第25卷第3期, 2012年7月 宁 波 大 学 学 报（理 工 版） 首届中国高校优秀科技期刊奖
Vol.25 No.3, July 2012 JOURNAL OF NINGBO UNIVERSITY (NSEE) 浙江省优秀科技期刊一等奖

具性别偏食和 Holling II 类功能反应的三种群系统的研究

王 波，张建勋*
（宁波大学 理学院，浙江 宁波 315211）

摘要： 讨论了一类三种群的 Holling II 类功能反应系统, 且第二个种群对第一个种群具有性别偏食现象. 利用不等式放缩方法得到了种群一致持续生存的条件, 并通过构造适当的 Liapunov 函数得到了系统存在唯一、全局渐近稳定的正周期解的充分条件.

关键词： 性别偏食; Holling II; 持续生存; 周期性; 稳定性
中图分类号： O175 **文献标识码：** A **文章编号：** 1001-5132（2012）03-0038-04

三种群的捕食者-食饵系统的研究已经较为完善, 影响捕食者捕食食饵的因素有很多. 文献[1]指出性别也是其中一个重要因素; 文献[2-3]对具有性别偏食的两种群的稳定性做了定性分析; 文献[4-6]通过构造 Liapunov 函数对多种群的周期解的存在性和稳定性进行研究; 而将性别偏食与功能反应函数结合起来考虑的文献还不多. 笔者在以上文献的基础上对具有性别偏食和 Holling II 类功能反应的三种群系统进行进一步研究, 建立相应的数学模型, 然后对该模型进行分析研究.

1 数学模型

在所讨论的三种群系统中, x 表示食饵种群密度, y, z 分别表示 2 个捕食者的种群密度, 且 y 为 x 的捕食者, z 为 y 的捕食者, 如果不考虑性别偏食, 可以建立以下模型:

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=x(t)\left[a_1(t)-b_1(t)x(t)-\dfrac{c(t)y(t)}{d(t)+x(t)}\right], \\ \dot{y}(t)=y(t)\left[-a_2(t)-b_2(t)y(t)+\dfrac{k(t)c(t)x(t)}{d(t)+x(t)}-\right. \\ \qquad \left.\dfrac{c_3(t)z(t)}{d_3(t)+y(t)}\right], \\ \dot{z}(t)=z(t)\left[-a_3(t)-b_3(t)z(t)+\dfrac{k_3(t)c_3(t)y(t)}{d_3(t)+y(t)}\right]. \end{cases} \tag{1}$$

现考虑性别偏食情况, x_1 和 x_2 分别为食饵中雌性和雄性的种群密度, 其中, y 对 x 存在性别偏食, z 对 y 不存在性别偏食. σ 为食饵中雌雄的比值, 令 $\varepsilon=\sigma-1$, $|\varepsilon|$ 为偏食程度, $\varepsilon>0$ 为捕食者偏食雌性, $\varepsilon<0$ 为捕食者偏食雄性, $\varepsilon=0$ 为无偏食现象. 不失一般性, 则假设 $\varepsilon>0$, 可得以下模型:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t)=x_1(t)\left[a_1(t)-g_1(t)x_1(t)-b_1(t)x_2(t)-\right. \\ \qquad \left.\dfrac{\sigma c_1(t)y(t)}{d_1(t)+x_1(t)}\right], \\ \dot{x}_2(t)=x_2(t)\left[a_1(t)-g_2(t)x_2(t)-b_1(t)x_1(t)-\right. \\ \qquad \left.\dfrac{c_2(t)y(t)}{d_2(t)+x_2(t)}\right], \\ \dot{y}(t)=y(t)\left[-a_2(t)-b_2(t)y(t)+\right. \\ \qquad \dfrac{k_1(t)\sigma c_1(t)x_1(t)}{d_1(t)+x_1(t)}+\dfrac{k_2(t)c_2(t)x_2(t)}{d_2(t)+x_2(t)} \\ \qquad \left.-\dfrac{c_3(t)z(t)}{d_3(t)+y(t)}\right], \\ \dot{z}(t)=z(t)\left[-a_3(t)-b_3(t)z(t)+\dfrac{k_3(t)c_3(t)y(t)}{d_3(t)+y(t)}\right], \end{cases} \tag{2}$$

其中, 由于 y 偏食雌性, 食饵的内禀增长率 a_1 随 ε 的增大而减小, 而且食饵种群密度制约系数 g_1 随 ε 的增大而减小, g_2 随 ε 的增大而增大. k_1, k_2, k_3 分别表示 y 对 x_1 的转化系数、y 对 x_2 的转化系数、z 对 y 的转化系数. 笔者假设所有的系数在 $[0,+\infty)$ 范围内是严格的正函数, 且有上下界, 并且对连续

收稿日期：2011–06–27. 宁波大学学报（理工版）网址: http://3xb.nbu.edu.cn
第一作者：王 波（1986－）, 男, 河北张家口人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 生物数学. E-mail: wang198699@163.com
*通讯作者：张建勋（1959－）, 男, 陕西岐山人, 教授, 主要研究方向: 生物数学. E-mail: zhangjianxun@nbu.edu.cn

有界函数 $f(t)$，记:

$$f^L=\inf_{t\geqslant 0} f(t),\quad f^M=\sup_{t\geqslant 0} f(t).$$

2 一致持续生存

定理 1 $R_+^4=\{(x_1,x_2,y,z)\mid x_i>0,y>0,z>0,i=1,2\}$ 是系统(2)的正向不变集.

证明 对于任意的 $t\in[0,+\infty)$ 和 $(x_1,x_2,y,z)\in R_+^4$，由系统(2)有:

$$\begin{cases} x_1(t)=x_1(0)\exp\left[\int_0^t\left(a_1(s)-g_1(s)x_1(s)-\right.\right.\\ \qquad\left.\left. b_1(s)x_2(s)-\dfrac{\sigma c_1(s)y(s)}{d_1(s)+x_1(s)}\right)\mathrm{d}s\right],\\ x_2(t)=x_2(0)\exp\left[\int_0^t\left(a_1(s)-g_2(s)x_2(s)-\right.\right.\\ \qquad\left.\left. b_1(s)x_1(s)-\dfrac{c_2(s)y(s)}{d_2(s)+x_2(s)}\right)\mathrm{d}s\right],\\ y(t)=y(0)\exp\left[\int_0^t\left(-a_2(s)-b_2(s)y(s)+\right.\right.\\ \qquad \dfrac{k_1(s)\sigma c_1(s)x_1(s)}{d_1(s)+x_1(s)}+\dfrac{k_2(s)c_2(s)x_2(s)}{d_2(s)+x_2(s)}-\\ \qquad\left.\left.\dfrac{c_3(s)z(s)}{d_3(s)+y(s)}\right)\mathrm{d}s\right],\\ z(t)=z(0)\exp\left[\int_0^t\left(-a_3(s)-b_3(s)z(s)+\right.\right.\\ \qquad\left.\left.\dfrac{k_3(s)c_3(s)y(s)}{d_3(s)+y(s)}\right)\mathrm{d}s\right], \end{cases} \tag{3}$$

当 $x_1(0)>0,x_2(0)>0,y(0)>0,z(0)>0$ 时，有 $x_1(t)>0,x_2(t)>0,y(t)>0,z(t)>0$，所以 R_+^4 是系统(2)正向不变集.

引理 1 [7-9] 若 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x\geqslant(\leqslant)y(b-ay)$，则其解满足:

$$y(x)\geqslant(\leqslant)\frac{b}{a}\left[1+\left(\frac{b}{ay(0)}-1\right)e^{-bx}\right]^{-1}.$$

定理 2 若系数满足:

$$\begin{cases}-a_2^L+k_1^M\sigma c_1^M+k_2^M c_2^M>0,\\ -a_3^L+k_3^M c_3^M>0,\end{cases}$$

则系统(2)的解是关于 R_+^4 是最终有界的.

证明 由系统(2)的第 1 个方程有:

$$\dot{x}_1(t)\leqslant x_1(t)[a_1^M-g_1^L x_1(t)].$$

由引理 1 有:

$$x_1(t)\leqslant\frac{a_1^M}{g_1^L}\left[1+\left(\frac{a_1^M}{g_1^L x_1(0)}-1\right)e^{-a_1^M t}\right]^{-1},$$

当 $0<x_1(0)\leqslant\dfrac{a_1^M}{g_1^L}\overset{\Delta}{=}H_1$ 时，有 $x_1(t)\leqslant H_1,t>0$.

同理，当 $0<x_2(0)\leqslant\dfrac{a_1^M}{g_2^L}\overset{\Delta}{=}H_2$ 时，有 $x_2(t)\leqslant H_2$，$t>0$；

当 $0<y(0)\leqslant\dfrac{-a_2^L+k_1^M\sigma c_1^M+k_2^M c_2^M}{b_2^L}\overset{\Delta}{=}H_3$ 时，有 $y(t)\leqslant H_3,t>0$；

当 $0<z(0)\leqslant\dfrac{-a_3^L+k_3^M c_3^M}{b_3^L}\overset{\Delta}{=}H_4$ 时，有 $z(t)\leqslant H_4,t>0$.

所以有 $\Omega_1=\{(x_1(t),x_2(t),y(t),z(t))\in R_+^4\mid x_1(t)\leqslant H_1,x_2(t)\leqslant H_2,y(t)\leqslant H_3,z(t)\leqslant H_4\}$ 是系统(2)的最终有界区域.

定理 3 若系统(2)满足定理 2 的条件及以下条件:

$$\begin{cases} a_1^L-b_1^M H_2-\dfrac{\sigma c_1^M H_3}{d_1^L}>0,\\ a_1^L-b_1^M H_1-\dfrac{c_2^M H_3}{d_2^L}>0,\\ -a_2^M+\dfrac{k_1^L\sigma c_1^L h_1}{d_1^M+H_1}+\dfrac{k_2^L c_2^L h_2}{d_2^M+H_2}-\dfrac{c_3^M H_4}{d_3^L}>0,\\ -a_3^M+\dfrac{k_3^L c_3^L h_3}{d_3^M+H_3}>0, \end{cases}$$

则系统(2)是一致持续生存的.

证明 由系统(2)的第一个方程有:

$$\dot{x}_1(t)\geqslant x_1(t)\left[a_1^L-g_1^M x_1(t)-b_1^M H_2-\frac{\sigma c_1^M H_3}{d_1^L}\right].$$

由引理 1 有:

$$x_1(t)\geqslant\frac{a_1^L-b_1^M H_2-\dfrac{\sigma c_1^M H_3}{d_1^L}}{g_1^M}\Bigg[1+\left(\frac{a_1^L-b_1^M H_2-\sigma c_1^M H_3/d_1^L}{g_1^M x_1(0)}-1\right)\cdot e^{-\left(a_1^L-b_1^M H_2-\frac{\sigma c_1^M H_3}{d_1^L}\right)t}\Bigg]^{-1}.$$

当 $x_1(0)\geqslant\dfrac{a_1^L-b_1^M H_2-\sigma c_1^M H_3/d_1^L}{g_1^M}\overset{\Delta}{=}h_1$ 时，有

$x_1(t)\geqslant h_1$，且 $h_1<\dfrac{a_1^L}{g_1^M}<\dfrac{a_1^M}{g_1^L}=H_1$；

同理，当 $x_2(0)\geqslant\dfrac{a_1^L-b_1^M H_1-c_2^M H_3/d_2^L}{g_2^M}\stackrel{\Delta}{=}h_2$ 时，有 $x_2(t)\geqslant h_2$，且 $h_2<\dfrac{a_1^L}{g_2^M}<\dfrac{a_1^M}{g_2^L}=H_2$；

当

$$y(0)\geqslant\frac{-a_2^M+\dfrac{k_1^L\sigma c_1^L h_1}{d_1^M+H_1}+\dfrac{k_2^L c_2^L h_2}{d_2^M+H_2}-\dfrac{c_3^M H_4}{d_3^L}}{b_2^M}\stackrel{\Delta}{=}h_3,$$

有 $y(t)\geqslant h_3$，且 $h_3<\dfrac{-a_2^M+k_1^L\sigma c_1^L+k_2^L c_2^L}{b_2^M}<H_3$；

当 $z(0)\geqslant\dfrac{-a_3^M+\dfrac{k_3^L c_3^L h_3}{d_3^M+H_3}}{b_3^M}\stackrel{\Delta}{=}h_4$ 时，有 $z(t)\geqslant h_4$，且 $h_4<\dfrac{-a_3^M+k_3^L c_3^L}{b_3^M}<H_4$.

则 $\Omega_2=\{(x_1(t),x_2(t),y(t),z(t))\in R_+^4\mid h_1\leqslant x_1(t)\leqslant H_1,h_2\leqslant x_2(t)\leqslant H_2,h_3\leqslant y(t)\leqslant H_3,h_3\leqslant z(t)\leqslant H_4\}$ 是系统(2)的最终有界区域. 所以系统(2)是一致持续生存的.

3 全局渐近稳定

假设系统(2)内所有的系数在 $[0,+\infty)$ 是严格的正的 T 周期函数，则系统(2)为 T 周期系统. 定义 1 个 Poincare 映射 $F:F(x_0)=x(T,x_0),x_0\in R_+^4$，$F$ 为连续算子，Ω_2 为 R_+^4 的有界闭凸集且 $F(\Omega_2)\subset\Omega_2$. 由 Brouwer 不动点定理有 F 在 Ω_2 中有不动点，所以系统(2)有周期解.

引理 2[1] 设 $g(t)$ 是非负可微函数，若 $|\dot g(t)|<M$，而 M 为 1 个正常数，且 $\int_0^{+\infty}g(t)\,\mathrm{d}t<+\infty$，那么 $\lim\limits_{t\to+\infty}g(t)=0$.

定理 4 若系统(2)满足定理 2 和定理 3 的条件，并且满足以下条件：

$$\begin{cases} g_1^L-\dfrac{\sigma c_1^M H_3}{(d_1^L+h_1)^2}>0,\\ g_2^L-\dfrac{c_2^M H_3}{(d_2^L+h_2)^2}>0,\\ b_2^L-\dfrac{c_3^M H_4}{(d_3^L+h_3)^2}>0,\end{cases}$$

则系统(2)有唯一的全局渐近稳定的周期解.

证明 设 $m^*(t)=(x_1^*(t),x_2^*(t),y^*(t),z^*(t))$ 是系统(2)的 1 个严格正周期解，$m(t)=(x_1(t),x_2(t),y(t),z(t))$ 是系统(2)的任意正解.

构造 Liapunov 函数:

$$V(t)=|X_1(t)-X_1^*(t)|+|X_2(t)-X_2^*(t)|+|Y(t)-Y^*(t)|+|Z(t)-Z^*(t)|,$$

其中,

$$X_1(t)=\ln x_1(t),X_2(t)=\ln x_2(t),$$
$$Y(t)=\ln y(t),Z(t)=\ln z(t),$$

$$\begin{aligned}D^+V(t)={}&\frac{X_1(t)-X_1^*(t)}{|X_1(t)-X_1^*(t)|}(\dot X_1(t)-\dot X_1^*(t))+\\&\frac{X_2(t)-X_2^*(t)}{|X_2(t)-X_2^*(t)|}(\dot X_2(t)-\dot X_2^*(t))+\\&\frac{Y(t)-Y^*(t)}{|Y(t)-Y^*(t)|}(\dot Y(t)-\dot Y^*(t))+\frac{Z(t)-Z^*(t)}{|Z(t)-Z^*(t)|}\cdot\\&(\dot Z(t)-\dot Z^*(t))\leqslant\left[-g_1^L+\frac{\sigma c_1^M H_3}{(d_1^L+h_1)^2}\right]\cdot\\&|x_1(t)-x_1^*(t)|+\left[-g_2^L+\frac{c_2^M H_3}{(d_2^L+h_2)^2}\right]\cdot\\&|x_2(t)-x_2^*(t)|+\left[-b_2^L+\frac{c_3^M H_4}{(d_3^L+h_3)^2}\right]\cdot\\&|y(t)-y^*(t)|+(-b_3^L)|z(t)-z^*(t)|\leqslant\\&-a(|x_1(t)-x_1^*(t)|+|x_2(t)-x_2^*(t)|+\\&|y(t)-y^*(t)|+|z(t)-z^*(t)|),\end{aligned}$$

其中,

$$a=\min\left\{g_1^L-\frac{\sigma c_1^M H_3}{(d_1^L+h_1)^2},g_2^L-\frac{c_2^M H_3}{(d_2^L+h_2)^2},b_2^L-\frac{c_3^M H_4}{(d_3^L+h_3)^2},b_3^L\right\}.$$

两边由 $T(T>0)$ 到 t 积分可得:

$$V(t)+a\int_T^t(|x_1(s)-x_1^*(s)|+|x_2(s)-x_2^*(s)|+|y(s)-y^*(s)|+|z(s)-z^*(s)|)\mathrm{d}s\leqslant V(T),$$

因为 $V(t)$ 非负，当 $t\to+\infty$ 有:

$$\int_T^t(|x_1(s)-x_1^*(s)|+|x_2(s)-x_2^*(s)|+|y(s)-y^*(s)|+|z(s)-z^*(s)|)\mathrm{d}s\leqslant\frac{V(t)}{a}<+\infty,$$

所以,

$$\lim_{t\to+\infty}(|x_1(t)-x_1^*(t)|+|x_2(t)-x_2^*(t)|+$$
$$|y(t)-y^*(t)|+|z(t)-z^*(t)|)=0.$$

因此，

$$\lim_{t\to+\infty}|x_i(t)-x_i^*(t)|=0, i=1,2,$$
$$\lim_{t\to+\infty}|y(t)-y^*(t)|=0,$$
$$\lim_{t\to+\infty}|z(t)-z^*(t)|=0.$$

因此，系统(2)有唯一的全局渐近稳定的周期解.

参考文献:

[1] 马知恩. 种群生态学的数学建模与研究[M]. 合肥：安徽教育出版社, 1996.
[2] 刘秀湘，冯佑和. 具性别偏食的二种群捕食者——食饵系统模型[J]. 生物数学学报, 2002, 17(1):5-11.
[3] 刘汉武，王荣欣，刘建欣. 具性别结构的食饵——捕食者模型[J]. 生物数学学报, 2005, 20(2):179-182.
[4] 祝惠娇，胡志兴. 具性别偏食的 Beddington-DeAngelis 反应的三种群系统的研究[J]. 北京工商大学学报, 2006, 24(6):64-67.
[5] 徐长永，王美娟，周艳丽. 具阶段结构和 Holling II 类功能反应的捕食系统研究[J]. 上海理工大学学报, 2006, 28(5):49-54.
[6] 孙凯玲，王美娟，朱春娟. 具有性别偏食和 Holling III 类功能反应的食饵捕食者模型[J]. 上海理工大学学报, 2009, 31(1):6-10.
[7] 陈磊，张建勋. 一类非自治两捕食者-两互惠食饵系统的持久性和稳定性[J]. 宁波大学学报：理工版, 2012, 25(2):63-67.
[8] 张银萍. 两种群竞争系统的持久性[J]. 生物数学学报, 1998, 13(5):661-664.
[9] 马知恩，周义仓. 常微分方程定性与稳定性方法[M]. 北京：科学出版社, 2005.

Study on Holling II Function and Sexual Favoritism for Three Types of Group

WANG Bo, ZHANG Jian-xun*
(Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: This paper establishes a mixed model with a type of Holling II functional response for three types of groups. The second group has sexual favoritism to the first group. The conditions are obtained for guaranteeing the permanence of the system using the method of inequalities. Based on the suitable Lyapunov function constructed, the sufficient conditions, the existence and uniqueness of the positive periodic solution are discussed.

Key words: sexual favoritism; Holling II function; permanence; periodic solution; stability

（责任编辑　章践立）