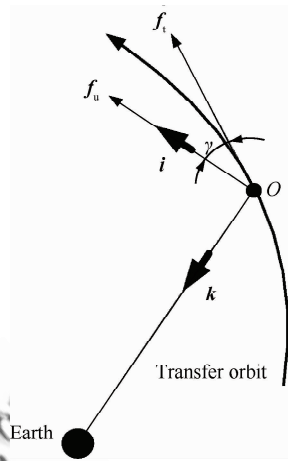


图4 加速度分量描述

Fig. 4 Description of the components of thrust acceleration

系统质心在切向加速度 f_t 作用下的轨迹运动方程为

$$\frac{dv}{dt} = f_t - \frac{\mu}{r^2} \sin \gamma, \quad \frac{v^2}{\rho_r} = \frac{\mu}{r^2} \cos \gamma \quad (12)$$

式中: v 为轨道速度; ρ_r 为飞行路径曲率半径。

当停泊初始轨道为近圆轨道,且极角 $u < 2n\pi$ (n 为不大的正整数)时,可以得到时间 t 和轨道向径 r 关于极角 u 的近似式^[15]:

$$t \approx \frac{1}{\omega} \left[u + \frac{f_t}{2\omega^2 r_0} (3u^2 + 8\cos u - 8) \right] \quad (13)$$

$$r \approx r_0 \left[1 + \frac{2f_t}{\omega^2 r_0} (u - \sin u) \right] \quad (14)$$

式中: r_0 为初始圆轨道向径; ω 为初始轨道角速度,且 $\omega = \sqrt{\mu/r_0^3}$ 。

通过对式(13)和式(14)的处理,得到轨道向径 r 、轨道极角 u 和飞行方向角 γ 关于 t 的表达式为

$$u \approx u_0 + \omega t - \frac{3f_t t^2}{2r_0} - \frac{4f_t}{\omega^2 r_0} \cos \omega t + \frac{4f_t}{\omega^2 r_0} \quad (15)$$

$$r \approx r_0 + \frac{2f_t t}{\omega} - \frac{2f_t}{\omega^2} \sin \omega t \quad (16)$$

$$\gamma \approx \frac{2f_t}{\omega^2 r_0} - \frac{2f_t}{\omega^2 r_0} \cos \omega t \quad (17)$$

2 系绳摆动特性

2.1 一阶摆动解析解

根据式(8)和式(11),得到关于面内、面外摆

角 θ 和 ϕ 的微分方程为

$$\ddot{\theta} = -\frac{f_u \cos(\theta - \gamma)}{L^* \cos \phi} - 3\mu r^{-3} \cos \theta \sin \theta - 2(\dot{u} - \dot{\theta})\dot{\phi} \tan \phi + \ddot{u} \quad (18)$$

$$\ddot{\phi} = \left[\frac{f_u \sin(\theta - \gamma)}{L^*} - 3\mu r^{-3} \cos^2 \theta \cos \phi - (\dot{u} - \dot{\theta})^2 \cos \phi \right] \sin \phi \quad (19)$$

式中: $L^* = LM(M+m)^{-1}$ 。

式(19)存在 $\phi \equiv 0$ 的平衡位置且不存在自激,因而在小角度面外摆动过程中,面外摆角与面内摆角间的耦合性极小。此外,式(18)中含有飞行方向角 γ ,由此很难得到关于摆角 θ 在各个时刻平衡位置的精确解。然而,从式(17)中可知 γ 具有周期性,当小推力作用下飞行方向角的量级很小时,摆角 θ 出现静态分岔现象且奇点及其性态可以近似参考系统初始时刻的状态,此时飞行方向角 γ 为 0,如表 1 所示。

表 1 初始时刻奇点性态

Table 1 Property of singular point at initial state

$ f_t $	Singular	Property
$(0, 3\mu r^{-3} L^*)$	$\pm \pi/2$	Saddle point
	$-\alpha, \pi + \alpha$	Stable center
$(3\mu r^{-3} L^*, +\infty)$	$f_t f_t ^{-1} \pi/2$	Saddle point
	$-f_t f_t ^{-1} \pi/2$	Stable center

Note: $\alpha = \arcsin[f_t r^3 (3\mu L^*)^{-1}]$

考虑转移过程中奇点的性态和轨道向径的漂移,并定义无量纲参数 $k_t = f_t r_0^3 (3\mu L^*)^{-1}$ 为推进系数,可得到面内、面外摆角的一阶摆动解析解为:

若 $|k_t| \leq 1$, 则

$$\theta \approx a_\theta \cos(\omega t \sqrt{3 - 3k_t^2} + \varphi_\theta) - \frac{\pi}{2} \mp \frac{\pi}{2} \pm \arcsin k_t \pm \frac{f_t}{r_0} \cdot \frac{6k_t}{\omega^2 \sqrt{1 - k_t^2}} (\omega t - \sin \omega t) - \frac{f_t}{r_0} \left[\frac{1 - 2k_t^2}{(1 - k_t^2)\omega^2} - \frac{2}{\omega^2} \cos \omega t \right] \quad (20)$$

$$\phi \approx a_\phi \cos(2\omega t + \varphi_\phi) \quad (21)$$

若 $|k_t| > 1$, 则

$$\theta \approx a_\theta \cos(\omega t \sqrt{3(|k_t| - 1)} + \varphi_\theta) - \frac{\pi}{2} f_u |f_u|^{-1} + \gamma - \frac{f_t}{r_0} \left[\frac{1}{(1 - |k_t|)\omega^2} + \frac{4}{(3|k_t| - 4)\omega^2} \cos \omega t \right] \quad (22)$$

$$\phi \approx a_\phi \cos(\omega t \sqrt{3|k_t| + 1} + \varphi_\phi) \quad (23)$$

式中: a_θ 和 a_ϕ 分别为摆角 θ 和 ϕ 一阶解析解中通解的幅值; φ_θ 和 φ_ϕ 分别为摆角 θ 和 ϕ 一阶解析解中通解的相位。

2.2 数值仿真及分析

为了便于分析绳系系统的摆振特性,且不失一般性,假设绳系系统中母星的质量远大于子星质量,即 $M \gg m$,则系统质心位于母星上。绳系系统初始时刻位于轨道向径 $r_0 = 7000$ km 的圆轨道上,受到的切向加速度大小为 $f_t = 0.004$ m/s²。令 ω_θ 和 ω_ϕ 为面内、面外摆角 θ 和 ϕ 的摆动频率,则系绳长度 L 和推进系数 k_t 与摆动频率 ω_θ 和 ω_ϕ 的关系如图 5 和图 6 所示。

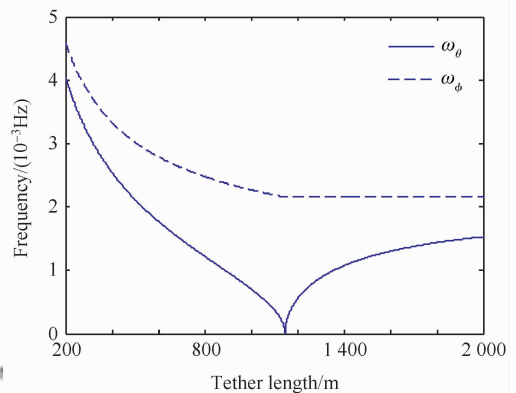


图 5 绳长与摆动频率的关系曲线

Fig. 5 Relationship between the tether length and the vibration frequencies of the librational angles

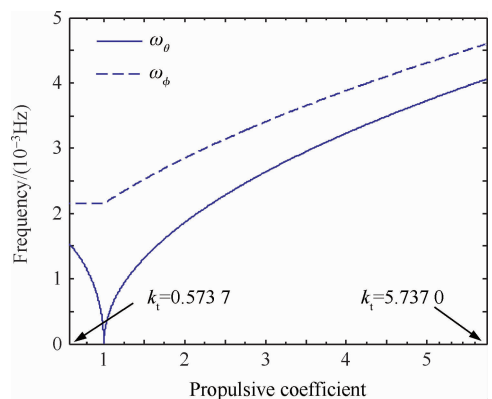


图 6 推进系数与摆动频率的关系曲线

Fig. 6 Relationship between the propulsive coefficient and the vibration frequencies of the librational angles

当系绳长度较短 ($k_t > 1$) 时,面内、面外摆角的摆动频率较大,面内、面外摆角的近似平衡位置分别在 -90° 和 0° ,如图 7 所示;当绳长 L 增加并接近 $f_t \mu^{-1} r_0^3/3$ 处 ($k_t = 1$) 时,面内、面外摆角摆动频率 ω_θ 和 ω_ϕ 分别减小到 0 和 2ω ,平衡位置不变;当绳长 L 继续增加 ($k_t < 1$) 时,面内摆动频率 ω_θ 继续增加并趋于 $\sqrt{3}\omega$,然而,面外摆动频率 ω_ϕ 始终保持在 2ω 左右,面内摆角平衡位置由 -90° 向两侧漂移且呈对称,面外摆角平衡位置始终不变。

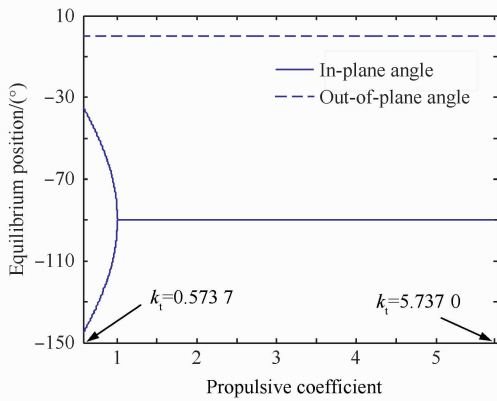


图 7 推进系数与平衡位置的关系曲线

Fig. 7 Relationship between the propulsive coefficient and the equilibrium position of the librational angles

为了对摆振特性进行分析和对比,分别在静态分岔点的左右两侧取不同的两组系统参数:①系绳长度 $L = 200$ m,面内、面外摆角 θ 和 ϕ 分别为 -89.9° 和 1° ;②系绳长度 $L = 2\ 000$ m,面内、面外摆角 θ 和 ϕ 分别为 -36° 和 1° 。基于哑铃模型的仿真结果如图 8~图 12 所示。

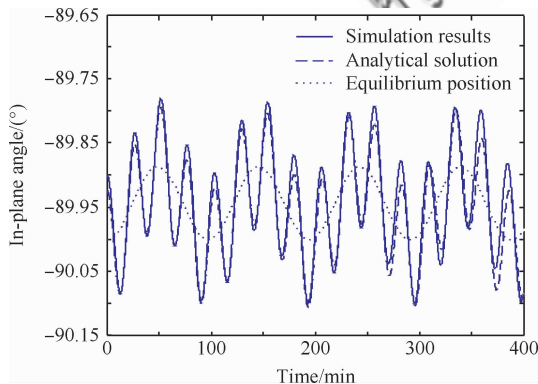


图 8 $k_t > 1$ 时的面内摆角曲线图(哑铃模型)

Fig. 8 Curves of in-plane angle when $k_t > 1$ (dumbbell model)

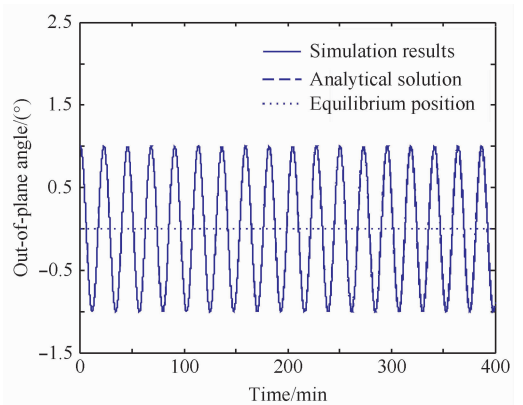


图 9 $k_t > 1$ 时的面外摆角曲线图(哑铃模型)

Fig. 9 Curves of out-of-plane angle when $k_t > 1$ (dumbbell model)

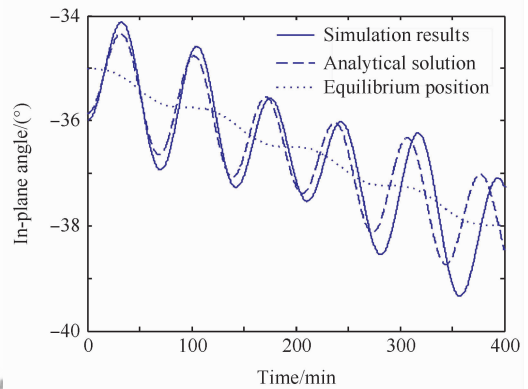


图 10 $k_t < 1$ 时的面内摆角曲线图(哑铃模型)

Fig. 10 Curves of in-plane angle when $k_t < 1$ (dumbbell model)

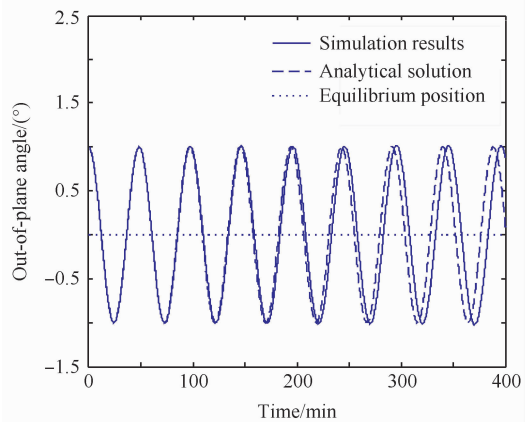
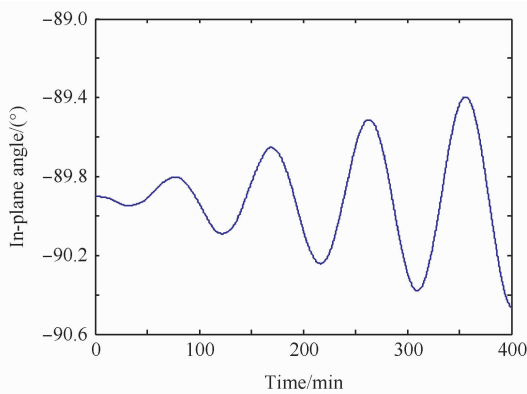


图 11 $k_t < 1$ 时的面外摆角曲线图(哑铃模型)

Fig. 11 Curves of out-of-plane angle when $k_t < 1$ (dumbbell model)

图 12 ω_b 接近 ω 时面内摆角摆动曲线Fig. 12 Pendular motion curves of the in-plane angle as ω_b approaches ω

当系绳长度 $L=200$ m 时, 则 $k_t > 1$, 面内摆角 θ 以固定频率绕着平衡位置做正弦摆动, 其平衡位置在 -90° 附近且与 $-90^\circ + \gamma$ 相一致, 这与表 1 和式(22)的分析及推导一致。与此同时, 面外摆角 ϕ 也始终做等幅正弦摆动, 仿真结果与一阶解析式曲线基本吻合。当系绳长度 $L=2\ 000$ m 时, 则 $k_t < 1$, 面内摆角 θ 会出现两个平衡位置, 对称分布在 -90° 两侧。根据上述仿真参数, 获得图 10 的仿真结果, 面内摆角 θ 沿着 $-\alpha$ 角度对应的平衡位置做正弦摆动, $-\alpha$ 会因轨道向径漂移而发生改变, 而面外摆角 ϕ 绕着 0° 以固定频率做等幅正弦摆动。从图 8 中可以看出, 轨道机动的前几圈内仿真结果与一阶解析式曲线较为一致, 而后几圈中由于轨道向径的漂移作用使得摆动频率不再为固定值, 而解析式中只考虑了轨道向径漂移带来的平衡位置漂移因素, 因此解析式与仿真结果存在了一定的滞后现象, 该现象在 $k_t < 1$ 时较为明显。此外, 面内摆角的摆动频率 ω_b 接近 ω 时, 摆角 θ 会由于轨道周期的原因出现共振现象。取系绳长度 $L=860$ m, 此时频率接近轨道角频率, 则面内摆角的摆动曲线如图 12 所示。面内摆角随时间呈现发散现象, 此刻关于面内摆角的解析式中特解的幅值量级会非常大。

3 系绳摆振耦合分析

3.1 珠点模型

本文以处于低轨的用于空间环境探测的绳系系统为重点研究对象, 分析系绳的纵向和横向振动特性以及系绳振动与系绳摆动之间的影响关

系, 由此引入经典珠点模型。如图 13 所示, 假设母星质量远大于子星质量, 系统质心 O 集中在母星上且始终处于平面内非开普勒轨道上, 轨道坐标系 $Oxyz$ 的定义与哑铃模型中的坐标定义相同。线密度为 ρ 的系绳被分为相等的 N 段, 每段质量集中在珠点上, 第 N 个珠点是探测器质量和第 N 段系绳质量的总和, 珠点间由相连的无质量弹簧和阻尼器构成。

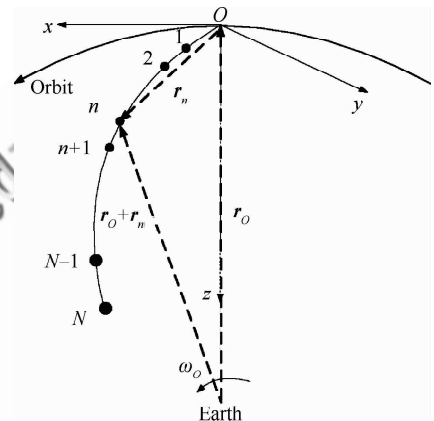


图 13 珠点模型

Fig. 13 Lumped mass model

从而珠点动力学的建模过程如下:

轨道角速度矢量为

$$\boldsymbol{\omega}_O = [0 \quad -\dot{u} \quad 0]^T \quad (24)$$

母星的位置矢量为

$$\boldsymbol{r}_O = [0 \quad 0 \quad -r]^T \quad (25)$$

第 n 段系绳的相对位置矢量为

$$\boldsymbol{l}_n = [l_n \sin \theta_n \cos \phi_n \quad -l_n \sin \phi_n \quad l_n \cos \theta_n \cos \phi_n]^T \quad (26)$$

式中: l_n 、 θ_n 和 ϕ_n 分别为第 n 段系绳的长度和面内、面外摆角。摆角定义与哑铃模型中的摆角定义相同。

第 n 个珠点的相对位置矢量为

$$\boldsymbol{r}_n = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{l}_i \quad (27)$$

则第 n 个珠点的加速度为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_n = & \frac{d^2(\boldsymbol{r}_O + \boldsymbol{r}_n)}{dt^2} = \boldsymbol{r}_O'' + \boldsymbol{r}_n'' + \\ & \boldsymbol{\omega}'_O \times (\boldsymbol{r}_O + \boldsymbol{r}_n) + 2\boldsymbol{\omega}_O \times (\boldsymbol{r}'_O + \boldsymbol{r}'_n) + \\ & \boldsymbol{\omega}_O \times [\boldsymbol{\omega}_O \times (\boldsymbol{r}_O + \boldsymbol{r}_n)] \end{aligned} \quad (28)$$

由系统受力平衡可得

$$\boldsymbol{a}_n = m_n^{-1} (\boldsymbol{F}_{G_n} + \boldsymbol{F}_{T_n}) \quad (29)$$

式中: m_n 为第 n 个珠点的质量; \boldsymbol{F}_{G_n} 和 \boldsymbol{F}_{T_n} 分别为第 n 个珠点受到的重力和系绳张力。

第 n 个珠点质量 m_n 又可以表示为

$$m_n = \begin{cases} \rho L/N & n = 1, 2, \dots, N-1 \\ m + \rho L/N & n = N \end{cases} \quad (30)$$

第 n 个珠点受到的重力梯度力 F_{G_n} 为

$$\mathbf{F}_{G_n} = -\frac{\mu m_n}{|\mathbf{r}_O + \mathbf{r}_n|^3} (\mathbf{r}_O + \mathbf{r}_n) \approx -\frac{\mu m_n}{|\mathbf{r}_O|^3} \left(\mathbf{r}_O + \mathbf{r}_n - \frac{3\mathbf{r}_O \cdot \mathbf{r}_n}{|\mathbf{r}_O|^2} \mathbf{r}_O \right) \quad (31)$$

第 n 个珠点受到的系绳张力 F_{T_n} 为

$$\mathbf{F}_{T_n} = \begin{cases} \mathbf{T}_{n+1} - \mathbf{T}_n & n \neq N \\ -\mathbf{T}_n & n = N \end{cases} \quad (32)$$

式中:第 n 段系绳的张力 T_n 可表示为

$$T_n = EA\epsilon_n l_n |\dot{l}_n|^{-1} + c_n \dot{l}_n \quad (33)$$

式中: E 为系绳弹性模量; A 为系绳横截面积; c_n 为第 n 段系绳的等效黏性阻尼系数,且 $c_n = 2\zeta \cdot \sqrt{m_n EANL^{-1}}$, ζ 为等效黏性阻尼比; ϵ_n 为第 n 段系绳的弹性形变,且

$$\epsilon_n = \begin{cases} Nl_n/L - 1 & \epsilon_n \geq 0 \\ 0 & \epsilon_n < 0 \end{cases} \quad (34)$$

由式(28)和式(29)可得

$$\begin{cases} \mathbf{l}_n'' + \boldsymbol{\omega}'_O \times \mathbf{l}_n + 2\boldsymbol{\omega}_O \times \mathbf{l}_n' = \left(\dot{u}^2 - \frac{\mu}{|\mathbf{r}_O|^3} \right) \mathbf{l}_n + \frac{\mu}{|\mathbf{r}_O|^3} \cdot \frac{3\mathbf{r}_O \cdot \mathbf{l}_n}{|\mathbf{r}_O|^2} \mathbf{r}_O + \mathbf{F}_{T_n}/m_n - \mathbf{F}_{T_{n-1}}/m_{n-1} & n > 1 \\ \left(\dot{u}^2 - \frac{\mu}{|\mathbf{r}_O|^3} \right) \mathbf{l}_n + \frac{\mu}{|\mathbf{r}_O|^3} \cdot \frac{3\mathbf{r}_O \cdot \mathbf{l}_n}{|\mathbf{r}_O|^2} \mathbf{r}_O + \mathbf{F}_{T_n}/m_n & n = 1 \end{cases} \quad (35)$$

3.2 数值仿真及分析

对于处于低轨的用于空间环境探测的绳系系统,质心处于轨道半径为 7 000 km 的圆轨上。探测器质量 m 为 50 kg,母星受到的切向加速度 $f_t = 0.004 \text{ m/s}^2$ 。系绳线密度 $\rho = 1 \text{ g/m}$,系绳的弹性模量 $E = 70 \text{ GPa}$,系绳截面积 $A = 6.94 \times 10^{-7} \text{ m}^2$,等效黏性阻尼比 $\zeta = 0.2$ 。由于面外摆角对面内摆动特性的影响非常小,因此在仿真过程中不考虑。取系绳原长为 200 m,系绳珠点数 $N = 20$,则绳段标称长度和质量分别为 10 m 和 10 g,在系统姿态处于稳定状态时,由系绳张力计算得到应变为 4.1×10^{-5} ,故初始时刻绳段长度 $l_n = (10 + 4.1 \times 10^{-5}) \text{ m}$,面内摆角 $\theta_n = -89.9^\circ$,则基

于珠点模型的仿真结果如图 14~图 17 所示。另取系绳原长为 2 000 m,系绳珠点数 $N = 20$,绳段标称长度和质量分别为 100 m 和 100 g,初始时刻绳段长度 $l_n = (100 + 7.2 \times 10^{-4}) \text{ m}$,应变的选取与上述方法相同,且面内摆角 $\theta_n = -36^\circ$,则仿真结果如图 18~图 21 所示。图中横向振动形态

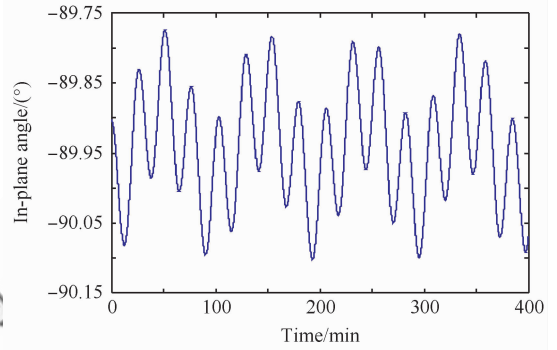


图 14 $k_t > 1$ 时的面内摆角曲线图(珠点模型)

Fig. 14 Curve of in-plane angle when $k_t > 1$ (lumped mass model)

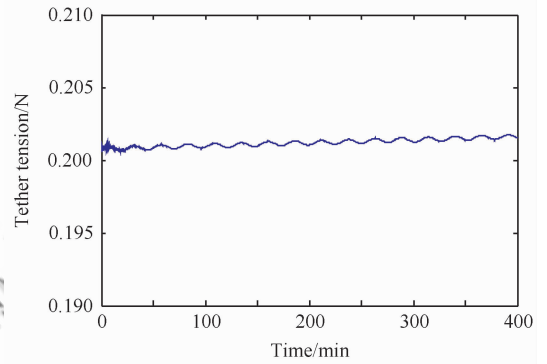


图 15 $k_t > 1$ 时的系绳张力曲线图(珠点模型)

Fig. 15 Curve of tether tension when $k_t > 1$ (lumped mass model)

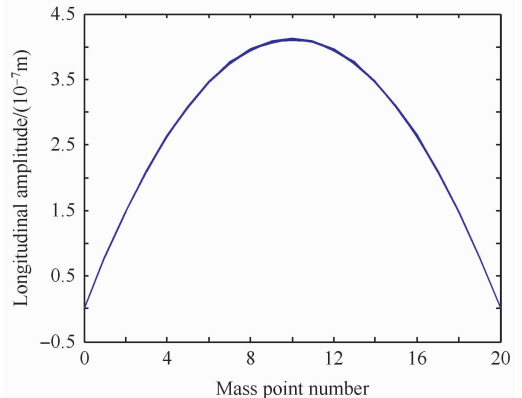
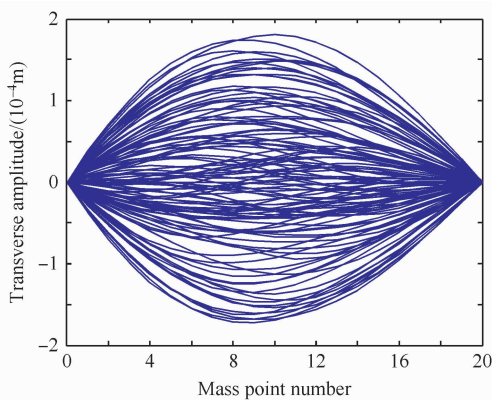
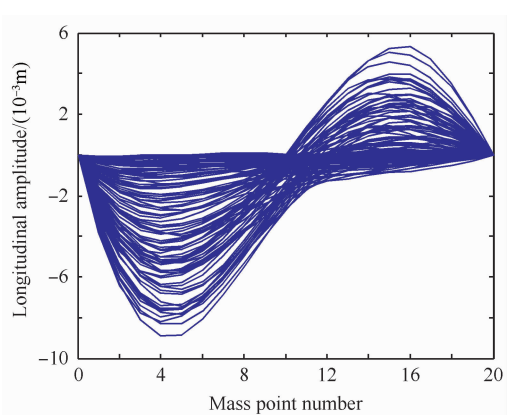
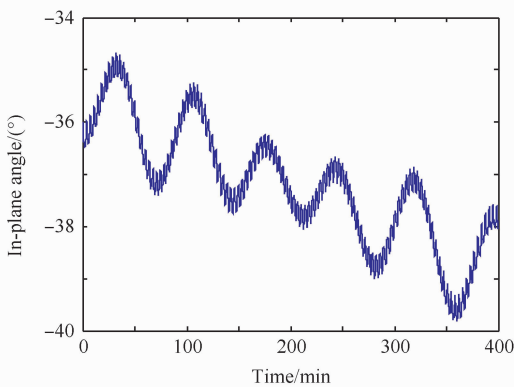
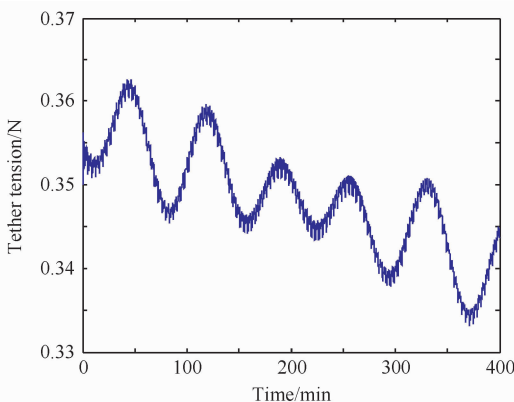
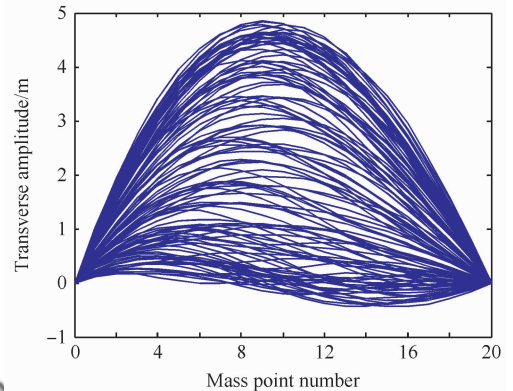


图 16 $k_t > 1$ 时的系绳纵向振动形态(珠点模型)

Fig. 16 Longitudinal vibration shape of tether when $k_t > 1$ (lumped mass model)

图 17 $k_t > 1$ 时的系绳横向振动形态(珠点模型)Fig. 17 Transverse vibration shape of tether when $k_t > 1$ (lumped mass model)图 20 $k_t < 1$ 时的系绳纵向振动形态(珠点模型)Fig. 20 Longitudinal vibration shape of tether when $k_t < 1$ (lumped mass model)图 18 $k_t < 1$ 时的面内摆角曲线图(珠点模型)Fig. 18 Curve of in-plane angle when $k_t < 1$ (lumped mass model)图 19 $k_t < 1$ 时的系绳张力曲线图(珠点模型)Fig. 19 Curve of tether tension when $k_t < 1$ (lumped mass model)

代表第 n 个珠点偏离纵向的横向位移,指向摆角正方向为正;纵向振动形态代表第 n 个珠点偏离系绳实际长度对应等分点的纵向位移,沿质心指向探测器方向为正。

图 21 $k_t < 1$ 时的系绳横向振动形态(珠点模型)Fig. 21 Transverse vibration shape of tether when $k_t < 1$ (lumped mass model)

对比图 14 与图 8 和图 18 与图 10,可以看出利用珠点模型仿真得到的系绳面内摆动特性与哑铃模型分析结果一致,验证了一阶摆动解析解的正确性。此外, $k_t > 1$ 时系绳较短,系绳质量相对于探测器较小,系绳振动及其对系绳摆动的影响很小,摆角曲线较为平滑,系绳张力较为稳定; $k_t < 1$ 时,系绳纵向振动较小,但横向振动显著,对摆动也有明显影响,图 18 摆角曲线上出现了高频摆动分量,张力曲线也表现为高频波动。

系绳振动形态也受到系绳摆动的影响, $k_t > 1$ 时平衡位置始终保持不变,系绳绕平衡位置摆动时,系绳横向振动形态对称,最大偏离值出现在系绳中点处,达 1.7×10^{-4} m。纵向振动的现象不明显,系绳中点处的偏离值始终保持在 4.1×10^{-7} m; $k_t < 1$ 时,由于轨道向径漂移,平衡位置

始终向同一方向变化,导致系绳的横向振动也始终偏于同一侧,最大偏离值出现在系绳中点处,且达到 5 m,而在系绳纵向振动形态中,中点处偏离值最小,1/4 点和 3/4 点处偏离值较大,达 8×10^{-3} m。

4 结 论

1) 轨道转移过程中,面内、面外摆角以固定频率绕平衡位置做正弦摆动。 $|k_t| > 1$ 时,面内、面外摆角的摆动频率随着推进系数 $|k_t|$ 的增加不断增大,面内、面外摆角平衡位置均保持不变; $|k_t| < 1$ 时,面内摆角摆动频率随着推进系数 $|k_t|$ 的增加不断向零点减小,而面外摆角的摆动频率始终保持在 2ω 左右,面内摆角的平衡位置随着时间推演不断向同一侧变化,面外摆角平衡位置不变。

2) 当绳系系统在平衡位置附近做小幅摆动时,若 $|k_t| > 1$,则系绳振动对摆动的影响很小,系绳横向振动形态对称,纵向振动不明显;若 $|k_t| < 1$,则系绳纵向振动较小,但横向振动显著,对摆动也有明显的影响,系绳的高频振动引起的耦合分量明显地叠加在摆角曲线上。

参 考 文 献

- [1] Tyc G, Han R P S. Attitude dynamics investigation of the OEDIPUS-A tethered rocket payload. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 1995, 32(1): 133-141.
- [2] Tyc G, Vigneron F R, Jablonski A M, et al. Flight dynamics results from the OEDIPUS-C tether mission. AIAA-1996-3573, 1996.
- [3] Krupa M, Poth W, Schagerl M. Modelling dynamics and control of tethered satellite systems. *Nonlinear Dynamics*, 2006, 43(1-2): 73-96.
- [4] Burov A A, Troger H. The relative equilibria of an orbital pendulum suspended on a tether. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2000, 64(5): 723-728.
- [5] Kuma K D. Review of dynamics and control of nonelectrodynamic tethered satellite systems. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 2006, 43(4): 705-720.
- [6] Cartmell M P, McKenzie D J. A review of space tether research. *Progress in Aerospace Sciences*, 2008, 44(1): 1-21.
- [7] Misra A K, Modi V J. Dynamic and control of tethered satellite system. *Acta Astronautica*, 2008, 63(11-12): 1169-1177.

- [8] Wen H, Jin D P, Hu H Y. Advances in dynamics and control of tethered satellite systems. *Acta Mechanica Sinica*, 2008, 24(3): 229-241.
- [9] Mankala K K, Agrawal S K. Equilibrium-to-equilibrium maneuvers of flexible electrodynamic tethers in equatorial orbits. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 2006, 43(3): 651-658.
- [10] Corsi J, Iess L. Stability and control of electrodynamic tethers for deorbiting applications. *Acta Astronautica*, 2001, 48(5-18): 491-501.
- [11] Fujii H A, Watanabe T, Taira W. An analysis of vibration and wave absorbing control of tether system. AIAA-2001-4003, 2001.
- [12] Yamaigawa Y, Hiragi E, Kishimoto T. Dynamic behavior of electrodynamic tether deorbit system on elliptical orbit and its control by Lorentz force. *Aerospace Science and Technology*, 2005(9): 366-373.
- [13] Sun L, Zhao G W, Huang H, et al. Tether-dragging maneuver strategy and tether control method. *Asia-Pacific International Symposium on Aerospace Technology*, 2010.
- [14] Peláez J, Andrés Y N. Dynamic stability of electrodynamic tethers in inclined elliptical orbits. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 2005, 28(4): 611-622.
- [15] Zhu R Z, Wang X G. Continuous constant thrust maneuver in polar coordinate system. *Spacecraft Engineering*, 2008, 17(2): 31-37.

作者简介:

孙亮 男, 博士研究生。主要研究方向: 航天器动力学与控制, 非线性系统控制。

Tel: 010-82339104

E-mail: sunliang@sa.buaa.edu.cn

赵国伟 男, 副教授。主要研究方向: 飞行器设计, 航天器结构机构动力学, 新概念空间平台。

Tel: 010-82339067

E-mail: zhaoguowei@buaa.edu.cn

黄海 男, 教授, 博士生导师。主要研究方向: 飞行器结构优化, 空间智能结构及其控制, 航天飞行器新概念。

Tel: 010-82316611

E-mail: hhuang@buaa.edu.cn

朱鸥宁 女, 硕士研究生。主要研究方向: 航天器动力学, 新概念飞行器。

Tel: 010-82339194

E-mail: zhuinbuaa@163.com

Analysis of Librational and Vibrational Characteristics for Tethered Systems During Orbital Transfer in Plane

SUN Liang, ZHAO Guowei^{*}, HUANG Hai, ZHU Ouning

School of Astronautics, Beihang University, Beijing 100191, China

Abstract: The center of mass of a tethered system is in a non-Keplerian orbit during orbital transfer, which leads to a complicated dynamic behavior of the system and affects the normal operation of the mission satellite. Thus, it is of great theoretical and practical significance to study the librational and vibrational characteristics of a tethered system. According to its complex nonlinear and strong coupling, an attitude dynamic equation of the tethered system is established on the basis of the momentum theorem; and against the background of deorbiting in the tangential direction, the trajectory of the center of mass is obtained. Based on the analysis of the bifurcation of the in-plane angle, the first-order analytical solutions of librational angles are derived. Then, a typical lumped mass model is introduced to study the longitudinal and transverse vibration of the tether. Furthermore, the coupling effects between the tether librational and vibration characteristics are analyzed. Numerical simulation results indicate that during orbital transfer, librational angles maintain a uniform-amplitude pendular motion around the equilibrium position at a specific angular frequency determined by factors such as the length of the tether, the thrust acceleration and the geocentric distance. It may result in resonance of the librational angle when the pendular motion frequency of the in-plane angle approaches the angular frequency of the orbit, and a great transverse motion also occurs during orbital transfer.

Key words: tethered system; orbital transfer; dynamics; librational and vibrational characteristics; constant thrust

Received: 2011-09-05; **Revised:** 2011-10-10; **Accepted:** 2011-11-07; **Published online:** 2011-12-14 08:57

URL: www.cnki.net/kcms/detail/11.1929.V.20111214.0857.001.html

Foundation item: Fundamental Research Funds for the Central Universities

*** Corresponding author.** Tel.: 010-82339067 E-mail: zhaoguowei@buaa.edu.cn