

# 叠层环板轴对称自由振动的精确解

范家让

(合肥工业大学建筑工程系,合肥,230009)

## EXACT SOLUTIONS FOR AXISYMMETRIC FREE VIBRATIONS OF LAMINATED ANNULAR PLATES

Fan Jiarang

(Department of Architecture Engineering, Hefei University of Technology, Hefei, 230009)

**摘要** 抛弃任何有关位移或应力模式的人为假设,从三维弹性力学基本方程出发,导出横观各向同性环板轴对称振动问题的状态方程。在多种边界条件下,给出单层、叠层环板轴对称振动问题的精确解。

**关键词** 层压板,共振频率,状态方程

**中图分类号** V324.35, O327

**Abstract** Discarding any assumptions about displacement models and stress distribution and based on fundamental equations of three-dimensional elasticity, the state equations for the axisymmetric vibrations of transversely isotropic annular plates are established. The exact solutions are presented for the axisymmetric vibrations of single-layer and laminated annular plates with several different boundary conditions.

**Key words** laminates, resonant frequencies, equations of state

当今各家中厚板理论都人为地引进一些简化假设,例如,假设力学量是某一坐标变量的多项式。笔者已证明各力学量的真解不可能是任何坐标变量的多项式,若以多项式的假设为前题,必导致基本方程之间互不相容。由此引起的误差将随板厚增加而剧增。对于强厚(很厚)度板,各家理论全部失效。

Celep<sup>[1]</sup>利用 Vlasov<sup>[2]</sup>提出的初始函数法求解各向同性厚圆板轴对称自由振动问题。但因文中假定振动模态是关于对称面(中面)反对称的,从而把关于对称面对称振动的那些频率丢掉了。此外,该法很难用来解叠层板,因叠层板并非总是有对称面的。文献[3]克服了上述缺点,分别在周边固支和简支情况下,给出薄的、中厚的和强厚的单层、叠层圆板轴对称振动问题的精确解。本文将文献[3]的方法推广至环板和自由边问题,并在周边固支、简支和自由多种边界条件下,给出单层、叠层环板轴对称振动问题的精确解。此解满足所有基本方程,包含了全部弹性常数,适用于任意厚度板。

### 1 单层环板轴对称振动时的状态方程

在图1所示的柱坐标系中,环板单元轴对称振动时的动力学平衡方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

1993年3月23日收到,1993年9月30日收到修改稿  
国家自然科学基金资助课题

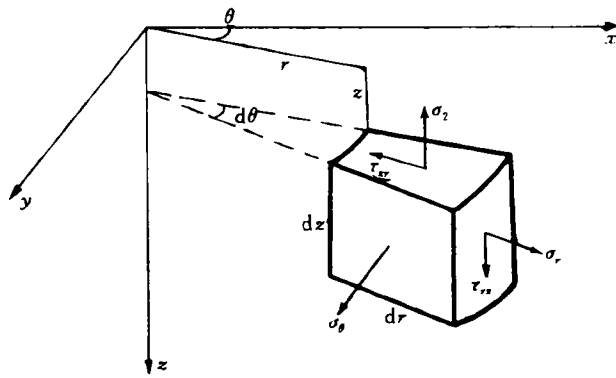


图1 柱坐标系中的环板单元

式中  $\rho$  为材料密度;  $U, W$  分别是单元体沿  $r$  和  $z$  方向的位移。

若材料是横观各向同性体, 在轴对称条件下, 将应变-位移关系代入应力-应变关系后, 得

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial U}{\partial r} \\ \frac{U}{r} \\ \frac{\partial W}{\partial z} \\ \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

记  $\alpha = \frac{\partial}{\partial r}$ ,  $\xi^2 = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ ,  $c_1 = -\frac{c_{13}}{c_{33}}$ ,  $c_2 = c_{11} - \frac{c_{13}^2}{c_{33}}$ ,  $c_3 = c_{12} - \frac{c_{13}^2}{c_{33}}$ ,  $c_7 = \frac{1}{c_{33}}$ ,  $c_8 = \frac{1}{c_{55}}$ ,  $R = \tau_{rz}$ ,  $Z = \sigma_z$ 。从(1)式、(2)式中消去平面应力分量  $\sigma_r$  和  $\sigma_\theta$  后, 得

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{Bmatrix} U \\ Z \\ R \\ W \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_8 & -\alpha \\ 0 & 0 & -(\alpha + \frac{1}{r}) & \xi^2 \\ \xi^2 - c_2(\alpha^2 + \frac{1}{r}\alpha - \frac{1}{r^2}) & c_1\alpha & 0 & 0 \\ c_1(\alpha + \frac{1}{r}) & c_7 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ Z \\ R \\ W \end{Bmatrix} \quad (3)$$

而被消去的  $\sigma_r, \sigma_\theta$  和  $U, Z$  有如下关系

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2\alpha + \frac{c_3}{r} & -c_1 \\ c_3\alpha + \frac{c_2}{r} & -c_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ Z \end{Bmatrix} \quad (4)$$

将位移和应力写成如下分离变量形式

$$\begin{Bmatrix} U = \frac{df(r)}{dr} \bar{U}(z) e^{i\omega t}, Z = f(r) \bar{Z}(z) e^{i\omega t} \\ R = \frac{df(r)}{dr} \bar{R}(z) e^{i\omega t}, W = f(r) \bar{W}(z) e^{i\omega t} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

式中  $\omega$  为圆频率,  $f(r)$  应满足下面 Bessel 方程

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} + Kf = 0 \quad (6)$$

其中  $K = \pm k^2$ . 常数  $k^2$  的值应由边界条件来确定。(5) 式代入矩阵方程(3), 化简后, 得

$$\frac{d}{dz} \begin{Bmatrix} \bar{U}(z) \\ \bar{Z}(z) \\ \bar{R}(z) \\ \bar{W}(z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_8 & -1 \\ 0 & 0 & K & -\rho\omega^2 \\ c_2 K - \rho\omega^2 & c_1 & 0 & 0 \\ -c_1 K & c_7 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}(z) \\ \bar{Z}(z) \\ \bar{R}(z) \\ \bar{W}(z) \end{Bmatrix} \quad (7)$$

上式是一阶常微分方程组, 在控制论中称这样的方程组为状态方程。通过状态方程不难证明各力学量不可能是坐标  $z$  的多项式。例如, 若  $\bar{R}(z)$ 、 $\bar{W}(z)$  是  $z$  的  $l$  次多项式, 由(7)式前二方程知  $\bar{U}(z)$  和  $\bar{Z}(z)$  必为  $z$  的  $l+1$  次多项式。若如此, 从(7)式后二方程又知  $\bar{R}(z)$  和  $\bar{W}(z)$  必为  $z$  的  $l+2$  次多项式, 从而与原设矛盾。

## 2 环板轴对称振动时的边界条件

前节已述, 方程(6)中的  $K (= \pm k^2)$  值应由边界条件来确定。为此, 需研究方程(6)的解。事实上, 方程(6)等价于下面的方程

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + k^2 \right) \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - k^2 \right) f = 0 \quad (8)$$

方程(8)的解是

$$f = A_1 J_0(kr) + A_2 N_0(kr) + A_3 I_0(kr) + A_4 K_0(kr) \quad (9)$$

其中,  $J_0(kr)$  和  $N_0(kr)$  分别是实宗量的第一和第二类 Bessel 函数; 而  $I_0(kr)$  和  $K_0(kr)$  分别是虚宗量的第一和第二类 Bessel 函数;  $A_1$ 、 $A_2$ 、 $A_3$  和  $A_4$  是积分常数。为了确定(9)式中的  $k$  值, 需研究环板的边界条件:

$$\text{周边固支:} \quad W = U = 0 \quad (10)$$

$$\text{周边简支:} \quad W = \sigma_r = 0 \quad (11)$$

$$\text{周边自由:} \quad M_r = V_r = 0 \quad (12)$$

(12)式是仿照薄板理论中弯矩和总的剪力为零。利用(5)式知, 此条件等价于

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{df}{dr} = 0, \quad \frac{d}{dr} \left( \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} \right) = 0 \quad (13)$$

式中  $\mu$  为各向同性面内的泊松比。环板有两条边界(图2), 每条边界上可列出两个条件方程。将(9)式代入(5)式然后再代入边界条件, 便得到关于  $A_1$ 、 $A_2$ 、 $A_3$  和  $A_4$  的4个线性齐次代数方程。因  $A_1 \sim A_4$  不全为零, 由其系数行列式为零得

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad (14)$$

当边界条件给定后, 行列式(14)中的各元素为已知, 此时可由(14)式求出无穷多个  $k$  值, 可用求任一函数零点的现有程序求出这些  $k$  值。记  $k = k_m = \mu_m/a$ , ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ), 并按其大小排成  $0 < k_1 < k_2 < \dots < k_m < \dots$ 。表1列出3种边界条件下前3个  $\mu_m$  值。

表 1 三种边界条件下的前 3 个  $\mu_m$  值

边界条件	$b/a$	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$
内边界固支 外边界固支	0.1	5.223 08	8.681 37	12.174 30
	0.2	5.882 96	9.784 72	13.716 70
	0.4	7.865 89	13.072 89	18.313 21
内边界自由 外边界简支 $c_3/c_2=0.3$	0.1	2.203 01	5.425 71	8.650 01
	0.2	2.172 03	5.604 09	9.262 17
	0.4	2.182 67	6.889 42	11.968 77
内边界自由 外边界固支 $\mu=0.3$	0.1	3.18736	6.286 59	9.251 03
	0.2	3.22614	6.558 94	10.247 50
	0.4	3.68819	8.195 02	13.304 36

3 叠层环板轴对称振动时的自然频率

图 3(a) 表示一叠层环板, 共有  $p$  层, 每层均为横观各向同性材料, 外径为  $a$ , 内径为  $b$ 。在局部坐标系中, 任一层  $j$  示于图 3(b)。实际上, 图 3(b) 表示一单层板, 其状态方程是 (7) 式。对于满足边界条件的特定的  $k_m$  值, 方程 (7) 变成

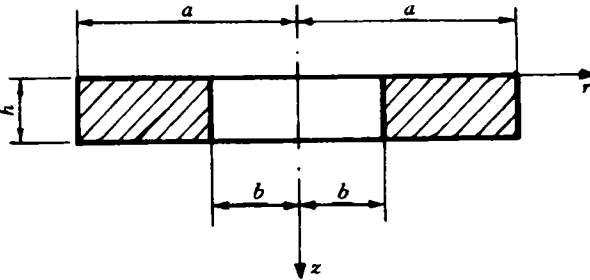


图 2 单层环板

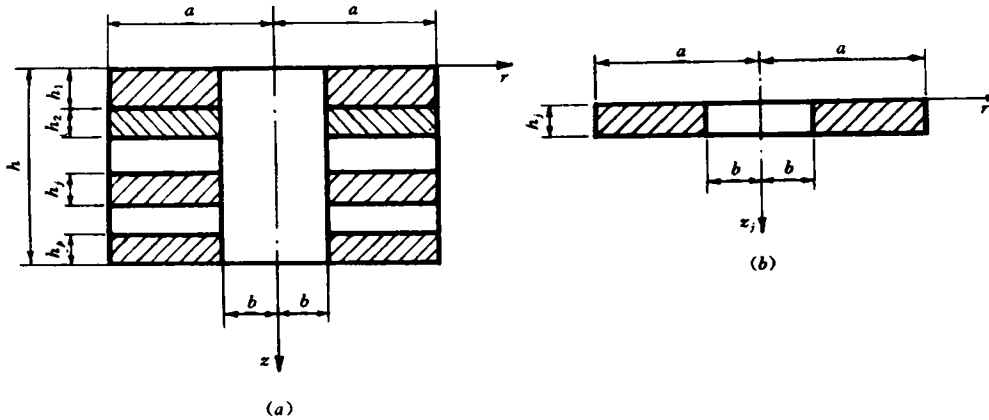


图 3 叠层环板

$$\frac{d}{dz} [U_m(z) \bar{Z}_m(z) \bar{R}_m(z) \bar{W}_m(z)]_j^T = D_{mj} [U_m(z) \bar{Z}_m(z) \bar{R}_m(z) \bar{W}_m(z)]_j^T \quad (15)$$

其中

$$D_{mj} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_8 & -1 \\ 0 & 0 & k_m^2 & -\rho\omega_m^2 \\ c_2 k_m^2 - \rho\omega_m^2 & c_1 & 0 & 0 \\ -c_1 k_m^2 & c_7 & 0 & 0 \end{bmatrix}_j \quad (16)$$

下标  $j$  表示对  $j$  层而言。

方程(15)的解是<sup>[4]</sup>

$$R_j(z) = D_j(z)R_j(0), \quad z \in [0, h_j] \quad (17)$$

$$\text{其中} \quad R_j(z) = [\bar{U}_m(z) \bar{Z}_m(z) \bar{R}_m(z) \bar{W}_m(z)]_j^T \quad (18)$$

$$R_j(0) = [\bar{U}_m(0) \bar{Z}_m(0) \bar{R}_m(0) \bar{W}_m(0)]_j^T \quad (19)$$

$$D_j(z) = \exp[D_{mj}z] = P_j \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 z} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 z} & & \\ & & e^{\lambda_3 z} & \\ 0 & & & e^{\lambda_4 z} \end{bmatrix}_j P_j^{-1} \quad (20)$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  为  $D_{mj}$  的特征值;  $P_j = [V_1 V_2 V_3 V_4]_j$ ,  $V_1, V_2, V_3, V_4$  为相应于特征值的特征矢量,  $P_j^{-1}$  为  $P_j$  的逆阵。

在(17)式中令  $z = h_j$ , 有

$$R_j(h_j) = D_j(h_j)R_j(0), \quad (j = 1, 2, \dots, p) \quad (21)$$

(21)式对任一层均成立。根据层间应力和位移的连续条件,最后可把第  $p$  层下表面力学量和第一层上表面力学量用下式联系起来

$$P_p(h_p) = D_p(h_p)D_{p-1}(h_{p-1}) \cdots D_2(h_2)D_1(h_1)R_1(0) = \Pi R_1(0) \quad (22)$$

式中  $\Pi = \prod_{j=p}^1 D_j(h_j)$  为四阶矩阵,称为状态转移矩阵;  $R_1(0)$  叫做初始值。

(22)式实际上是4个线性代数方程。在自由振动情况下,因板上、下表面无载荷,故  $\bar{Z}_m(h_p) = \bar{R}_m(h_p) = \bar{Z}_m(0) = \bar{R}_m(0) = 0$ 。取出(22)式中的第二和第三方程,得

$$\begin{bmatrix} \Pi_{21} & \Pi_{24} \\ \Pi_{31} & \Pi_{34} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}_m(0) \\ \bar{W}_m(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (23)$$

上式的非平凡解给出下列精确频率方程

$$\begin{vmatrix} \Pi_{21} & \Pi_{24} \\ \Pi_{31} & \Pi_{34} \end{vmatrix} = 0 \quad (24)$$

(24)式不再是按常规理论导出的  $\omega^2$  的多项式,而是一个超越方程。对于每个给定的  $k_m$  值,由此方程可求出无穷多个频率,对应厚度方向无穷多个振动模态。

#### 4 数值结果

算例 三层环板,每层都是各向同性材料,顶层和底层材料相同。顶层和中层的杨氏模量、泊松比、材料密度分别为  $E^{(1)}, \mu^{(1)}, \rho_1$  和  $E^{(2)}, \mu^{(2)}, \rho_2$ , 且  $E^{(1)}/E^{(2)} = 5, \rho_1/\rho_2 = 3, \mu^{(1)} = \mu^{(2)} = 0.3$ 。几何参数为  $h_1 = h_3 = 0.1h, h_2 = 0.8h, b/a = 0.2$ (图3,  $p = 3$ )。

表 2 不同边界条件和不同厚度下三层环板的前 3 个频率参数  $\Omega (= \rho_2 \omega^2 a^2 / E^{(2)})$

边界条件	$h/a$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$
内边界固支	0.2	4.479 70	45.713 16	109.658 23
	0.4	7.293 90	28.413 77	63.210 39
外边界固支	0.6	8.273 12	16.039 57	47.038 77
	0.8	8.645 85	11.816 11	34.065 24
$k_a=5.882\ 96$	1.0	8.811 64	10.207 94	25.940 72
内边界自由	0.2	0.149 04	6.619 13	62.111 53
	0.4	0.431 52	6.457 86	21.313 84
外边界简支	0.6	0.673 57	6.096 44	13.497 82
	0.8	0.843 93	5.367 69	10.580 86
$k_a=2.172\ 03$	1.0	0.958 46	4.305 50	18.535 52
内边界自由	0.2	0.627 60	14.469 12	71.604 66
	0.4	1.472 66	13.482 67	30.060 90
外边界固支	0.6	1.989 65	10.811 31	21.605 67
	0.8	2.276 08	7.792 17	17.921 20
$k_a=3.226\ 14$	1.0	2.437 58	5.434 50	15.299 00

表 3 不同边界条件和不同厚度下单层环板的前 3 个频率参数  $\Omega (= \rho \omega^2 a^2 / E)$

边界条件	$h/a$	$\Omega_1$			$\Omega_2$	$\Omega_3$	
		本文解	Reissner	Mindlin	本文解	本文解	Mindlin
内边界固支	0.2	3.004 84	3.283 59	2.872 63	37.127 48	137.383 89	130.342 99
	0.4	6.507 19	7.484 67	5.915 46	32.838 08	61.617 32	63.296 31
外边界固支	0.6	8.521 09	9.808 62	7.511 40	23.505 67	44.264 28	49.847 81
	0.8	9.641 77	11.004 52	8.345 59	17.226 00	35.101 96	44.865 22
$k_a=5.882\ 96$	1.0	10.295 5	11.662 78	8.815 10	14.360 56	28.431 57	42.475 59
内边界自由	0.2	0.076 47	0.077 95	0.075 80	5.169 08	101.063 08	91.788 96
	0.4	0.259 41	0.275 59	0.252 00	5.120 55	29.686 95	27.608 91
外边界简支	0.6	0.470 68	0.519 47	0.447 09	5.028 82	16.264 01	15.561 25
	0.8	0.664 96	0.752 58	0.618 92	4.873 51	11.411 15	11.241 02
$k_a=2.172\ 03$	1.0	0.828 25	0.949 87	0.757 70	4.620 19	9.051 03	9.182 13
内边界自由	0.2	0.346 82	0.360 36	0.340 68	11.361 94	108.302 54	99.395 79
	0.4	1.024 96	1.130 14	0.974 22	11.102 01	36.359 12	34.758 41
外边界固支	0.6	1.640 09	1.869 78	1.514 00	10.529 26	22.403 64	22.366 06
	0.8	2.104 07	2.425 33	1.898 87	9.400 96	17.082 49	17.832 79
$k_a=3.226\ 14$	1.0	2.439 13	2.812 06	2.164 07	7.792 35	14.264 58	15.647 48

表2给出不同厚度情况下的前3个频率参数。当 $E^{(1)}=E^{(2)}=E, \rho_1=\rho_2=\rho$ 时,该三层板蜕化为单层板,不同厚度情况下的数值结果列于表3。表3中对应于 *Reissner* 和 *Mindlin* 的数值结果是根据文献[1]中提供的已经修正过的公式算出的。由表3可见,按 *Reissner* 理论只能求出低频,而按 *Mindlin* 理论也只能求得两个频率。表3还说明按 *Reissner* 理论求得的频率偏高,而按 *Mindlin* 理论求得的频率偏低。

## 5 结 语

从本文的演绎过程可见:所有基本方程得到满足,5个弹性常数全部包含。因未对板厚作任何限制,频率方程(24)对任意厚度板都是精确的。无论层数多少,(22)式中状态转移矩阵 $\Pi$ 都是四阶的。这说明本文提供的原理和方法在解叠层板时优越性尤为突出。

## 参 考 文 献

- 1 Celep Z. Free vibration of some circular plates of arbitrary thickness. *J Sound Vib*, 1980; 70(3): 379—388
- 2 Vlasov V Z. The method of initial functions in problems of the theory of thick plates and shells. 9th Cong Appl Mech, Brussel Belgium, 1957; 6: 321—330
- 3 Fan Jiarang (范家让), Ye Jianqiao (叶建乔). Exact solutions for axisymmetric vibration of laminated circular plates. *J Engng Mech, ASCE*, 1990; 116(4): 920—927
- 4 范家让, 盛宏王. 具有固支边的强厚度叠层板的精确解. *力学学报*, 1992; 24(5): 574—583