非齐次散度型椭圆方程的正则性

李芳芳 [1]，张松艳 [2*]
（1.宁波大学 理学院, 浙江 宁波 315211; 2.浙江科技学院 经济管理学院, 浙江 杭州 310023）

摘要: 从弱解的概念出发, 经过推理计算, 讨论了椭圆方程 $-\mathrm{div}(A\nabla u)+b\nabla u+Vu=f$ 弱解的一阶导数和二阶导数的积分估计, 其中 V , V^2 , $|b|^2\in Kato(\Omega)$, $f\in L^2(\Omega)$, 从而推广了目前已有的结果.

关键词: 弱解; Kato 类; 正则性; H^2 估计
中图分类号: O175.23　　文献标识码: A　　文章编号: 1001-5132（2011）03-0045-03

椭圆方程弱解的正则性包括弱解的光滑性及其各阶导数的积分估计, 这些正则性往往依赖该椭圆方程的系数正则条件, 系数具有的光滑性不同决定了椭圆方程弱解的存在性、连续性、光滑性等方面的差异. 对具有光滑系数的椭圆方程的弱解的正则性研究已得出近乎完美的结论[1-2]. 近年来, 由于实际应用的需要和研究的深入, 人们对带有粗糙系数的椭圆方程解的性质产生了浓厚兴趣, 并得到了一些结果[3-4]. 其中 Kurata 在文献[4]中研究了 $-\mathrm{div}(A\nabla u)+b\nabla u+Vu=0$ 这一种方程弱解的局部有界性和连续性, 同时还给出了方程解的 Harnack 不等式. 该方程系数满足:

(a) $A(x)=(a_{ij}(x))$, $a_{ij}(x)=a_{ji}(x)$.

(b) 存在两正常数 $\eta\geqslant\lambda$, 使得对于任意的 $x\in\Omega,\xi\in R^n$, 有 $\lambda|\xi|^2\leqslant a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\leqslant\eta|\xi|^2$.

(c) V , $|b|^2\in k_n^{loc}(\Omega)$.

最近, 陶祥兴及其研究团队[5-8]对含 Kato 类粗糙系数的 Schrodinger 型方程在 Lipschitz 区域上的边值问题的存在性和正则性估计给出了一系列结果. 稍早结果也可见贾厚玉和金永阳等人工作[9-10]. 笔者主要是在已有结果的基础上研究有界开区域上一类具有粗糙系数的椭圆方程弱解 u 的正则性问题. 假设 Ω 是 $R^n(n\geqslant 3)$ 中的有界开区域, V , V^2 , $|b|^2$ 属于 Kato 类, 考虑在区域 Ω 上的如下非齐次散度型椭圆方程:

$$-\mathrm{div}(A\nabla u)+b\nabla u+Vu=f\,, \tag{1}$$

其中系数满足:

(1) $A(x)=(a_{ij}(x))$, $a_{ij}(x)=a_{ji}(x)$.

(2) 存在正的常数 $\eta\geqslant\lambda$, 使得对任意的 $x\in\Omega$, $\xi\in R^n$, 有 $\lambda|\xi|^2\leqslant a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\leqslant\eta|\xi|^2$.

(3) 存在 $l>0$, 使得对于任意的 x , $y\in\Omega$, 有 $|a_{ij}(x)-a_{ij}(y)|\leqslant l|x-y|$.

(4) V , V^2 , $|b|^2\in k_n(\Omega)$.

得到的主要结论如下:

定理 1　设方程(1)的系数满足条件(1)~(4), Ω 是 $R^n(n\geqslant 3)$ 中的有界开区域, 如果 $B_R\subset\Omega$, 则对于任意的 $f\in L^2(\Omega)$, 方程的解 u 满足以下估计:

$$\|u\|_{H^1(B_R)}\leqslant C(\|f\|_{L^2(\Omega)}+R^{-2}\|u\|_{L^2(\Omega)})\,,$$

其中 C 仅依赖于 n , λ , R .

定理 2　设方程(1)的系数满足条件(1)~(4), Ω 是 $R^n(n\geqslant 3)$ 中有界开区域, 如 $B_R\subset\Omega$, $\Omega'\subset\subset\Omega$ (即 Ω' 是 Ω 的紧子集), 则对于任意的 $f\in L^2(\Omega)$, 方程的解 u 满足下述正则性:

$$\|u\|_{H^2(\Omega')}\leqslant C(\|u\|_{H^1(\Omega)}+\|f\|_{L^2(\Omega)})\,,$$

其中 C 仅依赖于 n , λ , l .

1　预备知识

定义 1　我们称 u 是方程(1)的弱解, 若对任意的 $\phi\in C_0^\infty(\Omega)$, 下列等式成立:

收稿日期: 2009–12–04.　　宁波大学学报（理工版）网址: http://3xb.nbu.edu.cn
基金项目: 国家自然科学基金（10771110）; 宁波市自然科学基金（2009A610090）.
第一作者: 李芳芳（1983－）, 女, 安徽淮南人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 应用数学. E-mail: lifangfangyxh@163.com
*通讯作者: 张松艳（1966－）, 女, 浙江舟山人, 教授, 主要研究方向: 应用数学与经济数学. E-mail: syzh201@163.com

$$\int_{\Omega}(a_{ij}\partial_j u\partial_i\phi+b\nabla u\phi+Vu\phi)\mathrm{d}x=\int_{\Omega}f\phi\mathrm{d}x\,.$$

定义 2 若 $\lim\limits_{r\to0}\sup\limits_{x\in\Omega}\int_{B_r(x)}|f(y)|/|x-y|^{n-2}\mathrm{d}y=0$，则称 $f\in Kato(\Omega)$，以下简记为 $f\in K_n(\Omega)$.

定义 3 我们称 $f\in K_n^{loc}(\Omega)$，若对于 Ω 的任一紧支集 Ω'，有:

$$\lim_{r\to0}\sup_{x\in\Omega}\int_{B_r(x)\cap\Omega'}\frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-2}}\mathrm{d}y=0\,.$$

引理 1[4] 若 $f\in K_n(\Omega)$，$u\in H_0^1(\Omega)$，则对任意的 $\varepsilon>0$，存在一个常数使得如下不等式成立:

$$\int_{\Omega}|f|u^2\mathrm{d}x\leqslant\varepsilon\int_{\Omega}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+C_\varepsilon\int_{\Omega}u^2\mathrm{d}x\,.$$

笔者采用以下记号约定:

$$\partial_i u=\partial u/\partial x_i{}'\ \nabla u=(\partial_1u,\partial_2u,\cdots,\partial_nu),$$

$$b\cdot\nabla u=\sum_{i=1}^n b_i\partial_i u,\mathrm{div}\,b=\sum_{i=1}^n\partial_i b_i,$$

$$<A\partial u,\partial u>=\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}\partial_i u\,\partial_j u.$$

$$H^1(\Omega)=W^{1,2}(\Omega)=\{u\in L^2(\Omega):\nabla u\in L^2(\Omega)\},$$

$$H^2(\Omega)=W^{2,2}(\Omega)=\{u\in L^2(\Omega):\nabla u\in L^2(\Omega),\nabla^2u\in L^2(\Omega)\},$$

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}=\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}=\{\int_{\Omega}|u(x)|^2\,\mathrm{d}x+\int_{\Omega}|\nabla u(x)|^2\,\mathrm{d}x\}^{1/2},$$

$$\|u\|_{H^2(\Omega)}=\|u\|_{W^{2,2}(\Omega)}=\{\int_{\Omega}|u(x)|^2\,\mathrm{d}x+\int_{\Omega}|\nabla u(x)|^2\,\mathrm{d}x+\int_{\Omega}|\nabla^2u(x)|^2\,\mathrm{d}x\}^{1/2}.$$

2 H^2 估计

以下给出定理 1 和定理 2 的证明.

定理 1 的证明:

令 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$，$0\leqslant\varphi\leqslant1$，且在 B_R 上 $\varphi\equiv1$，则由系数条件(2)可得:

$$\lambda\int_{R^n}|\nabla u|^2\varphi^2\mathrm{d}x\leqslant\int_{\Omega}\langle A\nabla u,\nabla u\rangle\varphi^2\mathrm{d}x=\int_{\Omega}\langle A\partial u,\partial(u\varphi^2)\rangle\,\mathrm{d}x-2\int_{\Omega}\langle A\partial u,\partial\varphi\rangle u\varphi\,\mathrm{d}x\leqslant\int_{\Omega}\langle A\partial u,\partial(u\varphi^2)\rangle\,\mathrm{d}x+\varepsilon\int_{\Omega}u^2\varphi^2\mathrm{d}x+C_\varepsilon\int_{\Omega}u^2|\nabla\varphi|^2\,\mathrm{d}x.$$

下面估计上式第一项 $I_1=\int_{\Omega}\langle A\partial u,\partial(u\varphi^2)\rangle\,\mathrm{d}x$，取 $u\varphi^2$ 为试验函数代入方程，得:

$$\int_{\Omega}\langle A\partial u,\partial(u\varphi^2)\rangle\,\mathrm{d}x+\int_{\Omega}fu\varphi^2\mathrm{d}x+\int_{\Omega}b\nabla uu\varphi^2\mathrm{d}x+\int_{\Omega}Vu\varphi^2\mathrm{d}x=\int_{\Omega}fu\varphi^2\mathrm{d}x\,,$$

则

$$I_1=\int_{\Omega}fu\varphi^2\mathrm{d}x-\int_{\Omega}b\nabla uu\varphi^2-\int_{\Omega}Vu\varphi^2\mathrm{d}x\leqslant\varepsilon\int_{\Omega}u^2\varphi^2\mathrm{d}x+C_\varepsilon\int_{\Omega}f^2\varphi^2\mathrm{d}x+\varepsilon\int_{\Omega}|\nabla u|^2\varphi^2\mathrm{d}x+C_\varepsilon\int_{\Omega}|b|^2\,u^2\varphi^2\mathrm{d}x+\int_{\Omega}|v|u^2\varphi^2\mathrm{d}x.$$

由引理 1 知:

$$\int_{\Omega}(|b|^2+|v|)\,u^2\varphi^2\mathrm{d}x\leqslant\varepsilon\int_{\Omega}|\nabla u|^2\varphi^2\mathrm{d}x+C_\varepsilon\int_{\Omega}u^2\varphi^2\mathrm{d}x,$$

$$u\in H_0^1(\Omega),\ |b|^2,\ V\in K_n(\Omega).$$

于是有:

$$I_1\leqslant C_\varepsilon\int_{\Omega}f^2\varphi^2\mathrm{d}x+\varepsilon\int_{\Omega}|\nabla u|^2\varphi^2\mathrm{d}x+C\varepsilon\int_{\Omega}u^2\varphi^2\mathrm{d}x,$$

则

$$\lambda\int_{\Omega}|\nabla u|^2\varphi^2\mathrm{d}x\leqslant C_\varepsilon\int_{\Omega}f^2\varphi^2\mathrm{d}x+\varepsilon\int_{\Omega}|\nabla u|^2\varphi^2\mathrm{d}x+C_\varepsilon\int_{\Omega}u^2\varphi^2\mathrm{d}x+C_\varepsilon\int_{\Omega}u^2\,|\nabla\varphi|^2\,\mathrm{d}x,$$

从而得:

$$\int_{\Omega}|\nabla u|^2\varphi^2\mathrm{d}x\leqslant C_\varepsilon\int_{\Omega}f^2\varphi^2\mathrm{d}x+C_\varepsilon\int_{\Omega}u^2\,|\nabla\varphi|^2\,\mathrm{d}x,$$

$$\|u\|_{H^1(B_R)}\leqslant C(\|f\|_{L^2(\Omega)}+R^{-2}\|u\|_{L^2(\Omega)})\,.$$

定理 1 证毕.

定理 2 的证明:

证明 记 $q=f-b^iD_iu-Vu$，由于 u 是方程(1)的弱解，必适合

$$\int_{\Omega}a_{ij}D_iuD_j\varphi\,\mathrm{d}x=\int_{\Omega}q\varphi\,\mathrm{d}x\,,\quad\forall\varphi\in H_0^1(\Omega)\,.\tag{2}$$

记在 x_1 方向的平移算子为 τ_h，$\tau_hu(x)=u(x+he_1)$，差分算子 $\Delta_h=(1/h)(\tau_h-I)$.

设 $g\in H_0^1(\Omega)$，g 的支集 $spt\ g\subset\subset\Omega$，对于 $h<(1/2)\ dist\{spt\ g,\partial\ \Omega\}$，取检验函数：$\phi=\Delta_{-h}g$，代入(1)式后得:

$$\int_{\Omega}\Delta_h(a_{ij}D_iu)D_jg\,\mathrm{d}x=-\int_{\Omega}q\Delta_{-h}g\,\mathrm{d}x\,.$$

注意到 q 的定义与

$$\Delta_h(a_{ij}D_iu)=\tau_ha_{ij}\Delta_hD_iu+D_iu\Delta_ha_{ij}\,,$$

有:

$$\int_{\Omega}\tau_ha_{ij}D_i\Delta_huD_jg\mathrm{d}x=-\int_{\Omega}(\Delta_ha_{ij}D_iuD_jg+q\Delta_{-h}g)\,\mathrm{d}x\leqslant C(\|u\|_{H^1(\Omega)}+\|f\|_{L^2(\Omega)})\|Dg\|_{L^2(\Omega)}\,.$$

上式用到了系数条件(4).

取 $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$，令 $g = \eta^2 \Delta_h u$，则有:

$$\int_\Omega \eta^2 \tau_h a_{ij} D_i \Delta_h u D_j \Delta_h u \mathrm{d}x \leqslant$$
$$-2\int_\Omega \eta \tau_h a_{ij} D_i \Delta_h u (D_j \eta) \Delta_h u \mathrm{d}x +$$
$$C(\| u \|_{H^1(\Omega)}^2 + \| f \|_{L^2(\Omega)}^2)(\| \eta D \Delta_h u \|_{L^2(\Omega)} +$$
$$2\| \Delta_h u \Delta \eta \|_{L^2(\Omega)}).$$

利用正定性条件与 Cauchy 不等式，则有:

$$\lambda \int_\Omega | \eta \Delta_h D u |^2 \mathrm{d}x \leqslant C \int_\Omega | D\eta |^2 | \Delta_h u |^2 \mathrm{d}x +$$
$$C(\| u \|_{H^1(\Omega)}^2 + \| f \|_{L^2(\Omega)}^2).$$

于是有:

$$\| \eta \Delta_h D u \|_{L^2(\Omega)}^2 \leqslant C(\| u \|_{H^1(\Omega)}^2 + \| f \|_{L^2(\Omega)}^2).$$

适当选取 η，利用文献[2]附录 1 中命题 1.8 可知 $D_1 D u \in L^2(\Omega')$，考虑任意方向的差分算子，则有 $u \in H^2(\Omega')$，且满足估计式:

$$\| u \|_{H^2(\Omega')} \leqslant C(\| u \|_{H^1(\Omega)} + \| f \|_{L^2(\Omega)}).$$

定理 2 证毕.

参考文献:

[1] Robert Adams, John Fournier. Sobolev spaces[M]. Singapore: Elsevier Pte Ltd, 2003:167-204.

[2] 陈亚浙，吴兰成．二阶椭圆方程与椭圆型方程组[M]. 北京: 科学出版社, 1990:82-152.

[3] Chiarenza F. Harnack's inequality for Schrödinger operators and the continuity of solutions[J]. Amer Math Soc, 1986, 98:415-425.

[4] Kurarta Kazuhiro. Continuity and Harnack's inequality for solutions of elliptic partial differential equations of second order[J]. Indiana University Journal, 1994, 43: 411-439.

[5] Tao Xiangxing, Wang Henggeng. On the neumann problem for Schrödinger equations with singular potentials in Lipschitz domains[J]. Canad J Math, 2004, 56:655-672.

[6] Tao Xiangxing, Zhang Songyan. Boundary unique continuation theorems under zero neumann boundary conditions[J]. Bull Austral Math Soc, 2005, 72:67-85.

[7] 韩斌，陶祥兴．C^2 区域上薛定谔方程解的二阶导数的估计[J]. 浙江科技学院学报，2010, 22:485-493.

[8] 王世元，陶祥兴．一类具有 $L^{\lambda,\mu}(\Omega)$ 系数的 Schrödinger 方程解的 Hölder 连续性[J]. 宁波大学学报: 理工版, 2010, 23:57-61.

[9] 贾厚玉．有界凸区域上的 Dirichlet 问题的正则性[J]. 浙江大学学报: 理学版, 1999, 26(2):1-7.

[10] 金永阳，贾厚玉．一类椭圆方程解的连续性[J]. 应用数学, 2002, 15:52-56.

Regularity of Nonhomogeneous Divergence Elliptic Equation

LI Fang-fang[1], ZHANG Song-yan[2*]

(1.Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China; 2.School of Economic and Management, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China)

Abstract: Based on the definition of the weak solution, through inference and calculating, we mainly consider the integral estimation of the elliptic equation's weak solution in this paper. The elliptic equation takes such a form as $-\mathrm{div}(A\nabla u) + b\nabla u + Vu = f$, where V , V^2, $|b|^2 \in Kato(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$. The work in this paper extends the results previously published.

Key words: weak solution; Kato class; regularity; H^2 estimate

（责任编辑　史小丽）