文章编号:1001-5132（2009）04-0519-04

带可变核的多线性分数次积分算子在弱 Hardy 空间上的有界性

张莹莹，陶祥兴*

（宁波大学 理学院，浙江 宁波 315211）

摘要：考虑带可变核的多线性分数次积分算子在弱Hardy空间上的有界性，以及相应的多线性分数次极大算子的有界性，利用多线性分数次积分算子转化为相应的分数次积分，得到了$T_{\Omega,\alpha,A}$和$M_{\Omega,\alpha,A}$的弱型估计.

关键词：带可变核的多线性分数次积分；Lipschitz 空间；弱 Hardy 空间

中图分类号：O174.2 **文献标识码：**A

1 引言及主要结果

可变核的多线性分数次积分算子如下:

$$T_{\Omega,\alpha,A}f(x)=\int_{R^n}\frac{\Omega(x,x-y)}{|x-y|^{n-\alpha+m-1}}R_m(A;x,y)f(y)\mathrm{d}y,$$

其中 $0<\alpha<n$，$\Omega(x,z)\in L^\infty(R^n)\times L^r(S^{n-1})$ $(r\geqslant 1)$，S^{n-1} 是 $R^n(n\geqslant 2)$ 上的单位球面，$R_m(A;x,y)$ 表示定义在 R^n 上，$m-1$ 阶可导的函数 $A(x)$ 在 x 点关于 y 的 m 阶泰勒展开式的余项，即:

$$R_m(A;x,y)=A(x)-\sum_{|y|<m}(1/\gamma!)D^\gamma A(y)(x-y)^\gamma,$$

文中出现的 n, r, m 均属自然数，与之相应的分数次极大算子定义为:

$$M_{\Omega,\alpha,A}f(x)=\sup_{r>0}\int_{|x-y|<r}\Omega(x,x-y)/|r|^{n-\alpha+m-1}\cdot$$
$$R_m(A;x,y)f(y)\mathrm{d}y.$$

众所周知，多线性算子最初是 Calderón 研究奇异积分算子时引入的，而 Bajsanski 和 Coifman 研究了更一般的情形. 最近几年，不少学者在奇异积分算子的基础上，讨论了一些相关算子在不同空间上的有界性. 例如，在文献[1]中讨论了一类次线性算子的有界性；而文献[2]讨论了超奇异 Marcinkiewicz 积分的加权有界性的情况. 而关于与奇异积分算子相关的多线性算子的研究也受到广泛的重视，出现很多成果. 如 Ding Yong[3]于 2001 年证明了当 $D^\gamma A\in L^r(R^n)$ $(1<r\leqslant\infty, |\gamma|=m-1)$，且 $\Omega(x)\in L^s(S^{n-1})$ 是零次齐次函数时，$T_{\Omega,\alpha,A}$ 和 $M_{\Omega,\alpha,A}$ 的加权 (L^p,L^q) 有界性.

2002 年, Wu Qiang 等[4]给出了当 $D^\gamma A\in L^r(R^n)$, $1<r\leqslant\infty, |\gamma|=m-1$ 时，$\Omega(x)\in L^s(S^{n-1})$ 是零次齐次函数 $T_{\Omega,\alpha,A}$ 在 Hardy 空间上的有界性. 2007 年梅春亮等[5]给出了 $T_{\Omega,\alpha,A}$ 在弱 Hardy 空间的 Lipschitz 估计.

对多线性算子的研究，多数是以粗糙核或卷

收稿日期：2008-05-14. 宁波大学学报（理工版）网址: http://3xb.nbu.edu.cn
基金项目：国家自然科学基金（10771110）；宁波市自然科学基金（2006A10090）.
第一作者：张莹莹（1982－），女，浙江宁波人，在读硕士研究生，主要研究方向：调和分析. E-mail: G06C07010111@email.nbu.edu.cn
*通讯作者：陶祥兴（1965－），男，浙江慈溪人，博士/教授，主要研究方向：调和分析. E-mail: taoxiangxing@nbu.edu.cn

积核为研究对象，而在调和分析研究中，带可变核的算子也是大家关注的焦点. 因此笔者考虑带可变核的多线性分数次积分算子在弱 Hardy 空间上的有界性，下面介绍几个定义和符号.

定义 1 设 $\varphi \in C_0^\infty(R^n)$ 中的函数，$\int \varphi(x)\mathrm{d}x \neq 0$，$f_t^* = \sup_{t>0} |(\varphi_t * f)(x)|$，其中 $\varphi_t(x) = t^{-n}\varphi(x/t)$. 如果 $f \in H^{p,\infty}(R^n)$，只要 $f_+^* \in L^{p,\infty}(R^n)$, i.e.，则存在一个常数 $C>0$ 使得:

$$|\{x \in R^n : f_+^*(x) > \beta\}| \leqslant C_p / \beta^p, \beta > 0. \qquad (1)$$

而使得(1)式成立的最小常数 C 就是 f 的弱 H^p 范数，记做 $\|f\|_{H^{p,\infty}}$.

定义 2 对于 $\beta>0$ 的 Lipschitz 空间 $\dot{\Lambda}_\beta$ 定义如下:

$$\dot{\Lambda}_\beta = \{f : \|f\|_{\dot{\Lambda}_\beta} = \sup_{x,h \in R^n} \Delta_h^{[\beta]+1} f(x) / |h|^\beta < \infty\},$$

其中:

$$\Delta_h^1 f(x) = \Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x),$$
$$\Delta_h^{k+1} f(x) = \Delta_h^k f(x+h) - \Delta_h^k f(x), k \geqslant 1.$$

定义 3 若 $\Omega(x,z) \in L^\infty(R^n) \times L^r(S^{n-1})$ $(r \geqslant 1)$，那么 $\omega_r(\delta)$ 表示 $\Omega(x,z)$ 的 r 阶连续积分模:

$$\omega_r(\delta) = \sup_{\|\rho\| \leqslant \delta} \Big(\int_{S^{n-1}} \sup_{x \in R^n} |\Omega(x,\rho z') - \Omega(x,z')|^r \,\mathrm{d}\sigma(z')\Big)^{1/r},$$

其中 ρ 是 R^n 中的旋转变换，$\|\rho\| = \sup_{z' \in S^{n-1}} |\rho z' - z'|$，当 $r=1$ 时，我们记 $\omega_r(\delta)$ 为 $\omega(\delta)$.

带可变核的分数次积分算子记为:

$$T_{\Omega,\alpha} f(x) = \int_{R^n} \Omega(x, x-y) / |x-y|^{n-\alpha} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

与之相应的分数次极大算子定义为:

$$M_{\Omega,\alpha} f(x) = \sup_{r>0} 1/|r|^{n-\alpha} \cdot \int_{|x-y|<r} \Omega(x,x-y) f(y)\,\mathrm{d}y.$$

为了书写方便我们记算子

$$\int_{R^n} |\Omega(x,x-y)| / |x-y|^{n-\alpha} \cdot |f(y)|\,\mathrm{d}y := T_{|\Omega|,\alpha}(|f|)(x).$$

主要结果如下:

定理 1 设 $D^\gamma A \in \dot{\Lambda}_\beta$ $(|\gamma| = m-1, m \geqslant 2)$，若 $0<\alpha<n$, $0<\beta<1$, 而且 $0<\alpha+\beta<n$, $\Omega(x,z) \in L^\infty(R^n) \times L^r(S^{n-1})(r > n/(n-(\alpha+\beta)))$，并且对某些 $\sigma>1$ 有以下不等式成立:

$$\int_0^1 \omega_{n/n-(\alpha+\beta)}(\delta)/\delta(1+|\log\delta|)^\sigma \mathrm{d}\delta < \infty,$$

则存在正常数 C，对任意的 $f \in L^1(R^n) \subset H^{1,\infty}(R^n)$ 和任意的 $\lambda>0$ 有:

$$|\{x \in R^n : |T_{\Omega,\alpha,A} f(x)| > \lambda\}| \leqslant C\Big(\sum_{|\gamma|=m-1} \|D^\gamma A\|_{\dot{\Lambda}_\beta} \|f\|_{H^{1,\infty}} / \lambda\Big)^{n/(n-(\alpha+\beta))}.$$

定理 2 在定理 1 的条件下，存在常数 $C>0$，对任意的 $f \in L^1(R^n) \subset H^{1,\infty}(R^n)$ 和任意的 $\lambda>0$ 有:

$$|\{x \in R^n : |M_{\Omega,\alpha,A} f(x)| > \lambda\}| \leqslant C\Big(\sum_{|\gamma|=m-1} \|D^\gamma A\|_{\dot{\Lambda}_\beta} \|f\|_{H^{1,\infty}} / \lambda\Big)^{n/(n-(\alpha+\beta))}.$$

2 引理和定理的证明

引理 1[6] $A(x)$ 是定义在 R^n 上的函数，且当 $|\gamma| = m$, $D^\gamma A \in L_{loc}^l(R^n)(l>n)$ 时，有:

$$|R_m(A;x,y)| \leqslant |C|x-y|^m \cdot \sum_{|\gamma|=m} \Big(\int_{Q_x^y} |D^\gamma A(z)|^l / (Q_x^y)\,\mathrm{d}z\Big)^{1/l},$$

其中，Q_x^y 是以 x 为中心，直径为 $5\sqrt{n}|x-y|$ 的方体. 常数 $C>0$ 仅于 m, n, l 有关.

引理 2[7] 对于 $0<\beta<1, 1 \leqslant l < \infty$，成立:

$$\|f\|_{\dot{\Lambda}_\beta} \approx \sup_Q (1/|Q|^{1+\beta/n}) \int_Q |f(x) - m_Q(f)|\,\mathrm{d}x \approx \sup_Q (1/|Q|^{\beta/n}) \Big(\int_Q |f(x) - m_Q(f)|^l / |Q|\Big)^{1/l} \mathrm{d}x,$$

其中 $|Q|$ 表示方体 Q 的体积，$m_Q(f)$ 表示函数 f 在 Q 上的积分平均，即 $m_Q(f) = 1/Q \int_Q f(x)\,\mathrm{d}x$.

若 $g \in \dot{\Lambda}_\beta$，$0<\beta<1$，$Q$ 与 Q' 是 R^n 上的 2 个方体，且 $Q' \subset Q$，则

$$|m_{Q'}(g) - m_Q(g)| \leqslant C|Q|^{\beta/n} \|g\|_{\dot{\Lambda}_\beta},$$
$$\sup_{x \in Q} |g(x) - m_Q(g)| \leqslant C|Q|^{\beta/n} \|g\|_{\dot{\Lambda}_\beta}.$$

引理 3[8] $0<\alpha<n$, $\Omega(x,z) \in L^\infty(R^n) L^r(S^{n-1}) \cdot (r > n/(n-\alpha))$，并且对某些 $\sigma>1$ 有以下不等式:

$$\int_0^1 \omega_{n/n-(\alpha+\beta)}(\delta)/\delta(1+|\log\delta|)^{\sigma}\mathrm{d}\delta<\infty,$$

则存在常数 $C>0$，对任意的 $f\in H^{1,\infty}(R^n)$ 和任意的 $\lambda>0$ 有:

$$|\{x\in R^n:|T_{\Omega,\alpha}f(x)|>\lambda\}|\leqslant C(\|f\|_{H^{1,\infty}}/\lambda)^{n/(n-\alpha)}.$$

注 1　由于 $\Omega(x,z)$ 不具有消失性, 在上述条件下, 则对于算子 $T_{|\Omega|,\alpha}(|f|)(x)$ 有类似的结果:

$$|\{x\in R^n:|T_{|\Omega|,\alpha}(|f|)(x)|>\lambda\}|\leqslant C(\|f\|_{H^{1,\infty}}/\lambda)^{n/(n-\alpha)}.$$

引理 **4**　令 Q 表示中心在 x 直径为 r 的方体, 若 $D^{\gamma}A\in\dot{\Lambda}_{\beta}$, $0<\beta<1$, $|\gamma|=m-1$, 那么对 $|x-y|<r$ 时, 有不等式:

$$|R_m(A;x,y)|\leqslant Cr^{\beta}|x-y|^{m-1}\sum_{|\gamma|=m-1}\|D^{\gamma}A\|_{\dot{\Lambda}_{\beta}}$$

证明　若令

$$A_Q(y)=A(y)-\sum_{|\gamma|=m-1}m_Q(D^{\gamma}A)y^{\gamma}/\gamma!,$$

那么可以得到:

$$R_m(A;x,y)=R_m(A_Q;x,y),$$

$$D^{\gamma}A_Q(y)=D^{\gamma}A(y)-m_Q(D^{\gamma}A),\ |y|=m-1,$$

则有引理 1 可以得到:

$$|R_m(A_Q;x,y)|\leqslant|R_{m-1}(A_Q;x,y)|+C\sum_{|\gamma|=m-1}|D^{\gamma}A_Q(y)||x-y|^{m-1}\leqslant C|x-y|^{m-1}\sum_{|\gamma|=m-1}(\int_{Q_x^y}|D^{\gamma}A_Q(z)|^l/(Q_x^y)\mathrm{d}z)^{1/l}+C\sum_{|\gamma|=m-1}|D^{\gamma}A_Q(y)||x-y|^{m-1},$$

其中 Q_x^y 与引理 1 中定义一致, 若 $|x-y|<r$，那么 $Q_x^y\subset 5nQ$. 有引理 2 可得:

$$(\int_{Q_x^y}|D^{\gamma}A_Q(z)|^l/(Q_x^y)\mathrm{d}z)^{1/l}=(\int_{Q_x^y}|D^{\gamma}A(z)-m_Q(D^{\gamma}A)|^l/(Q_x^y)\mathrm{d}z)^{1/l}\leqslant C|Q|^{\beta/n}\|D^{\gamma}A\|_{\dot{\Lambda}_{\beta}}\leqslant Cr^{\beta}\|D^{\gamma}A\|_{\dot{\Lambda}_{\beta}}\cdot$$

$$|D^{\gamma}A_Q(y)|=|D^{\gamma}A(y)-m_Q(D^{\gamma}A)|\leqslant C|Q|^{\beta/n}\|D^{\gamma}A\|_{\dot{\Lambda}_{\beta}}\leqslant Cr^{\beta}\|D^{\gamma}A\|_{\dot{\Lambda}_{\beta}}.$$

那么可以得到:

$$|R_m(A;x,y)|=|R_m(A_Q;x,y)|\leqslant Cr^{\beta}|x-y|^{m-1}\sum_{|\gamma|=m-1}\|D^{\gamma}A\|_{\dot{\Lambda}_{\beta}}.$$

引理 **5**　设 $D^{\gamma}A\in\dot{\Lambda}_{\beta}$ $(|\gamma|=m-1,m\geqslant 2)$，如果 $0<\alpha<n,0<\beta<1,$ 且 $0<\alpha+\beta<n.$ $\Omega(x,z)\in L^{\infty}(R^n)\times L^r(S^{n-1})(r>n/(n-(\alpha+\beta)))$ 存在仅与 m,n,α,β 有关的常数 C，对任意的 $f\in L^1(R^n)\subset H^{1,\infty}(R^n)$ 和任意的 $\lambda>0$ 有:

$$|T_{\Omega,\alpha,A}f(x)|\leqslant C\sum_{|\gamma|=m-1}\|D^{\gamma}A\|_{\dot{\Lambda}_{\beta}}T_{|\Omega|,\alpha+\beta}(|f|)(x).$$

证明　对任意 $x\in R^n$，Q 表示中心在 x 直径为 l 的方体, 其中 $l>0$ 则

$$T_{\Omega,\alpha,A}f(x)=(\int_Q+\int_{Q^c})\Omega(x,x-y)/|x-y|^{n-\alpha+m-1}\cdot R_m(A;x,y)f(y)\mathrm{d}y:=\mathrm{I}+\mathrm{II}.$$

$$|I|\leqslant\sum_{j=0}^{\infty}\int_{2^{-j}Q\backslash 2^{-j-1}Q}|\Omega(x,x-y)|/|x-y|^{n-\alpha+m-1}\cdot|R_m(A;x,y)||f(y)|\mathrm{d}y\leqslant\sum_{j=0}^{\infty}\int_{2^{-j}Q\backslash 2^{-j-1}Q}|\Omega(x,x-y)|/|x-y|^{n-\alpha+m-1}\cdot|R_m(A_{2^{-j}Q};x,y)||f(y)|\mathrm{d}y,$$

其中，$A_{2^{-j}Q}(y)=A(y)-\sum_{|\gamma|=m-1}m_{2^{-j}Q}(D^{\gamma}A)y^{\gamma}/\gamma!$，由引理 4 得: 当 $y\in 2^{-j}Q\backslash 2^{-j-1}Q$ 时 $|x-y|<2^{-j}l$，则 $|R_m(A_{2^{-j}Q};x,y)|\leqslant C(2^{-j}l)^{\beta}|x-y|^{m-1}\sum_{|\gamma|=m-1}\|D^{\gamma}A\|_{\dot{\Lambda}_{\beta}}$.

由于 $|x-y|\geqslant 2^{-j-1}l$，那么 $|x-y|^{\beta}\geqslant 2^{-\beta}(2^{-j}l)^{\beta}$，从而

$$|I|\leqslant C\sum_{|\gamma|=m-1}\|D^{\gamma}A\|_{\dot{\Lambda}_{\beta}}\sum_{j=0}^{\infty}(2^{-j}l)^{\beta}\int_{2^{-j}Q\backslash 2^{-j-1}Q}|\Omega(x,x-y)|/\int_{R^n}|\Omega(x,x-y)|/|x-y|^{n-(\alpha+\beta)}|f(y)|\mathrm{d}y\leqslant C\sum_{|\gamma|=m-1}\|D^{\gamma}A\|_{\dot{\Lambda}_{\beta}}T_{|\Omega|,\alpha+\beta}(|f|)(x).$$

而根据 I 的估计, 对于 II 部分同样也可得到:

$$|\mathrm{II}|\leqslant\sum_{j=0}^{\infty}\int_{2^{-j}Q\backslash 2^{-j-1}Q}|\Omega(x,x-y)|/|x-y|^{n-\alpha+m-1}\cdot R_m(A_{2^{j+1}Q};x,y)||f(y)|\mathrm{d}y\leqslant C\sum_{|\gamma|=m-1}\|D^{\gamma}A\|_{\dot{\Lambda}_{\beta}}T_{|\Omega|,\alpha+\beta}(|f|)(x),$$

其中 $A_{2^{j+1}Q}(y)=A(y)-\sum_{|\gamma|=m-1}m_{2^{j+1}Q}(D^{\gamma}A)y^{\gamma}/\gamma!$，从而可得结果:

$$|T_{\Omega,\alpha,A}f(x)|\leqslant|\mathrm{I}|+|\mathrm{II}|\leqslant$$
$$C\sum_{|\gamma|=m-1}\|D^{\gamma}A\|_{\dot{\Lambda}_\beta}T_{|\Omega|,\alpha+\beta}(|f|)(x).$$

引理 6 设 $0<\alpha<n$, $\Omega(x,z)\in L^{\infty}(R^n)\times L^r(S^{n-1})\cdot(r>n/(n-\alpha))$ 则对任意的 $x\in R^n$ 有: $M_{\Omega,\alpha,A}f(x)\leqslant T_{|\Omega|,\alpha,A}(|f|)(x)$.

证明

$$T_{|\Omega|,\alpha,A}(|f|)(x)=\int_{R^n}|\Omega(x,x-y)|/|x-y|^{n-\alpha+m-1}|\cdot$$
$$|R_m(A;x,y)\|f(y)|\mathrm{d}y\geqslant 1/r^{n-\alpha+m-1}\cdot$$
$$\int_{|x-y|<r}|\Omega(x,x-y)|R_m(A;x,y)f(y)\mathrm{d}y.$$

两边对 $r>0$ 取上确界, 即可证得.

定理 1 的证明 由引理 3 和引理 4 可得:

$$|\{x\in R^n:|T_{\Omega,\alpha,A}f(x)|>\lambda\}|\leqslant\{x\in R^n:|C\cdot$$
$$(\sum_{|\gamma|=m-1}\|D^{\gamma}A\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\|f\|_{H^{1,\infty}}/\lambda)^{n/(n-(\alpha+\beta))}.$$

定理 2 的证明 由引理 5 和定理 1 可得:

$$\{x\in R^n:|M_{\Omega,\alpha,A}f(x)|>\lambda\}|\leqslant|\{x\in R^n:$$
$$T_{|\Omega|,\alpha,A}(|f|)(x)>\lambda\}|\leqslant C(\sum_{|\gamma|=m-1}\|D^{\gamma}A\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\cdot$$
$$\|f\|_{H^{1,\infty}}/\lambda)^{n/(n-(\alpha+\beta))}.$$

参考文献:

[1] 张松艳, 陈琴琴. 一类次线性算子在齐型广义 Orlicz-Campanato 空间上的加权有界性[J]. 宁波大学学报: 理工版, 2008, 21(1):84-88.

[2] 周根娇, 张松艳. 一类超奇异 Marcinkiewicz 积分的加权有界性[J]. 宁波大学学报: 理工版, 2008, 21(3): 364-369.

[3] Ding Yong. A note on Multilinear fractional integrals with rough kernel[J]. Advances in Mathematics, 2001, 30(3): 238-246.

[4] Wu Qiang, Yang Dachun. On fractional Multilinear singular integrals[J]. Math Nachr, 2002, 239(240):215- 235.

[5] 梅春亮, 兰家诚. 多线性分数次奇异积分在弱 Hardy 空间的 Lipschitz 估计[J]. 纯粹数学与应用数学, 2007, 23(2):189-193.

[6] Ding Yong, Lu Shanzhen. Weighted boundedness for a class of rough multilinear operators[J]. Acta Math Sinica, 2001, 17(3):517-526.

[7] Paluszynski M. Characterization of the Besov space via the commutator operator of coifman, rochberg and weiss [J]. Indiana Univ Math J, 1995, 44(1):1-17.

[8] Ding Yong, Lu Shanzhen, Shao Shuanglin. Integral operators with variable kernels on weak Hardy spaces[J]. Math Anal Appl, 2006, 3(17):127-135.

Boundedness of Multilinear Fractional Integral Operators with Variable Kernels on Weak Type Hardy Spaces

ZHANG Ying-ying, TAO Xiang-xing*

(Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: The boundedness is studied for a class of multilinear fractional integral operators with variable kernels and the maximal operator. It is proved that these operators are both bounded on weak type Hardy spaces. A simple way is explored which is closely linked with a class of fractional integral operators.

Key words: multilinear fractional integral operators with variable kernels; Lipschitz spaces; weak type Hardy spaces

CLC number: O174.2 **Document code:** A

（责任编辑 史小丽）