关于 Fibonacci 和 Lucas 数的 Toeplitz 矩阵的谱范数

邓群毅, 岑建苗*
（宁波大学 理学院, 浙江 宁波 315211）

摘要: 利用谱范数与 Frobenius 范数之间的不等式和 Toeplitz 矩阵的表示式, 给出了关于 Fibonacci 和 Lucas 数的 Toeplitz 矩阵的谱范数的上界和下界, 并改进了 Akbulak M 等相关结论中谱范数的上界.

关键词: 谱范数; Toeplitz 矩阵; Fibonacci 数; Lucas 数
中图分类号: O151.21　　**文献标识码:** A　　**文章编号:** 1001-5132（2011）04-0064-04

1 引言及准备

近年来, 特殊矩阵的谱范数受到了很多学者的关注[1-4]. Solak 等[1]找到了 Cauchy-Toeplitz 和 Cauchy-Hankel 矩阵的谱范数的上界与下界. Solak[2-3]定义了 $n\times n$ 循环矩阵 $A=[a_{ij}]$ 和 $B=[b_{ij}]$, 其中 $a_{ij}\equiv F_{(\mathrm{mod}(j-i,n))}$, $b_{ij}\equiv L_{(\mathrm{mod}(j-i,n))}$, 给出了 A 和 B 的谱范数和欧氏范数的一些界. Akbulak 等[4]定义了 $n\times n$ Toeplitz 矩阵 $A=[a_{ij}]$ 和 $B=[b_{ij}]$, 其中 $a_{ij}\equiv F_{i-j}$, $b_{ij}\equiv L_{i-j}$, 找到了 A 和 B 的谱范数的上界与下界.

设 $\{t_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ 为双边无穷级数. 一个 Toeplitz 矩阵为 $n\times n$ 矩阵 $T_n=[t_{ij}]_{i,j=0}^{n-1}$, 其中 $t_{ij}=t_{i-j}$, 即具有如下形式的矩阵

$$T_n=\begin{pmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \cdots & t_{-(n-1)} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & \cdots & t_{-(n-2)} \\ t_2 & t_1 & t_0 & \cdots & t_{-(n-3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n-1} & t_{n-2} & t_{n-3} & \cdots & t_0 \end{pmatrix}.$$

对于 $n\geqslant 1$, Fibonacci 序列 $\{F_n\}_{n\in N}$ 和 Lucas 序列 $\{L_n\}_{n\in N}$ 分别由下面的递推关系定义:

$$F_{n+1}=F_n+F_{n-1}, F_0=0, F_1=1, \tag{1}$$

$$L_{n+1}=L_{k,n}+L_{k,n-1}, L_0=2, L_1=1, \tag{2}$$

如果我们从 $n=0$ 开始, 则 Fibonacci 序列和 Lucas 序列如下:

n	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
F_n	0	1	1	2	3	5	$\cdots$
L_n	2	1	3	4	7	11	$\cdots$

规则(1)式和(2)式可用来向后拓展序列, 因此

$$F_{-1}=F_1-F_0, F_{-2}=F_0-F_{-1},$$
$$L_{-1}=L_1-L_0, L_{-2}=L_0-L_{-1},$$

等等, 这样就产生了序列

n	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
F_{-n}	0	1	-1	2	-3	5	$\cdots$
L_{-n}	2	-1	3	-4	7	-11	$\cdots$

一般地, $F_{-n}=(-1)^{n+1}F_n$, $L_{-n}=(-1)^{n+1}L_n$.

文中约定, M_n 表示复数域上所有 n 阶方阵组成的集合, $M_{m,n}$ 表示复数域上所有 $m\times n$ 矩阵组成的集合.

对于 $A=[a_{ij}]\in M_{m,n}$, $\|A\|_F=[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2]^{1/2}$ 表示矩阵 A 的 Frobenius (或 Euclidean)范数; $\|A\|_2=\sqrt{\lambda_{\max}(A^HA)}$ 表示矩阵 A 的谱范数, 其中 $\lambda_{\max}(A^HA)$ 表示 A^HA 的最大特征值, A^H 为 A 的共轭转置矩阵. 然后有下面的不等式成立:

$$\|A\|_F/\sqrt{n}\leqslant\|A\|_2\leqslant\|A\|_F. \tag{3}$$

文中定义如下的关于 Fibonacci 和 Lucas 数的 Toeplitz 矩阵:

$$A=[F_{i-j}]_{i,j=1}^{n},\quad B=[L_{i-j}]_{i,j=1}^{n},$$

收稿日期: 2011-04-01.　　宁波大学学报（理工版）网址: http://3xb.nbu.edu.cn
第一作者: 邓群毅（1987－）, 男, 浙江遂昌人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 矩阵论. E-mail: sc198727@126.com
*通讯作者: 岑建苗（1959－）, 男, 浙江慈溪人, 教授, 主要研究方向: 代数. E-mail: cjmlx@nbu.edu.cn

我们给出矩阵 A 和 B 的谱范数的上界和下界.

2　主要结果

定理 1　设 $n\times n$ 矩阵 $A=[a_{ij}]$ 满足 $a_{ij}\equiv F_{i-j}$,则有:

$$\|A\|_2\geqslant\begin{cases}\sqrt{2F_n^2/n},\ n\text{为偶数},\\ \sqrt{2(F_n^2-1)/n},n\text{为奇数}.\end{cases}$$

和

$$\|A\|_2\leqslant 2F_{n+1}-2,$$

其中 $\|\cdot\|_2$ 为谱范数, F_n 为第 n 个 Fibonacci 数.

证明　矩阵 A 具有如下形式:

$$A=\begin{pmatrix}F_0 & F_{-1} & F_{-2} & \cdots & F_{1-n}\\ F_1 & F_0 & F_{-1} & \cdots & F_{2-n}\\ F_2 & F_1 & F_0 & \cdots & F_{3-n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ F_{n-1} & F_{n-2} & F_{n-3} & \cdots & F_0\end{pmatrix}.$$

由 Frobenius 范数定义得:

$$\|A\|_F^2=nF_0^2+2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{i}F_j^2,$$

因为

$$F_{i+1}F_i=(F_i+F_{i-1})F_i=F_i^2+F_iF_{i-1}=$$
$$F_i^2+F_{i-1}^2+F_1^2+F_1F_0=\sum_{j=1}^{i}F_j^2,$$

所以

$$\|A\|_F^2=nF_0^2+2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{i}F_j^2=$$
$$2\sum_{i=1}^{n-1}F_{i+1}F_i=2\sum_{j=1}^{n}F_jF_{j-1},$$

因为

$$F_kF_{k+1}+F_{k+1}F_{k+2}=F_{k+1}(F_k+F_{k+2})=$$
$$(F_{k+2}-F_k)(F_{k+2}+F_k)=F_{k+2}^2-F_k^2,$$
$$k=0,1,2,\cdots,n-2,$$

所以

$$\sum_{j=1}^{n}F_jF_{j-1}=\begin{cases}F_n^2,n\text{为偶数},\\ F_n^2-1,n\text{为奇数}.\end{cases}$$

于是得到:

$$\|A\|_F^2=\begin{cases}2F_n^2,n\text{为偶数},\\ 2(F_n^2-1),n\text{为奇数}.\end{cases}$$

由(3)式, 我们有:

$$\|A\|_2\geqslant\begin{cases}\sqrt{2F_n^2/n},n\text{为偶数},\\ \sqrt{2(F_n^2-1)/n},n\text{为奇数}.\end{cases}$$

另一方面, 令矩阵 π_1,π_2 分别为:

$$\pi_1=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\0&0&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&0\\0&0&0&\cdots&0&1\\0&0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix},$$

$$\pi_2=\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&0&0\\1&0&0&\cdots&0&0\\0&1&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&0\\0&0&0&\cdots&1&0\end{pmatrix},$$

则矩阵

$$A=\sum_{i=1}^{n-1}F_{-i}\pi_1^i+\sum_{i=1}^{n-1}F_i\pi_2^i,$$

有:

$$\|A\|_2=\|\sum_{i=1}^{n-1}F_{-i}\pi_1^i+\sum_{i=1}^{n-1}F_i\pi_2^i\|_2\leqslant\|\sum_{i=1}^{n-1}F_{-i}\pi_1^i\|_2+$$
$$\|\sum_{i=1}^{n-1}F_i\pi_2^i\|_2\leqslant\sum_{i=1}^{n-1}F_{-i}\|\pi_1\|_2^i+\sum_{i=1}^{n-1}F_i\|\pi_2\|_2^i,$$

由于

$$\pi_1^H\pi_1=\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&0&0\\0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&0\\0&0&0&\cdots&1&0\\0&0&0&\cdots&0&1\end{pmatrix},$$

$$\pi_2^H\pi_2=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0&0\\0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&0\\0&0&0&\cdots&1&0\\0&0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix},$$

于是

$$\|\pi_1\|_2=1,\|\pi_2\|_2=1,$$

因此, 得到:

$$\|A\|_2 \leqslant 2\sum_{i=1}^{n-1} F_i,$$

利用数学归纳法, 容易证明$\sum_{i=1}^{n-1} F_i = F_{n+1} - 1$, 于是:

$$\|A\|_2 \leqslant 2F_{n+1} - 2.$$

在文献[4]中给出的$\|A\|_2$上界为:

$$\sqrt{(1+F_nF_{n-1})(F_nF_{n-1})}.$$

下面说明我们得到的上界比文献[4]中的要小.

$$\begin{aligned}&\sqrt{(1+F_nF_{n-1})(F_nF_{n-1})} - (2F_{n+1} - 2) >\\ &\quad F_nF_{n-1} - 2F_{n+1} + 2 =\\ &\quad F_nF_{n-1} - 2(F_n + F_{n-1}) + 2 =\\ &\quad (F_n - 2)(F_{n-1} - 2) - 2.\end{aligned}$$

当n比较大时, 一定有:

$$\begin{aligned}&\sqrt{(1+F_nF_{n-1})(F_nF_{n-1})} - (2F_{n+1} - 2) >\\ &\quad (F_n - 2)(F_{n-1} - 2) - 2 > 0.\end{aligned}$$

定理 2 设$n\times n$矩阵$B=[b_{ij}]$满足$b_{ij}\equiv L_{i-j}$, 则有:

$$\|B\|_2 \geqslant \begin{cases}\sqrt{2(L_n^2-4)/n}, n\text{为偶数},\\ \sqrt{2(L_n^2-1)/n}, n\text{为奇数}.\end{cases}$$

和

$$\|B\|_2 \leqslant 2L_{n+1} - 4,$$

其中$\|\cdot\|_2$为谱范数, L_n为第n个 Lucas 数.

证明 矩阵B具有形式

$$B = \begin{pmatrix} L_0 & L_{-1} & L_{-2} & \cdots & L_{1-n}\\ L_1 & L_0 & L_{-1} & \cdots & L_{2-n}\\ L_2 & L_1 & L_0 & \cdots & L_{3-n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ L_{n-1} & L_{n-2} & L_{n-3} & \cdots & L_0\end{pmatrix},$$

由 Frobenius 范数定义得:

$$\|B\|_F^2 = nL_0^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{i} L_j^2.$$

因为

$$\begin{aligned}L_{i+1}L_i &= (L_i + L_{i-1})L_i = L_i^2 + L_iL_{i-1} =\\ &\quad L_iL_i^2 + L_{i-1}^2 + L_1^2 + L_1L_0 = \sum_{j=1}^{i} L_j^2 + 2,\end{aligned}$$

所以

$$\sum_{j=1}^{i} L_j^2 = L_{i+1}L_i - 2,$$

于是得:

$$\begin{aligned}&\|B\|_F^2 = nL_0^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{i} L_j^2 =\\ &\quad 4n + 2\sum_{i=1}^{n-1}(L_{i+1}L_i - 2) = 2\sum_{j=1}^{n} L_jL_{j-1}.\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}&L_kL_{k+1} + L_{k+1}L_{k+2} = L_{k+1}(L_k + L_{k+2}) =\\ &\quad (L_{k+2} - L_k)(L_{k+2} + L_k) = L_{k+2}^2 - L_k^2,\\ &\quad k = 0,1,2,\cdots,n-2,\end{aligned}$$

所以

$$\sum_{j=1}^{n} L_jL_{j-1} = \begin{cases} L_n^2 - 4, n\text{为偶数},\\ L_n^2 + 1, n\text{为奇数}.\end{cases}$$

于是得:

$$\|B\|_F^2 = \begin{cases} 2(L_n^2 - 4), n\text{为偶数},\\ 2(L_n^2 + 1), n\text{为奇数}.\end{cases}$$

由(3)式, 我们有:

$$\|B\|_2 \geqslant \begin{cases}\sqrt{2(L_n^2-4)/n}, n\text{为偶数},\\ \sqrt{2(L_n^2-1)/n}, n\text{为奇数}.\end{cases}$$

另一方面, 令矩阵π_1,π_2分别为:

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\end{pmatrix},$$

则矩阵

$$B = \sum_{i=0}^{n-1} L_{k,-i}\pi_1^i + \sum_{i=1}^{n-1} L_{k,i}\pi_2^i,$$

规定$\pi_1^0 = I_n$, I_n为n阶单位矩阵, 于是

$$\|B\|_2 = \|\sum_{i=0}^{n-1} L_{-i}\pi_1^i + \sum_{i=1}^{n-1} L_i\pi_2^i\|_2 \leqslant$$

$$\|\sum_{i=0}^{n-1} L_{-i}\pi_1^i\|_2 + \|\sum_{i=1}^{n-1} L_i\pi_2^i\|_2 \leqslant$$
$$\sum_{i=0}^{n-1} L_{-i}\|\pi_1\|_2^i + \sum_{i=1}^{n-1} L_i\|\pi_2\|_2^i.$$

由于$\|\pi_1\|_2=1$，$\|\pi_2\|_2=1$，因此，

$$\|B\|_2 \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} L_i + \sum_{i=1}^{n-1} L_i = 2\sum_{i=0}^{n-1} L_i - 2.$$

利用数学归纳法，容易证明$\sum_{i=0}^{n-1} L_i = L_{n+1} - 1$，于是得：

$$\|B\|_2 \leqslant 2L_{n+1} - 4.$$

在文献[4]中给出的$\|B\|_2$上界为：

$$\sqrt{(L_nL_{n-1}-1)(L_nL_{n-1}+2)},$$

下面说明我们得到的上界比文献[4]中的要小.

$$\sqrt{(L_nL_{n-1}-1)(L_nL_{n-1}+2)} - (2L_{n+1}-4) >$$
$$L_nL_{n-1} - 1 - 2L_{n+1} + 4 =$$
$$L_nL_{n-1} - 2(L_n + L_{n-1}) + 3 =$$
$$(L_n - 2)(L_{n-1} - 2) - 1.$$

当 n 比较大时，一定有：

$$\sqrt{(L_nL_{n-1}-1)(L_nL_{n-1}+2)} - (2L_{n+1}-4) >$$
$$(L_n - 2)(L_{n-1} - 2) - 1 > 0.$$

参考文献：

[1] Solak S, Bozkurt D. On the spectral norms of Cauchy-Toeplitz and Cauchy-Hankle matrices[J]. Appl Math Comput, 2003, 140:231-238.

[2] Solak S. On the norms of circulant matrices with the Fibonacci and Lucas numbers[J]. Appl Math Comput, 2005, 160:125-132.

[3] Solak S. On the norms of circulant matrices with the Fibonacci and Lucas numbers[J]. Appl Math Comput, 2007, 190:997-998.

[4] Akbulak M, Bozkurt D. On the norms of Toeplitz matrices involving Fibonacci and Lucas numbers[J]. Hacet J Math Stat, 2008, 37(2):89-95.

On Spectral Norms of Toeplitz Matrices with Fibonacci and Lucas Numbers

DENG Qun-yi, CEN Jian-miao*

(Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: Using the inequality between spectral norm and Frobenius norm and scalar-valued polynomial of Toeplitz matrices, upper and lower bounds for the spectral norms of Toeplitz matrix with Fibonacci and Lucas numbers are given, and the upper bounds for the spectral norms in the paper are improved.

Key words: spectral norm; Toeplitz matrix; Fibonacci number; Lucas number

（责任编辑　史小丽）