文章编号:1001-5132（2009）04-0523-06

环境噪声对具有捕获的种群竞争系统的影响

吴爱华[1]，王 婷[2]，张建勋[1*]

（1.宁波大学 理学院，浙江 宁波 315211; 2.中国地质大学 数学系，湖北 武汉 430074）

摘要: 运用色噪声刻画环境变化性构造了随机的具有捕获的两种群竞争的 Gompertz 模型，讨论了环境变化和人工捕获对种群生长过程的影响. 通过求解在平衡点处线性化的随机微分方程，计算出了两种群偏离平衡点处的期望和方差，研究得到环境随机性虽然会导致种群密度随机变化，但随着时间的增长，种群的密度变化只可能在平衡状态处摆动. 最后还讨论了为减少两种群灭绝可能性，系统保持稳定的参数域.

关键词**:** Gompertz 模型；有色噪声; O-U 过程；依腾随机微分方程；平衡解；参数域

中图分类号**:** O175.11 文献标识码**:** A

近年来，随着经济和社会的发展，人们的生活和生产方式发生了巨大的转变. 对于生物资源的开采问题，人们不仅考虑既得利益，同时更关注它对整个生态平衡造成的影响，可更新资源管理日益凸现其重要性. 资源管理者希望能制定出既能获得自身的利益同时不会破坏生物种群持续增长的最优管理策略，但随着现代渔业的发展，开采技术越来越先进，面对生态资源的管理的一个关键性问题——生态资源的过度开采，这就要求对生物种群生长过程的准确刻画及系统参数值的估计.

传统的资源开采问题都是基于环境和系统参数为常数，然而在种群的生长过程中存在着许多不确定因素，比如种群的出生、繁殖、死亡、害虫的侵袭等都是不确定的，环境的随机性内在于种群的生长过程中. 随机系统较之确定系统有着更为复杂的动力学行为，近年来已有许多学者对此方面产生了浓厚的研究兴趣，其中文献[1-4]均讨论了环境随机变化对各种生态系统的影响，但文献[1-3]描述环境随机性的是高斯白噪声，笔者将在文献[3]的基础上考虑系统环境有色噪生对两种群竞争 Gompertz 模型的影响，并讨论保持稳定的参数域.

1 模型的建立

文献[4]指出，自然界中水栖生物体系与其种群的生命周期相比，在很短时期内不会有剧烈的内部过程去处理其内部很小幅度的变化性，因此自然的谱密度分布具有迅速、永久性、高度不规律性. 此变化过程一般用有色噪声来描述其随机变化的性质，同时指出 O-U 过程(Ornstein-Uhlenbeck 过程)来刻画是一个合适的选择.

在此，我们给出用 O-U 过程来描述环境变化性并具有捕获的两种群竞争的 Gompertz 模型，并

收稿日期：2008-04-29. 宁波大学学报（理工版）网址: http://3xb.nbu.edu.cn
第一作者：吴爱华（1983－），女，湖北大冶人，在读硕士研究生，主要研究方向：生物数学. E-mail: wuaihua@163.com
*通讯作者：张建勋（1959－），男，陕西岐山人，教授，主要研究方向：生物数学. E-mail: zhangjianxun@nbu.edu.cn

用以下 Itô 随机微分方程表示:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t}=N_1(K_1+\eta_1(t)-\alpha_{11}\ln N_1)-\\ \qquad \alpha_{12}N_1\ln N_2-q_1EN_1,\\ \dfrac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t}=N_2(K_2+\eta_2(t)-\alpha_{22}\ln N_2)-\\ \qquad \alpha_{21}N_2\ln N_1-q_2EN_2,\end{cases} \tag{1}$$

其中，$\eta_j(t), j=1,2$ 为互不相关的随机变量，其随机过程采用下述随即偏微分方程的解来界定:

$$\frac{\mathrm{d}\eta_j}{\mathrm{d}t}=-\delta_j\eta_j+\delta_j\sqrt{2\varepsilon_j}\frac{\mathrm{d}\omega_j}{\mathrm{d}t},\varepsilon_j,\delta_j>0, \tag{2}$$

其中，$\xi_j=\mathrm{d}\omega_j/\mathrm{d}t(j=1,2)$ 定义为标准的高斯白噪声过程，其数学期望和斜方差为:

$$E(\xi_j)=0,E(\xi_i(t_i)\xi_j(t_j))=\delta_{ij}\delta(i-j),i,j=1,2,$$

而 δ_{ij} 和 $\delta(.)$ 分别为 Kronecker-delta 函数和 Dirac-delta 函数.

2 系统正平衡点处稳定性分析

2.1 确定系统正平衡点的稳定性

作变换 $X_i=\ln N_i$，系统(1)变为:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}X_1}{\mathrm{d}t}=K_1-q_1E-\alpha_{11}X_1-\alpha_{12}X_2+\eta_1(t),\\ \dfrac{\mathrm{d}X_2}{\mathrm{d}t}=K_2-q_2E-\alpha_{22}X_2-\alpha_{21}X_1+\eta_2(t).\end{cases} \tag{3}$$

考虑系统(1)的确定系统，通过求解可知平衡点为 $O(0,0),P(X_1^*,X_2^*)$，其中:

$$X_1^*=\frac{(K_1-q_1E)\alpha_{22}-(K_2-q_2E)\alpha_{12}}{\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{21}\alpha_{12}},$$

$$X_2^*=\frac{(K_1-q_1E)\alpha_{21}-(K_2-q_2E)\alpha_{11}}{\alpha_{12}\alpha_{21}-\alpha_{11}\alpha_{22}},$$

为考虑其生态意义，一般期望处于共存时的种群数量较大，即 $X_1^*>0,X_2^*>0$.

将系统在平衡点处进行线性化处理，可得:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=-\alpha_{11}x_1-\alpha_{12}x_2+\eta_1(t),\\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=-\alpha_{22}x_2-\alpha_{21}x_1+\eta_2(t).\end{cases} \tag{4}$$

令: $A=-\alpha_{11},B=-\alpha_{12},C=-\alpha_{21},D=-\alpha_{22}$，当缺省干扰项时，系统(4)相应特征方程为:

$$\Delta(\lambda)=\lambda^2-(A+D)\lambda+(AD-BC)=0.$$

由于 $A+D<0$，且 $(A+D)^2-4(AD-BC)=(A-D)^2+4BC>0$，因此，当 $AD-BC>0$ 时，平衡点是渐近稳定的. 由 $X_1^*>0,X_2^*>0$ 可知，此时捕获努力量 E 必须满足:

$$\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}}<\frac{k_1-q_1E}{K_2-q_2E}<\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{21}}.$$

通过上述分析的可知, 对于两种群竞争的种群 Gompertz 模型，影响平衡点稳定性的因素是种群内外之间的竞争，只要控制相互竞争系数即可确保平衡点是渐近稳定的. 捕获不会影响平衡点的稳定性，只会影响平衡点的位置.

2.2 随机扰动下系统的稳定性分析

当出现随机扰动时，通过求解随机微分方程来研究种群在平衡点处的偏离情况，从而研究随机扰动对竞争系统的影响. 首先，将系统(4)改写成矩阵形式:

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=Px(t)+I\eta(t), \tag{5}$$

其中:

$$x(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix},P=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix},\eta=\begin{pmatrix}\eta_1(t)\\ \eta_2(t)\end{pmatrix},I=E.$$

作拉普拉斯变换，可得(5)式的解为:

$$x(t)=\exp Ptx_0+\int_0^t\exp P(t-s)I\eta(s)\mathrm{d}s,$$

求解得:

$$\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\rho_1e^{\lambda_1t}+\rho_2e^{\lambda_2t} & \rho_3(e^{\lambda_1t}-e^{\lambda_2t})\\ \rho_4(e^{\lambda_1t}-e^{\lambda_2t}) & \rho_2e^{\lambda_1t}+\rho_1e^{\lambda_2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\end{pmatrix}+$$

$$\int_0^t\begin{pmatrix}\rho_1e^{\lambda_1(t-s)}+\rho_2e^{\lambda_2(t-s)} & \rho_3(e^{\lambda_1(t-s)}-e^{\lambda_2(t-s))}\\ \rho_4(e^{\lambda_1(t-s)}-e^{\lambda_2(t-s))} & \rho_2e^{\lambda_1(t-s)}+\rho_1e^{\lambda_2(t-s)}\end{pmatrix}\cdot$$

$$\begin{pmatrix}\eta_1(s)\\ \eta_2(s)\end{pmatrix}\mathrm{d}s, \tag{6}$$

其中:

$$\rho_1=\frac{1}{2}(1+\frac{A-D}{\lambda_1-\lambda_2}),\rho_2=\frac{1}{2}(1-\frac{A-D}{\lambda_1-\lambda_2}),$$

$$\rho_3=-\frac{B}{\lambda_1-\lambda_2},\rho_4=-\frac{C}{\lambda_1-\lambda_2}. \tag{7}$$

令:

$$\beta_{ij}=\int_0^t e^{-\lambda_i s}\eta_j(s)\,\mathrm{d}s, i=1,2, j=1,2,$$

改写(6)式可得:

$$x_1(t)=(\rho_1 e^{\lambda_1 t}+\rho_2 e^{\lambda_2 t})x_1(0)+\rho_3(e^{\lambda_1 t}-e^{\lambda_2 t})\cdot x_2(0)+\rho_1 e^{\lambda_1 t}\beta_{11}+\rho_2 e^{\lambda_2 t}\beta_{21}+\rho_3 e^{\lambda_1 t}\beta_{12}-\rho_3 e^{\lambda_2 t}\beta_{22},\quad(8)$$

$$x_2(t)=\rho_4(e^{\lambda_1 t}-e^{\lambda_2 t})x_1(0)+\rho_2(e^{\lambda_1 t}+\rho_1 e^{\lambda_2 t})\cdot x_2(0)+\rho_4 e^{\lambda_1 t}\beta_{11}-\rho_4 e^{\lambda_2 t}\beta_{21}+\rho_2 e^{\lambda_1 t}\beta_{12}-\rho_1 e^{\lambda_2 t}\beta_{22}.\quad(9)$$

为求出 x_1,x_2 的期望和方差，下面给出相应的 2 个定理.

定理 1　若 $\omega_j(t)$ 表示相互独立的维纳过程，则 Itô 过程 $\int_0^t e^{-\lambda_i s}\mathrm{d}\omega_j(s)$ 满足:

$$E\left(\int_0^t e^{-\lambda_i s}\mathrm{d}\omega_j(s)\int_0^t e^{\delta_j(s)}\mathrm{d}\omega_j(s)\right)=\frac{e^{(\delta_j-\lambda_i)t}-1}{\delta_j-\lambda_i}.\quad(10)$$

证明　由(3)式知 $\xi_i=\mathrm{d}\omega_i/\mathrm{d}t, i=1,2$，则:

$$E\left(\int_0^t e^{-\lambda_i s}\mathrm{d}\omega_j(s)\int_0^t e^{\delta_j(s)}\mathrm{d}\omega_j(s)\right)=E\left(\int_0^t e^{-\lambda_i(s_1)}\xi_j(s_1)\mathrm{d}s_1\int_0^t e^{\delta_j(s_2)}\xi_j(s_2)\mathrm{d}s_2\right)=E\left(\int_0^t\int_0^t e^{-\lambda_i s_1}e^{\delta_j s_2}\xi_j(s_1)\xi_j(s_2)\mathrm{d}s_1\mathrm{d}s_2\right)=\int_0^t\int_0^t e^{-\lambda_i s_1}e^{\delta_j s_2}E(\xi_j(s_1)\xi_j(s_2))\mathrm{d}s_1\mathrm{d}s_2.$$

由于 $E(\xi_j(s_1)\xi_j(s_2))=\delta(s_1-s_2)$，代入上式得:

$$E\left(\int_0^t e^{-\lambda_i s}\mathrm{d}\omega_j(s)\int_0^t e^{\delta_j(s)}\mathrm{d}\omega_j(s)\right)=\int_0^t\int_0^t e^{-\lambda_i s_1}e^{\delta_j s_2}\delta(s_1-s_2)\mathrm{d}s_1\mathrm{d}s_2=\int_0^t e^{-\lambda_i s_1}\left[\int_0^t e^{\delta_j s_2}\delta(s_2-s_1)\mathrm{d}s_2\right]\mathrm{d}s_1.$$

由 Dirac -delta 函数的性质,

$$\int_p^q f(t)\delta(t-a)\mathrm{d}t=f(a), p<a<q,$$

得:

$$E\left(\int_0^t e^{-\lambda_i s}\mathrm{d}\omega_j(s)\int_0^t e^{\delta_j(s)}\mathrm{d}\omega_j(s)\right)=\int_0^t e^{-\lambda_i s_1}e^{\delta_j s_1}\mathrm{d}s_1=\frac{e^{(\delta_j-\lambda_i)t}-1}{\delta_j-\lambda_i}.$$

得证.

定理 2　若 $\eta_j(t)$ 为(2)式所决定的相互独立的 O-U 过程，则:

$$\beta_{ij}=\int_0^t e^{-\lambda_i s}\eta_j(s)\mathrm{d}s, i,j=1,2.$$

(i) 则随机过程 β_{ij} 是具有独立增量的正态过程，$\beta_{ij}\sim N(0,\sigma^2_{\beta_{ij}})$，且

$$\sigma^2_{\beta_{ij}}=\frac{\varepsilon_j\delta_j^2 e^{-2\lambda_i t}}{(\lambda_i+\delta_j)^2}\left[\frac{1}{\delta_j}-\frac{1-e^{2\lambda_i t}}{\lambda_i}-\frac{4-4e^{(\lambda_i-\delta_j)t}}{\delta_j-\lambda_i}\right].\quad(11)$$

(ii) 随机过程 β_{ij} 的相关函数,

$$E\left(\int_0^t e^{-\lambda_i s}\eta_{j_1}(s)\mathrm{d}s\int_0^t e^{-\lambda_i s}\eta_{j_2}(s)\mathrm{d}s\right)=0, j_1\neq j_2,\quad(12)$$

$$E\left(\int_0^t e^{-\lambda_i s}\eta_{j_1}(s)\mathrm{d}s\int_0^t e^{-\lambda_j s}\eta_{j_2}(s)\mathrm{d}s\right)=\frac{2\varepsilon_{j_1}\delta_{j_1}^2 e^{-(\lambda_i+\lambda_j)t}}{(\lambda_i+\delta_{j_1})(\lambda_j+\delta_{j_1})}\left[\frac{1}{2\delta_{j_1}}-\frac{1-e^{(\lambda_i+\lambda_j)t}}{\lambda_i+\lambda_j}-\frac{1-e^{(\lambda_i-\delta_{j_1})t}}{\delta_{j_1}-\lambda_i}-\frac{1-e^{(\lambda_j-\delta_{j_1})t}}{\delta_{j_1}-\lambda_j}\right], j_1=j_2.\quad(13)$$

证明　(i)由于

$$\int_0^t e^{-\lambda_i s}\eta_{j_1}(s)\mathrm{d}s=-\frac{1}{\lambda_i}\int_0^t\eta_j(s)\mathrm{d}(e^{-\lambda_i s})=-\frac{1}{\lambda_i}\left[\eta_j(s)e^{-\lambda_i s}\big|_0^t-\int_0^t e^{-\lambda_i s}\mathrm{d}(\eta_j(s))\right].\quad(14)$$

由(2)式可知:

$$\eta_j(t)=e^{-\delta_j t}\left(\eta_j(0)+\delta_j\sqrt{2\varepsilon_j}\int_0^t e^{\delta_j s}\mathrm{d}\omega_j s\right), j=1,2,\quad(15)$$

其中，$\eta_j(0)$ 是 $\eta_j(t)$ 初始值，为已知的随机变量服从正态分布 $N(0,\sigma_j\varepsilon_j)$，且 $\eta_j(0)$ 与 $\omega_j(t)$ 独立．将(15)式代入(14)式得:

$$\int_0^t e^{-\lambda_i s}\eta_{j_1}(s)\mathrm{d}s=-\frac{1}{\lambda_i}\left[\eta_j(t)e^{-\lambda_i t}-\int_0^t e^{-\lambda_i s}(-\delta_j\eta_j(s)\mathrm{d}s+\delta_j\sqrt{2\varepsilon_j}\mathrm{d}\omega_j(s))\right]=-\frac{1}{\lambda_i}\left[\eta_j(t)e^{-\lambda_i t}+\delta_j\int_0^t e^{-\lambda_i s}\eta_j(s)\mathrm{d}s-\delta_j\sqrt{2\varepsilon_j}\int_0^t e^{-\lambda_i s}\mathrm{d}(\omega_j(s))\right]=-\frac{\delta_j\sqrt{2\varepsilon_j}}{(\lambda_i+\delta_j)}\left[\int_0^t e^{-\lambda_i s}\mathrm{d}\omega_j(s)-e^{-(\delta_j+\lambda_i)t}\int_0^t e^{\delta_j s}\mathrm{d}\omega_j s-\frac{e^{-(\lambda_i+\delta_j)t}\eta_j(0)}{\delta_j\sqrt{2\varepsilon_j}}\right].\quad(16)$$

文献[5]中指出，$\int_0^t e^{-\lambda_i s}\mathrm{d}\omega_j(s)$ 是具有独立增量的正态过程，且

$$\int_0^t e^{-\lambda_i s}\mathrm{d}\omega_j(s)\sim(0,-\frac{e^{-2\lambda_i t}-1}{2\lambda_i}),$$

故由(16)式可得 β_{ij} 也是具有独立增量的正态过程，又 $E(\eta_j(0))=0$，则:

$$E(\int_0^t e^{-\lambda_i s}\eta_j(s)\mathrm{d}s)=0,$$

同时由(18)式得:

$$\sigma_{\beta_{ij}}^2=E([\int_0^t e^{-\lambda_i s}\eta_j(s)\mathrm{d}s]^2)=\frac{2\varepsilon_j\delta_j^2}{(\lambda_i+\delta_j)^2}[E([\int_0^t e^{-\lambda_i s}\mathrm{d}\omega_j(s)]^2)+e^{-2(\delta_j+\lambda_i)t}E([\int_0^t e^{\delta_j s}\mathrm{d}\omega_j s]^2)-2e^{-(\delta_j+\lambda_i)t}E([\int_0^t e^{-\lambda_i s}\mathrm{d}\omega_j(s)\int_0^t e^{\delta_j s}\mathrm{d}\omega_j s])+\frac{e^{-2(\lambda_i+\delta_j)t}E(\eta_j(0)^2)}{2\varepsilon_j\delta_j^2}].$$

由定理 1 可知:

$$E([\int_0^t e^{-\lambda_i s}\eta_j(s)\mathrm{d}s]^2)=\frac{\varepsilon_j\delta_j^2 e^{-2\lambda_i t}}{(\lambda_i+\delta_j)^2}\cdot[\frac{1}{\delta_j}-\frac{1-e^{2\lambda_i t}}{\lambda_i}-\frac{4-4e^{(\lambda_i-\delta_j)t}}{\delta_j-\lambda_i}].\tag{17}$$

(ii)由(16)式得:

$$E(\int_0^t e^{-\lambda_i(s)}\eta_{j_1}(s)\mathrm{d}s\int_0^t e^{-\lambda_j s}\eta_{j_2}(s)\mathrm{d}s)=\frac{2\varepsilon_{j_1}\delta_{j_1}^2}{(\lambda_i+\delta_{j_1})(\lambda_j+\delta_{j_2})}\{E(\int_0^t e^{-\lambda_j s}\mathrm{d}\omega_{j_1}(s)\cdot\int_0^t e^{-\lambda_i s}\mathrm{d}\omega_{j_1}(s))-e^{-(\delta_{j_1}+\lambda_j)t}E(\int_0^t e^{\delta_{j_1}s}\mathrm{d}\omega_{j_1}(s)\cdot\int e^{-\lambda_i s}\mathrm{d}\omega_{j_1}(s))-e^{-(\delta_{j_1}+\lambda_i)t}[E(\int_0^t e^{-\lambda_j s}\mathrm{d}\omega_{j_2}(s)\cdot\int_0^t e^{\delta_{j_1}s}\mathrm{d}\omega_{j_1}(s))-e^{-(\delta_{j_2}+\lambda_j)t}\cdot E(\int_0^t e^{\delta_{j_2}s}\mathrm{d}\omega_{j_2}(s)\int_0^t e^{\delta_{j_1}s\mathrm{d}\omega_{j_1}(s)})]\}.$$

当 $j_1\neq j_2$ 时，随机过程:

$$\int_0^t e^{-\lambda_j s}\mathrm{d}\omega_{j_1}(s),\int_0^t e^{-\lambda_j s}\mathrm{d}\omega_{j_2}(s),\eta_j(0),$$

互不相关，则:

$$E(\int_0^t e^{-\lambda_i s}\eta_{j_1}(s)\mathrm{d}s\int_0^t e^{-\lambda_i s}\eta_{j_2}(s)\mathrm{d}s)=0.$$

当 $j_1=j_2$ 时，由定理 1 可得:

$$E(\int_0^t e^{-\lambda_i s}\eta_{j_1}(s)\mathrm{d}s\int_0^t e^{-\lambda_j s}\eta_{j_2}(s)\mathrm{d}s)=\frac{2\varepsilon_{j_1}\delta_{j_1}^2 e^{-(\lambda_i+\lambda_j)t}}{(\lambda_i+\delta_{j_1})(\lambda_j+\delta_{j_1})}[\frac{1}{2\delta_{j_1}}-\frac{1-e^{(\lambda_i+\lambda_j)t}}{\lambda_i+\lambda_j}-\frac{1-e^{(\lambda_i-\delta_{j_1})t}}{\delta_{j_1}-\lambda_i}-\frac{1-e^{(\lambda_j-\delta_{j_1})t}}{\delta_{j_1}-\lambda_j}].\tag{18}$$

定理 2 得证.

现在我们分别来计算 x_1,x_2 的数学期望和方差，由定理 2(ii)得:

$$E(x_1)=(\rho_1 e^{\lambda_1 t}+\rho_2 e^{\lambda_2 t})x_1(0)+\rho_3(e^{\lambda_1 t}-e^{\lambda_2 t})x_2(0),\tag{19}$$

$$E(x_2)=\rho_4(e^{\lambda_1 t}-e^{\lambda_2 t})x_1(0)+(\rho_2(e^{\lambda_1 t}+\rho_1 e^{\lambda_2 t})x_2(0).\tag{20}$$

$$D(x_1)=E(x_1(t)^2)-E(x_1(t))^2=\frac{\varepsilon_1\rho_1^2\delta_1^2}{(\lambda_1+\delta_1)^2}[\frac{1}{\delta_1}-\frac{1-e^{2\lambda_1 t}}{\lambda_1}-\frac{4-4e^{(\lambda_1-\delta_1)t}}{\delta_1-\lambda_1}]+\frac{\varepsilon_1\rho_1^2\delta_1^2}{(\lambda_2+\delta_1)^2}[\frac{1}{\delta_1}-\frac{1-e^{2\lambda_2 t}}{\lambda_2}-\frac{4-4e^{(\lambda_2-\delta_1)t}}{\delta_1-\lambda_2}]+\frac{\varepsilon_2\rho_3^2\delta_2^2}{(\lambda_1+\delta_2)^2}[\frac{1}{\delta_2}-\frac{1-e^{2\lambda_1 t}}{\lambda_1}-\frac{4-4e^{(\lambda_1-\delta_2)t}}{\delta_2-\lambda_1}]+\frac{\varepsilon_2\rho_3^2\delta_2^2}{(\lambda_1+\delta_2)^2}[\frac{1}{\delta_2}-\frac{1-e^{2\lambda_2 t}}{\lambda_2}-\frac{4-4e^{(\lambda_2-\delta_2)t}}{\delta_2-\lambda_2}]+\frac{4\rho_1\rho_2\varepsilon_1\delta_1^2}{(\lambda_1+\delta_1)(\lambda_2+\delta_1)}[\frac{1}{2\delta_1}-\frac{1-e^{(\lambda_1+\lambda_2)t}}{\lambda_1+\lambda_2}-\frac{1-e^{(\lambda_1-\delta_1)t}}{\delta_1-\lambda_1}-\frac{1-e^{(\lambda_2-\delta_1)t}}{\delta_1-\lambda_2}]-\frac{4\rho_3^2\varepsilon_2\delta_2^2}{(\lambda_1+\delta_2)(\lambda_2+\delta_2)}[\frac{1}{2\delta_2}-\frac{1-e^{(\lambda_2+\lambda_2)t}}{\lambda_1+\lambda_2}-\frac{1-e^{(\lambda_1-\delta_2)t}}{\delta_2-\lambda_1}-\frac{1-e^{(\lambda_2-\delta_2)t}}{\delta_2-\lambda_2}],\tag{21}$$

$$D(x_2)=E(x_2(t)^2)-E(x_2(t))^2=\frac{\varepsilon_1\rho_4^2\delta_1^2}{(\lambda_1+\delta_1)^2}[\frac{1}{\delta_1}-\frac{1-e^{2\lambda_1 t}}{\lambda_1}-\frac{4-4e^{(\lambda_1-\delta_1)t}}{\delta_1-\lambda_1}]+\frac{\varepsilon_1\rho_4^2\delta_1^2}{(\lambda_2+\delta_1)^2}[\frac{1}{\delta_1}-\frac{1-e^{2\lambda_2 t}}{\lambda_2}-\frac{4-4e^{(\lambda_2-\delta_1)t}}{\delta_1-\lambda_2}]+\frac{\varepsilon_2\rho_2^2\delta_2^2}{(\lambda_1+\delta_2)^2}[\frac{1}{\delta_2}-\frac{1-e^{2\lambda_1 t}}{\lambda_1}-\frac{4-4e^{(\lambda_1-\delta_2)t}}{\delta_2-\lambda_1}]+\frac{\varepsilon_2\rho_1^2\delta_2^2}{(\lambda_1+\delta_2)^2}[\frac{1}{\delta_2}-\frac{1-e^{2\lambda_2 t}}{\lambda_2}-\frac{4-4e^{(\lambda_2-\delta_2)t}}{\delta_2-\lambda_2}]-\frac{4\rho_4^2\varepsilon_1\delta_1^2}{(\lambda_1+\delta_1)(\lambda_2+\delta_1)}[\frac{1}{2\delta_1}-\frac{1-e^{(\lambda_1+\lambda_2)t}}{\lambda_1+\lambda_2}-\frac{1-e^{(\lambda_1-\delta_1)t}}{\delta_1-\lambda_1}-\frac{1-e^{(\lambda_2-\delta_1)t}}{\delta_1-\lambda_2}]-\frac{4\rho_2\rho_1\varepsilon_2\delta_2^2}{(\lambda_1+\delta_2)(\lambda_2+\delta_2)}[\frac{1}{2\delta_2}-\frac{1-e^{(\lambda_2+\lambda_2)t}}{\lambda_1+\lambda_2}-\frac{1-e^{(\lambda_1-\delta_2)t}}{\delta_2-\lambda_1}-\frac{1-e^{(\lambda_2-\delta_2)t}}{\delta_2-\lambda_2}].\tag{22}$$

当时间 $t\to\infty$ 时，

$$E(x_1)=E(x_2)=0\,. \tag{23}$$

$$\begin{aligned}D(x_1)=&\frac{\varepsilon_1\rho_1^2\delta_1}{\lambda_1(\lambda_1-\delta_1)}+\frac{\varepsilon_1\rho_1^2\delta_1}{\lambda_2(\lambda_2-\delta_1)}+\frac{\varepsilon_2\rho_3^2\delta_2}{\lambda_1(\lambda_1-\delta_2)}+\\&\frac{\varepsilon_2\rho_3^2\delta_2}{\lambda_2(\lambda_1-\delta_2)}+\frac{4\rho_1\rho_2\varepsilon_1\delta_1^2}{(\lambda_1+\delta_1)(\lambda_2+\delta_1)}[\frac{1}{2\delta_1}-\\&\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}-\frac{1}{\delta_1-\lambda_1}-\frac{1}{\delta_1-\lambda_2}]-\\&\frac{4\rho_3^2\varepsilon_2\delta_2^2}{(\lambda_1+\delta_2)(\lambda_2+\delta_2)}[\frac{1}{2\delta_2}-\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}-\\&\frac{1}{\delta_2-\lambda_1}-\frac{1}{\delta_2-\lambda_2}]\,,\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}D(x_2)=&\frac{\varepsilon_1\rho_4^2\delta_1}{\lambda_1(\lambda_1-\delta_1)}+\frac{\varepsilon_1\rho_4^2\delta_1}{\lambda_2(\lambda_2-\delta_1)}+\\&\frac{\varepsilon_2\rho_2^2\delta_2}{\lambda_1(\lambda_1-\delta_2)}+\frac{\varepsilon_2\rho_1^2\delta_2}{\lambda_2(\lambda_1-\delta_2)}-\\&\frac{4\rho_4^2\varepsilon_1\delta_1^2}{(\lambda_1+\delta_1)(\lambda_2+\delta_1)}[\frac{1}{2\delta_1}-\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}-\\&\frac{1}{\delta_1-\lambda_1}-\frac{1}{\delta_1-\lambda_2}]+\\&\frac{4\rho_2\rho_1\varepsilon_2\delta_2^2}{(\lambda_1+\delta_2)(\lambda_2+\delta_2)}[\frac{1}{2\delta_2}-\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}-\\&\frac{1}{\delta_2-\lambda_1}-\frac{1}{\delta_2-\lambda_2}]\,.\end{aligned} \tag{25}$$

由此可知，环境的随机性会种群的生长过程产生很大影响，使种群密度随机摆动. 但是若考虑长时间随机系统解的形为，可以看到种群密度只在稳定状态附近发生摆动.

3　稳定的参数域

随机种群动力系统一个很重要的概念就是稳定性，如果种群的相互竞争发生在相应确定系统平衡点的吸引域内，那么随机系统将会被平衡点吸引，停留在这个区域内一段时间；如果随机微分系统产生的扰动，会使其偏离该吸引域，造成种群动力系统不稳定，因此随机扰动越强，不稳定性就越大. 通过(24)式和(25)式可知，当时间 $t\to\infty$ 时，种群密度只在稳定状态附近发生摆动，因此，当种群的方差尽可能小时，可以减少两竞争种群灭绝的可能性，使得在随机扰动的环境下保持共存. 由于种群的方差只和系统的参数有关，因此可以通过求得使系统种群方差最小时，这些参数的临界值，从而来估计系统稳定的参数域. 这对于资源管理者来说，在生产和实践都具有很重要的指导意义.

假设内部竞争作用系数 A,D 已知，设 $k=B/C$，记为外部竞争相对强度. 因此，如果能估计保证系统稳定 k 值的范围，当知道 B,C 中任何 1 个参数，均能估计出系统稳定的参数域. 将(7)式代入(24)式和(25)式，可得: $D(x_1)=F(k,A,B,C),D(x_2)=G(k,A,B,C)$,分别对 $F(\cdot),G(\cdot)$ 进行求导，求出使其取得最小值时的 k_1,k_2，则 $k_c=\min(k_1,k_2)$，求解过程均可以用数学软件计算.

下面给出 1 个数值模拟的简单例子.

取 $A=-1/2,D=-5/2,C=-1,\delta_1=0.4,\delta_2=0.3,$ $\varepsilon_1=3,\varepsilon_2=5/2,$ 通过数学软件计算求得 $F(k)=0$ 的 k 值为:

-5.912 097 908, -1.124 401 213,
-0.893 173 739 1, 0.209 997 628 5,
0.210 002 371 5, 1.701 245 078,
0.440 000 000 0 - 0.183 027 237 7e^{-5}*I,
0.440 000 000 0+0.183 027 237 7e^{-5}*I,
2.298 788 713 - 0.216 463 418 9*I,
2.219 185 903 - 0.686 704 471 1e^{-1}*I,
2.219 185 903+0.686 704 4711 e^{-1}*I,
2.298 788 713+0.216 463 418 9*I.

由于 $AD-BC>0$，则 $k<5/4$，故取 k_1=0.210 002 371 5, 且 $F(k)$=5 836 364.223>0, 即证 $k_1=0.210\,002\,371\,5$ 是使得 $F(k)$ 取得最小值时的 k 值.

同理，计算求得使得 $G(k)=0$ 的 k 值为:

-0.887 897 911 8 - 7.066 937 967*I,
-0.887 897 911 8+7.066 937 967*I,
-0.345 0315 201, 0.582 093 423 6,
0.364 657 070 3,

0.460 9450 589 - 0.445 192 984 3*I,
0.460 9450 589+0.445 192 984 3*I,
1.887 709 508,
2.291 299 645 - 0.118 012 998 5*I,
2.291 299 645+0.118 012 998 5*I

取 $k_2 = 0.582\,093\,423\,6$，计算得:

$$G(k) = 64.661\,654\,64 > 0\,,$$

即证 $k_2 = 0.582\,093\,423\,6$ 是使得 $G(k)$ 取得最小值时的 k 值. 最后得:

$$k_c = \min(0.210\,002\,371\,5, 0.582\,093\,423\,6) = 0.210\,002\,371\,5\,.$$

参考文献**:**

[1] Cai G Q, Lin Y K. Stochastic analysis of the Lotka-Volterra model for ecosystems[J]. Physical Review E, 2004, 70(4):1 539-1 755.
[2] Nguyen Huu Du,Vu Hai Sam. Dynamics of a stochastic Lotka-Volterra model perturbed by white noise[J]. J Math Anal Appl, 2006, 324:82-97.
[3] Tapan Kumar Kar. Influence of environmental noises on the Gompertz model of two species fishery[J]. Ecological Modelling, 2004, 173:283-293.
[4] Ram Rup Sarkar, Chattopadhayay J. A technique for estimating maximum harvesting effort in a stochastic fishery model[J]. J Biosci, 2003, 28(4):497-506.
[5] 肖庆宪. Ornstein-Uhlenbeck 过程的参数估计[J]. Chinese Journal of Applied Probability and Statistics, 2005(1):21-27.
[6] 马知恩，周义仓. 常微分方程定性与稳定性方法[M]. 北京：科学出版社, 2001.

Influence of Environmental Noises on Competiveness with the Harvesting Population Model

WU Ai-hua[1], WANG Ting[2], ZHANG Jian-xun[1*]

(1.Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China; 2.Department of Mathematics, China University of Geoscience, Wuhan 430074, China)

Abstract: In this article, we characterize the environment variation with the color noise and construct the stochastic Gompertz model with two populations competing for harvesting. By solving the Linearity stochastic differential equation in the equilibrium, we calculate the expectation and the variance of the two species deviating the equilibrium. At last, we come to the conclusion that, despite the fact that environmental randomness affects the population density, the populations’ growth only fluctuates around the equilibrium as the time elapses. In the end, we estimate the safe parametric space for the purposes of reducing the likelihood of extinction of the species to the minimal.

Key words: Gompertz model; color noise; O-U process; ItôSDE; equilibrium; parametric space

CLC number: O175.11 **Document code:** A

（责任编辑 章践立）