一类随机积分微分方程解的稳定性

陈 丽, 胡良根*
(宁波大学 理学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 研究具有变时滞 $r(t)$ 的非线性随机积分-微分方程

$$\mathrm{d}x(t)=-(\int_{t-r(t)}^{t}a(t,s)f(x(s)))\mathrm{d}s\mathrm{d}t+g(t,x(t))\mathrm{d}B(t),t\geqslant 0$$

的解的稳定性问题, 其中在 $x=0$ 的某邻域内满足 $xg(\cdot,x)>0(x\neq 0)$. 不仅使用不动点定理给出了方程解的均方渐近稳定的充分必要条件, 同时给出了一个例子说明了主要结果.

关键词: 随机积分-微分方程; 不动点定理; 均方; 渐近稳定; 变时滞
中图分类号: O177.91; O175.8 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-5132(2011)04-0036-05

1 引言

随机积分-微分方程是一个非常重要的研究领域, 其问题来源于许多非线性化的数学模型, 如期权定价模型、生物系统中的昆虫种群模型. 在过去的一百多年里, 李雅普诺夫方法一直是解决常微分方程、偏微分方程、泛函微分方程和随机微分方程解的稳定性的主要方法, 并且取得了大量创新性的研究成果[1-3]. 然而使用李雅普诺夫方法并不能解决一些特殊的方程. 为了克服此类难点, 最近 Burton 等人使用不动点定理得到了相关的研究结果[4-9].

1928 年, 著名数学家 Volterra 在文献[10]中对带有常数时滞 $r>0$ 的方程:

$$x'(t)=-\int_{t-r}^{t}a(t-s)x(s)\mathrm{d}s, \tag{1}$$

进行了系统的研究, 得到了许多创新性成果.

Levin 在文献[11]考虑了方程:

$$x'(t)=-\int_{t-r}^{t}a(t,s)g(x(s))\mathrm{d}s, \tag{2}$$

其中, $r>0$ 是 1 个正常数, 获得了许多解的存在性及相关性质.

最近, Burton[12]使用不动点定理研究了方程:

$$x'(t)=-\int_{t-r(t)}^{t}a(t,s)g(s,x(s))\mathrm{d}s, \tag{3}$$

的解的渐近稳定性, 其中, $r(t)\geqslant 0,t-r(t)$ 单调增长且在 $x=0$ 的某个邻域内有 $xg(\cdot,x)>0(x\neq 0)$.

在 2010 年, Luo[13]使用不动点定理考虑随机 Volterra-Levin 方程的指数稳定性.

需要注意到的是, 使用不动点定理来研究带有变时滞的随机积分-微分方程的解的稳定性问题未见有研究成果. 笔者使用不动点定理研究带有变时滞的随机积分-微分方程为:

$$\mathrm{d}x(t)=-(\int_{t-r(t)}^{t}a(t,s)f(x(s))\mathrm{d}s)\mathrm{d}t+ g(t,x(t))\mathrm{d}B(t),t\geqslant 0, \tag{4}$$

的解的稳定性问题, 其中, $r(t)$ 为变时滞, 在 $x=0$ 的某邻域内有 $xg(\cdot,x)>0(x\neq 0)$. 笔者给出了方程解的均方渐近稳定的充分必要条件, 同时举例验证了文中的结论.

2 预备知识和主要结论

设 (Ω,F,P) 是带有域流 $\{F_t\}_{t\geqslant 0}$ 的完备度量空间, 其中 $\{F_t\}_{t\geqslant 0}$ 满足正常条件, 即 F_t 是右连续的, 并且 F_0 包含所有的 P-零集. 设 $\{B(t):t\geqslant 0\}$ 是定义在 (Ω,F,P) 上的标准布朗运动. 设 $L>0$, $C([-L,0];R)$ 为所有连续泛函 $\phi:[-L,0]\to R$ 全体组成的集合, 其范数为 $\|\phi\|=\sup\limits_{-L\leqslant\theta\leqslant 0}|\phi(\theta)|$. 任取 R 的

收稿日期: 2011-03-11. 宁波大学学报(理工版)网址: http://3xb.nbu.edu.cn
基金项目: 宁波市自然科学基金(2010A610100); 宁波大学学科项目(xkl11044); 宁波大学研究生科研创新基金(G11JA010).
第一作者: 陈 丽(1987-), 女, 山西长治人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 随机微分方程、非线性泛函分析. E-mail: cllively@163.com
*通讯作者: 胡良根(1977-), 男, 江西临川, 博士/副教授, 主要研究方向: 非线性泛函分析及微分方程. E-mail: hulianggen@nbu.edu.cn

一个闭子区间 $[a,b]$，设 $C([a,b];R)$ 是一个连续泛函 $\phi:[a,b]\to R$ 空间.

引理 1 [14] 以下不等式成立:

(i) $(x+y)^p \leqslant (1+\varepsilon)^{p-1}(x^p+\varepsilon^{1-p}y^p), \varepsilon>0$;

(ii) $(\sum_{i=1}^{n} x_i)^p \leqslant C_p \sum_{i=1}^{n} x_i^p$，当 $0<p\leqslant 1$ 时，$C_p=1$，当 $p\geqslant 1$ 时，$C_p=n^{(p-1)}$.

下面考虑带有变时滞 $r(t)$ 的积分-微分方程:

$$\begin{cases} \mathrm{d}x(t)=-(\int_{t-r(t)}^{t} a(t,s)f(x(s))\mathrm{d}s)\mathrm{d}t+ \\ \qquad g(t,x(t))\mathrm{d}B(t), t\geqslant 0 \\ x(s)=\psi(s)\in C([-L,0],R), \\ \qquad -L\leqslant s\leqslant 0, \end{cases} \tag{5}$$

其中，$r\in C(R^+;R^+)$，当 $t\to\infty$ 时，$t-r(t)\to\infty$；$a\in C([-L,\infty)\times[-L,\infty);R)$，$L:=\max_{t\geqslant 0}\{t-r(t)\}$，$f\in C(R;R)$，$g\in C(R^+\times R;R)$.

显然(5)式可以变形为:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x(t)=&[G(t,t-r(t))(1-r'(t))f(x(t-r(t)))]\mathrm{d}t+ \\ &\mathrm{d}(\int_{t-r(t)}^{t} G(t,s)f(x(s))\mathrm{d}s)+ \\ &g(t,x(t))\mathrm{d}B(t), \end{aligned} \tag{6}$$

其中，$G(t,s):=\int_t^s a(u,s)\mathrm{d}u$，

$$G(t,t-r(t)):=\int_t^{t-r(t)} a(u,t-r(t))\mathrm{d}u .$$

引理 2 [13] 在 $[0,T]$ 上，如果 $x(t)$ 是(6)式的解，则 $x(t)$ 是方程:

$$\begin{aligned} x(t)=&e^{-\int_0^t v(u)\mathrm{d}u}[\psi(0)-\int_{-r(0)}^{0}(G(0,u)+ \\ &v(u))f(\psi(u))\mathrm{d}u]+\int_{t-r(t)}^{t}(G(t,u)+v(u))\cdot \\ &f(x(u))\mathrm{d}u+\int_0^t e^{-\int_s^t v(u)\mathrm{d}u}[G(s,s-r(s))+ \\ &v(s-r(s))]f(x(s-r(s)))(1-r'(s))\mathrm{d}s- \\ &\int_0^t e^{-\int_s^t v(u)\mathrm{d}u}v(s)\int_{s-r(s)}^{s}[G(s,u)+v(u)]\cdot \\ &f(x(u))\mathrm{d}u\mathrm{d}s+\int_0^t e^{-\int_s^t v(u)\mathrm{d}u}[x(s)-f(x(s))]\cdot \\ &v(s)\mathrm{d}s+\int_0^t e^{-\int_s^t v(u)\mathrm{d}u}g(s,x(s))\mathrm{d}B(s), \end{aligned} \tag{7}$$

的解，其中，$v\in C([-L,\infty),R)$ 是任意连续函数；相反，如果 $x(t)$ 在 $[-L,0]$ 上等于 $\psi(t)$，在 $[0,\tau]$ 上是(7)的解，则 $x(t)$ 在 $[0,\tau]$ 是(6)式的解.

定理 1 假设存在常数 $\alpha\in(0,1)$，$K_1>0$，$K_2>0$ 和 1 个连续函数 $v\in C([0,\infty);R)$，使下列条件成立:

(i) $|f(x)-f(y)|\vee|(x-f(x))-(y-f(y))|\leqslant K_1|x-y|$；$|g(t,x)-g(t,y)|\leqslant K_2|x-y|$；

(ii) $\liminf_{t\to\infty}\int_0^t v(u)\mathrm{d}u>-\infty$；

(iii)
$$\begin{aligned} &K_1(\int_{t-r(t)}^{t}|G(t,u)+v(u)|\mathrm{d}u+ \\ &\int_0^t e^{-\int_s^t v(u)\mathrm{d}u}|G(s,s-r(s))+v(s-r(s))|\cdot \\ &|1-r'(s)|\mathrm{d}s+\int_0^t e^{-\int_s^t v(u)\mathrm{d}u}|v(s)|\cdot \\ &\int_{s-r(s)}^{s}|G(s,u)+v(u)|\mathrm{d}u\mathrm{d}s+ \\ &\int_0^t e^{-\int_s^t v(u)\mathrm{d}u}|v(s)|\mathrm{d}s)+ \\ &K_2(\int_0^t e^{-2\int_s^t v(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s)^{1/2}\leqslant\alpha . \end{aligned}$$

则(5)式的零解为均方渐近稳定的充分必要条件为当 $t\to\infty$ 时，有 $\int_0^t v(u)\mathrm{d}u\to\infty$.

证明 设 $(B,\|\cdot\|_B)$ 为所有有界连续 F_0-适应过程 $\varphi(t,\omega):[-L,\infty)\times\Omega\to R$ 组成的 Banach 空间，其上确界范数为 $\|\varphi\|_B:=\sup_{t\geqslant 0}E|\varphi(t)|^2$. 设 $S:=\{\varphi:[-L,\infty)\to R\,|\,\varphi\in B$; 当 $t\in[-L,0]$ 时，$\varphi(t)=\psi(t)$; 当 $t\to\infty$ 时，$E|\varphi(t,\omega)|^2\to 0\}$，则 (S,ρ) 是一个完备度量空间，其中，ρ 为上确界度量，即对任给 $x,y\in S$，有:

$$\rho(x,y)=E\sup_{s\in[0,t]}|x(s)-y(s)|^2 .$$

定义 映射 $T:S\to S$ 为 $(Tx)(t)=\psi(t),t\in[-L,0]$，以及

$$\begin{aligned} (Tx)(t)=&e^{-\int_0^t v(u)\mathrm{d}u}[\psi(0)-\int_{-r(0)}^{0}(G(0,u)+v(u))\cdot \\ &f(\psi(u))\mathrm{d}u]+\int_{t-r(t)}^{t}(G(t,u)+v(u))\cdot \\ &f(x(u))\mathrm{d}u+\int_0^t e^{-\int_s^t v(u)\mathrm{d}u}[G(s,s-r(s))+ \\ &v(s-r(s))]f(x(s-r(s)))(1-r'(s))\mathrm{d}s- \\ &\int_0^t e^{-\int_s^t v(u)\mathrm{d}u}v(s)\int_{s-r(s)}^{s}[G(s,u)+v(u)]\cdot \\ &f(x(u))\mathrm{d}u\mathrm{d}s+\int_0^t e^{-\int_s^t v(u)\mathrm{d}u}[x(s)-f(x(s))]\cdot \\ &v(s)\mathrm{d}s+\int_0^t e^{-\int_s^t v(u)\mathrm{d}u}g(s,x(s))\mathrm{d}B(s):= \\ &\sum_{i=1}^{6}O_i(t),t\geqslant 0. \end{aligned} \tag{8}$$

充分性分 4 个步骤进行:

步骤 1: 任取 $x\in S,t_1\geqslant 0$，取 $|\xi|$ 为充分小. 由

引理 1 可知:

$$E\,|(Tx)(t_1+\xi)-(Tx)(t_1)|^2\leqslant 6\sum_{i=1}^{6}E\,|O_i(t_1+r)-O_i(t_1)|^2,$$

容易得当 $\xi\to 0$ 时，有 $E\,|O_i(t_1+\xi)-O_i(t_1)|^2\to 0$, $i=1,2,3,4,5$.

另外, 由 hölder-Davis-Gundy 不等式可知, 当 $\xi\to 0$ 时, 有:

$$E\,|O_6(t_1+\xi)-O_6(t_1)|^2\leqslant 2E\int_0^{t_1}e^{-2\int_s^{t_1}v(u)\mathrm{d}u}\cdot(e^{-\int_{t_1}^{t_1+\xi}v(u)\mathrm{d}u}-1)^2g^2(s,x(s))\mathrm{d}s+2E\int_{t_1}^{t_1+\xi}e^{-2\int_s^{t_1+\xi}v(u)\mathrm{d}u}g^2(s,x(s))\mathrm{d}s\to 0,$$

则 T 在 $[0,+\infty]$ 上是均方连续的.

步骤 2: 证明 $T(S)\subset S$. 对于 $i=1,2,3,4,5$ 及 $t\to\infty$, 显然有 $E\,|O_i(t)|^2\to 0$ 成立.

下面证明当 $t\to\infty$ 时, $E\,|O_6(t)|^2\to 0$. 事实上, 当 $t\to\infty$ 时, 有 $E\,|x(t)|^2\to 0$, 因此对任意的 $\varepsilon>0$, 总存在常数 $T_1>0$, 使得当 $s\geqslant T_1$ 时, 有 $E\,|x(s)|^2<\varepsilon$. 从而可由 Burkhöder-Davis-Gundy 不等式得到以下方程:

$$E\,|O_6(t)|^2\leqslant K_2^2E\int_0^t e^{-2\int_s^t v(u)\mathrm{d}u}x^2(s)\mathrm{d}s\leqslant K_2^2E(\sup_{s\geqslant -L_1}|x(s)|^2)\int_0^{T_1}e^{-2\int_s^t v(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s+K_2^2\varepsilon\int_{T_1}^t e^{-2\int_s^t v(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s.$$

又因为 $\int_0^t v(u)\mathrm{d}u\to\infty(t\to\infty)$, 故存在常数 $T_2>T_1$, 使得当 $t>T_2$ 时, 有:

$$K_2^2E(\sup_{s\geqslant -L_1}|x(s)|^2)\int_0^{T_1}e^{-2\int_s^t v(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s<\varepsilon,$$

从而由条件(iii)可得当 $t\to\infty$ 时, $E\,|O_6(t)|^2\to 0$.

步骤 3: T 是 1 个压缩映象. 由条件(iii)可得, 存在 1 个常数 $M>0$, 使得:

$$(1+\frac{1}{M})K_1^2\{\int_{t-r(t)}^t|G(t,u)+v(u)|\,\mathrm{d}u+\int_0^t e^{-\int_s^t v(u)\mathrm{d}u}|G(s,s-r(s))+v(s-r(s))|\cdot|1-r'(s)|\,\mathrm{d}s+\int_0^t e^{-\int_s^t v(u)\mathrm{d}u}|v(s)|\cdot\int_{s-r(s)}^s|G(s,u)+v(u)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}s+\int_0^t e^{-\int_s^t v(u)\mathrm{d}u}\cdot|v(s)|\,\mathrm{d}s\}^2+(1+M)K_2^2\{\int_0^t e^{-2\int_s^t v(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s\}\leqslant\alpha^2<1. \tag{9}$$

则,

$$E\sup_{s\in[0,t]}|(Tx)(s)-(Ty)(s)|^2\leqslant E\sup_{s\in[0,t]}|x(s)-y(s)|^2\cdot\sup_{s\in[0,t]}\{(1+\frac{1}{M})\cdot K_1^2(\int_{s-r(s)}^s|G(s,u)+v(u)|\,\mathrm{d}u+\int_0^s e^{-\int_z^s v(u)\mathrm{d}u}|G(z,z-r(z))+v(z-r(z))|\cdot|1-r'(z)|\,\mathrm{d}z+\int_0^s e^{-\int_z^s v(u)\mathrm{d}u}|v(z)|\cdot\int_{z-r(z)}^z|G(z,u)+v(u)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}z+\int_0^s e^{-\int_z^s v(u)\mathrm{d}u}\cdot|v(z)|\,\mathrm{d}z)^2+(1+M)K_2^2(\int_0^s e^{-2\int_z^s v(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}z)\}\leqslant\alpha^2E\sup_{s\in[0,t]}|x(s)-y(s)|^2,$$

意味着 T 是一个压缩映象. 由 Banach 压缩映象原理可知, T 在 S 中存在唯一不动点 $x(t)$, 并且当 $t\to\infty$ 时, 有 $E\,|x(t)|^2\to 0$.

步骤 4: 证明(5)式的零解是均方稳定的. 对任给的 $\varepsilon>0$, 选择 $0<\delta<\varepsilon$. 假设 $x(t)=x(t,0,\psi)$ 是(5)式的解且 $\|\psi\|^2<\delta$, 则 $x(t)=(Tx)(t)$. 由已知条件可知, 当 $t\in[-L,0]$ 时, 有 $E\,|x(t)|^2<\varepsilon$. 下面证明对所有的 $t>-L$ 有 $E\,|x(t)|^2<\varepsilon$. 若不然, 则存在 1 个常数 $\tau^*>0$, 使得 $E\,|x(\tau^*)|^2=\varepsilon$, 且当 $-L\leqslant s<\tau^*$ 时, 有 $E\,|x(s)|^2<\varepsilon$. 由于 $\int_0^t v(u)\mathrm{d}u\to\infty(t\to\infty)$, 故存在 1 个常数 $\delta>0$, 使得:

$$2e^{-2\int_0^{t^*}v(u)\mathrm{d}u}K_1^2\delta(1-\int_{-L}^0|v(u)+G(0,u)|\,\mathrm{d}u)^2+2\alpha^2\varepsilon<\varepsilon,$$

又由(8)式可得:

$$E\,|x(\tau^*)|^2\leqslant 2e^{-2\int_0^{\tau^*}v(u)\mathrm{d}u}K_1^2\|\psi\|^2(1-\int_{-r(0)}^0|v(u)+G(0,u)|\,\mathrm{d}u)^2+2E(\int_{\tau^*-r(\tau^*)}^{\tau^*}(G(\tau^*,u)+v(u))\cdot f(x(u))\mathrm{d}u-\int_0^{\tau^*}e^{-\int_s^{\tau^*}v(u)\mathrm{d}u}v(s)\int_{s-r(s)}^s[G(s,u)+v(u)]f(x(u))\mathrm{d}u\mathrm{d}s+\int_0^{\tau^*}e^{-\int_s^{\tau^*}v(u)\mathrm{d}u}[x(s)-f(x(s))]v(s)\mathrm{d}s+\int_0^{\tau^*}e^{-\int_s^{\tau^*}v(u)\mathrm{d}u}g(s,x(s))\mathrm{d}B(s))^2\leqslant 2e^{-2\int_0^{\tau^*}v(u)\mathrm{d}u}K_1^2\delta[1-$$

$$\int_{-r(0)}^{0}|v(u)+G(0,u)|\mathrm{d}u]^2+2\alpha^2\varepsilon<\varepsilon. \quad (10)$$

因此(5)式的零解是均方渐近稳定的.

必要性 用反证法. 假设结论不成立, 则由条件(ii)可得存在 1 个子序列$\{t_n\}(t_n\to\infty(n\to\infty))$, 并存在 1 个$l\in R$, 使得$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{t_n}v(u)\mathrm{d}u=l$. 选择 1 个正常数$J$满足不等式$-J\leqslant\int_0^{t_n}v(u)\mathrm{d}u\leqslant J$.

定义

$$H_1(s):=|v(s)|\int_{s-r(s)}^{s}|v(u)+G(s,u)|\mathrm{d}u\mathrm{d}s+$$
$$|v(s-r(s))+G(s,s-r(s))||1-r'(s)|+$$
$$|v(s)|,s\geqslant 0.$$

由条件(iii)可得$\int_0^{t_n}e^{-\int_s^{\cdot}v(u)\mathrm{d}u}H_1(s)\mathrm{d}s\leqslant\alpha$, 意味着$\int_0^{t_n}e^{\int_0^s v(u)\mathrm{d}u}H_1(s)\mathrm{d}s\leqslant\alpha e^{\int_0^{t_n}v(u)\mathrm{d}u}\leqslant e^J$. 因此序列$\{\int_0^{t_n}e^{\int_0^s v(u)\mathrm{d}u}H_1(s)\mathrm{d}s\}$是有界的, 从而存在 1 个收敛的子序列. 为简便, 仍取此序列(否则取 1 个子序列即可), 假设有$\lambda_1\in R^+$, 使$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{t_n}e^{\int_0^s v(u)\mathrm{d}u}H_1(s)\mathrm{d}s=\lambda_1$. 并且存在 1 个足够大的常数$k$, 使得:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{t_k}^{t_n}e^{\int_0^s v(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s}H_1(s)\leqslant\delta_0/10K-2\alpha, \quad (11)$$

其中, $K:=\sup\limits_{t\geqslant 0}e^{-\int_0^t v(u)\mathrm{d}u}$, $\delta_0>0$且$10K\delta_0e^J+\alpha<1$.

下面考虑(5)式的解$x(t)=x(t,t_k,\psi)$, 其中, $|\psi(t_k)|^2=\delta_0$, 并且当$s\leqslant t_k$时, $|\psi_1(s)|^2<\delta_0$. 由已知条件可以定义$F_1(t_k)$满足如下不等式:

$$F_1(t_k):=x(t_k)-\int_{t_k-r(t_k)}^{t_k}[v(u)+$$
$$G(t_k,u)]f(x(u))\mathrm{d}u\geqslant 1/2\delta_0,$$

由(8)式和$x(t)=(Tx)(t)$可知, 当$t\geqslant t_k$时, 有:

$$E|x(t_n)-\int_{t_n-r(t_n)}^{t_n}|v(u)+G(t-n,u)|f(x(u))\mathrm{d}u|\geqslant$$
$$E|x(t_k)-\int_{t_k-r(t_k)}^{t_k}(G(t_k,u)+v(u))f(x(u))\mathrm{d}u-$$
$$\int_{t_k}^{t_n}e^{-\int_s^{t_k}v(u)\mathrm{d}u}H_1(s)\mathrm{d}s-\alpha^2|^2\, e^{-2\int_{t_k}^{t_n}v(u)\mathrm{d}u}\geqslant$$
$$1/2\delta_0e^{-2\int_{t_k}^{t_n}v(u)\mathrm{d}u}\{1/2\delta_0-$$
$$2K\int_{t_k}^{t_n}e^{\int_0^s v(u)\mathrm{d}u}H_1(s)\mathrm{d}s-2\alpha\},$$

又由(11)式可得, 当$t\to\infty$时, 有:

$$E|x(t_n)-\int_{t_n-r(t_n)}^{t_n}(v(u)+B(s,u))f(x(u))\mathrm{d}u|^2\geqslant$$
$$3/20\delta_0^2e^{-2\int_{t_k}^{t_n}v(u)\mathrm{d}u}\geqslant 3/20\delta_0^2e^{-2J}>0. \quad (12)$$

另一方面, 因为(5)式的零解是均方渐近稳定的, 当$t\to\infty$时, 有$E|x(t)|^2=E|x(t,t_k,\psi_1)|^2\to 0$. 从而由条件(iii)和$t_n-r(t_n)\to\infty\ (n\to\infty)$, 可得当$n\to\infty$时, $E|x(t_n)-\int_{t_n-r(t_n)}^{t_n}(v(u)+G(s,u))f(x(u))\cdot\mathrm{d}u|^2\to 0$与(12)式矛盾. 因此, 当$t\to\infty$时, 有$\int_0^t v(u)\mathrm{d}u\to\infty$成立.

例 在(6)式中令$r(t)=e^{-\theta t},v(t)=\theta,a(t,u)=\beta$, 其中, θ,β为待定常数. 则,

$$G(t,u):=\int_t^u a(\omega,u)\mathrm{d}\omega=\beta(u-t);$$
$$G(t,t-r(t)):=\int_t^{t-r(t)}a(u,t-r(t))\mathrm{d}u=-\beta e^{-\theta t},$$

且,

$$\int_{t-r(t)}^{t}|G(t,u)+v(u)|\mathrm{d}u\leqslant\int_{t-e^{-\theta t}}^{t}(\beta t-\beta u+$$
$$\theta)\mathrm{d}u=\beta/2e^{-2\theta t}+\theta e^{-\theta t};$$
$$\int_0^t e^{-\int_s^t v(u)\mathrm{d}u}|G(s,s-r(s))+v(s-r(s))||1-$$
$$r'(s)|\mathrm{d}s=-1+e^{-\theta t}+\beta te^{-\theta t}+\theta^2te^{-\theta t}+$$
$$\beta e^{-2\theta t}-\beta e^{-\theta t};$$
$$\int_0^t e^{-\int_s^t v(u)\mathrm{d}u}|v(s)|\int_{s-r(s)}^{s}|G(s,u)+v(u)|\mathrm{d}u\mathrm{d}s\leqslant$$
$$-\beta/2e^{-2\theta t}+\beta/2e^{-\theta t}+\theta^2te^{-\theta t};$$
$$\int_0^t e^{-\int_s^t v(u)\mathrm{d}u}|v(s)|ds=\int_0^t e^{-\int_s^t\theta\mathrm{d}u}\theta\mathrm{d}s=1-e^{-\theta t},$$

则,

$$A:=\int_{t-r(t)}^{t}|G(t,u)+v(u)|\mathrm{d}u+\int_0^t e^{-\int_s^t v(u)\mathrm{d}u}\cdot$$
$$|G(s,s-r(s))+v(s-r(s))||1-r'(s)|\mathrm{d}s+$$
$$\int_0^t e^{-\int_s^t v(u)\mathrm{d}u}|v(s)|\int_{s-r(s)}^{s}|G(s,u)+$$
$$v(u)|\mathrm{d}u\mathrm{d}s+\int_0^t e^{-\int_s^t v(u)\mathrm{d}u}|v(s)|\mathrm{d}s=$$
$$\theta e^{-\theta t}+\beta te^{-\theta t}-\beta e^{-2\theta t}+3/2\beta e^{-\theta t}. \quad (13)$$

对(13)式求导, 可得$A':=-\theta^2e^{-\theta t}+\beta e^{-\theta t}-\theta\beta te^{-\theta t}+2\theta\beta e^{-2\theta t}-3/2\theta\beta\leqslant(-\theta^2+\beta+\theta\beta/2)e^{-\theta t}-\theta\beta te^{-\theta t}$.

取$\theta=1/2,\beta=1/6$, 则$A'<0$. 故A为单调递减, 并在$t=0$处取得最大值为$\theta+\beta/2=1/2+1/12=7/12$.

此外,

$$B:=(\int_0^t e^{-2\int_s^t v(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s)^{1/2}=(1/2\theta(1-e^{-2\theta t}))^{1/2}\leqslant (1/2\theta)^{1/2}=1.$$

令 $f(x)=x/2, g(t,x)=x/3$，则 $K_1=1/2, K_2=1/3$，显然 $K_1A+K_2B=1/2\times 7/12+1/3\times 1=15/24:=\alpha<1$.

定理 1 的条件(i)、(ii)、(iii)满足.

参考文献:

[1] Mao xuerong. Stability of Stochastic differential equations with respect to semimartingales[M]. New York: Longman Scientific and Technical, 1991.

[2] Mao xuerong. Exponential stability of stochastic differential equations[M]. New York: Marcle Dekker, 1994.

[3] Mao xuerong. Stochastic differential equations and applications[M]. New York: Horwood, 1997.

[4] Burton T A. Stability by fixed point theory or Liapunov’s theory[J]. A comparison, Fixed Point Theory, 2003(4): 15-32.

[5] Burton T A, Furumochi T, A note on stability by Schauder’s theorem[J]. Funkcialaj Ekvacioj, 2001, 44:73-82.

[6] Furumochi T. Asymtotic behavior of solutions of some functional differntial equations by Schauder’s theorem[J]. Electron J Qual Theory Differ Equ, 2004, 10:1-11.

[7] Furumochi T. Stability in FDSs by Schauder’s theorem [J]. Nonlinear Anal, 2005, 27:217-224.

[8] Raffoul Y N. Stability in neutral nonlinear differential equations with functional delays using fixed-point theory [J]. Math Comput Modelling, 2004, 40:691-700.

[9] Zhang Bo. Fixed points and stability in differential equations with variable delays[J]. Nonlinear Anal, 2005 (3):233-242.

[10] Volterra V. Sur la théorie mathématique des phénomènes héréditaires[J]. J Math Pures Appl, 1928, 7(9):249-298.

[11] Levin J J, Nohel J A. On a nonlinear delay equation[J]. J Math Anal Appl, 1964, 8:31-44.

[12] Burton T A, Becker L C. Stability, fixed points and inverses of delays[J]. Pric Roy Soc Edinburgh, 2006, 53: 245-275.

[13] Luo jiaowan. Fixed points and exponential stability for stochastic Volterra-Levin equations[J]. J Comput Appl Math, 2010, 234(3):934-940.

[14] 胡适耕. 随机微分方程[M]. 北京: 科学出版社, 2008.

Solution Stability for a Class of Integral-differential Equations

CHEN Li, HU Liang-gen*

(Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: In this paper, the authors investigate the solution stability issues concerning nonlinear stochastic integral-differential equations given as

$$\mathrm{d}x(t)=-(\int_{t-r(t)}^{t}a(t,s)f(x(s)))\mathrm{d}s\mathrm{d}t+g(t,x(t))\mathrm{d}B(t), t\geqslant 0$$

with variable delay $r(t)$, where $xg(\cdot,x)>0(x\neq 0)$ in a neighborhood of $x=0$. Using the fixed point theorem, the sufficient and necessary conditions are given to ensure the solution of stochastic integral-differential equation to be mean square asymptotically stable. Meanwhile, one example is offered to help explain the obtained results.

Key words: Stochastic integral-differential equation; fixed point theory; mean square; asymptotically stable; variable delay

（责任编辑　章践立）