

一种用于电力系统间谐波谱估计的自回归模型算法

李明, 王晓茹

(西南交通大学电气工程学院, 四川省 成都市 610031)

An Autoregressive Model Algorithm for the Inter-harmonic Spectral Estimation in the Power System

LI Ming, WANG Xiao-ru

(School of Electrical Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, Sichuan Province, China)

ABSTRACT: The principles of the autoregressive (AR) model spectrum estimation and the inter-harmonics analysis based on the AR model are firstly discussed. To overcome the disadvantage of the Burg algorithm, a new method for analyzing inter-harmonics based on the Marple algorithm is presented. The m order AR coefficients are solved directly by minimizing the average power of the prediction error. So this algorithm is free from constraint of the Levinson recurrence formula. By using the Levinson order recurrence and additional time-shifting recurrence, the correlation matrix is solved efficiently. Compared with Burg algorithm, this method has the advantages of less bias in the frequency estimation and being absent of spectral line splitting. Experimental results show this method has high frequency resolution for analyzing short inter-harmonic signal. This method can be used in the inter-harmonic measurement of the power system.

KEY WORDS: power quality; Marple algorithm; inter-harmonics; autoregressive (AR) model; power system

摘要: 首先详细讨论自回归(autoregressive, AR)模型谱估计原理和基于AR模型的间谐波分析原理。针对其中较常用的Burg算法存在的谱线分裂和谱峰偏移的缺点, 提出基于Marple算法的间谐波分析新方法。该算法通过在预测误差平均功率最小的意义下直接求解 m 阶AR系数, 解除了Levinson递推公式这一强约束条件。利用Levinson型阶数递推和附加的时移递推来求解自相关矩阵, 使计算效率得到提高。与Burg算法相比, 该方法的优点是谱峰偏移程度较低, 且不存在谱线分裂现象。仿真结果表明, 该方法对较短的间谐波信号进行分析, 具有很高的频率分辨率。可推广应用用于电力系统间谐波测量领域。

关键词: 电能质量; Maple算法; 间谐波; 自回归模型; 电力系统

0 引言

电力系统中存在大量非线性负荷、变频调速装置、同步串级调速装置及感应电动机。这些设备均为间谐波源, 其产生的间谐波严重污染了电网的环境, 并威胁到电网中各种电气设备的安全经济运行。因此, 对电力系统间谐波进行分析具有非常重要的意义^[1]。

目前, 存在种类众多的间谐波检测方法。快速傅里叶变换(fast Fourier transform, FFT)因其计算量较小被广泛使用, 但其频率分辨率不高^[2]。加窗插值FFT的效果虽然优于快速傅里叶变换, 但其窗宽一般高达几十个信号周期, 检测实时性较差^[3-6]。特征值分解法, 如Pisarenko算法^[7-8]、Music算法^[9-11]、Esprit^[12]算法和Min-Norm算法^[13]等, 也被用于电力系统间谐波分析领域, 但需要进行自相关矩阵估计, 导致运算量较大, 硬件实现比较困难。自回归(autoregressive, AR)模型谱估计方法中的Burg算法具有很高的频率分辨率, 并且由于采用Levinson递推, 可根据观测数据直接求取AR模型参数, 避免了自相关矩阵估计, 计算效率得到了提高, 故被应用于电力系统间谐波分析中^[14-16]。但由于Levinson递推公式这一强约束条件使其出现谱峰偏移和谱线分裂现象^[17], 导致谱分析性能降低。

本文介绍AR模型谱估计原理, 阐述基于AR模型的间谐波分析原理, 针对AR模型中较常用的Burg算法存在的缺点, 提出基于Marple算法^[17]的电力系统间谐波谱估计方法。与Burg算法相比, 该算法对初始相位不敏感, 频率偏移程度较低, 且不存在谱线分裂现象^[17]。并且, 该算法同样采用Levinson递

基金项目: 国家自然科学基金重点项目(50937002)。

Project Supported by National Natural Science Foundation of China (50937002).

推的方式，计算效率较高，仿真结果验证了该方法的有效性。

1 AR模型功率谱估计

AR模型谱估计是现代谱估计中较常用的一种方法。这是因为AR模型参数的估计可用解一组线性方程的方法求得，计算较简单。 m 阶AR模型满足如下差分方程^[18]：

$$x(n) = -\sum_{i=1}^m a_m(i)x(n-i) + w(n) \quad (1)$$

式中： $w(n)$ 为白噪声序列；信号 $x(n)$ 的功率谱估计为

$$P(\omega) = e_m / |1 + \sum_{i=1}^m a_m(i)e^{-j\omega i}|^2 \quad (2)$$

由式(2)可知，如需得到信号的功率谱 $P(\omega)$ ，必须首先求得AR模型参数 $(e_m, a_m(1), \dots, a_m(m))$ 。

2 基于AR模型的间谐波分析原理

设含 M 个谐波和间谐波的周期信号为

$$y(n) = \sum_{i=1}^M A_i \sin(2\pi f_i n / f_s + \varphi_i) + \eta(n) = u(n) + \eta(n) \quad (3)$$

其中

$$u(n) = \sum_{i=1}^M A_i \sin(2\pi f_i n / f_s + \varphi_i) \quad (4)$$

式中： A_i 、 f_i 、 φ_i 分别为第 i 个谐波的幅值、频率和初始相位； f_s 为采样频率； $\eta(n)$ 为白噪声序列。

式(4)可转化为如下形式^[19]：

$$u(n) = -\sum_{i=1}^{2M} a_{2M}(i)u(n-i) \quad (5)$$

由式(3)可知

$$u(n) = y(n) - \eta(n) \quad (6)$$

将式(6)代入式(5)中，可得

$$y(n) + \sum_{i=1}^{2M} a_{2M}(i)y(n-i) = \eta(n) + \sum_{i=1}^{2M} a_{2M}(i)\eta(n-i) \quad (7)$$

式(7)是一个自回归移动平均(autoregressive moving average, ARMA)过程，这将导致一组非线性方程，估计AR模型参数的线性方法^[19]是

$$f_{2M}(n) = \eta(n) + \sum_{i=1}^{2M} a_{2M}(i)\eta(n-i) \quad (8)$$

式中 $f_{2M}(n)$ 为 $2M$ 阶前向预测误差。令 $m=2M$ ，将式(8)代入到式(7)中可得

$$y(n) = -\sum_{i=1}^m a_m(i)y(n-i) + f_m(n) \quad (9)$$

由于式(9)与式(1)具有相同的形式，所以电力系统间谐波可作为一个AR过程。并且可由式(2)求得

各次谐波和间谐波的频率信息。

3 基于Marple算法的AR模型参数提取方法

由式(2)可知，如果要得到信号的功率谱，首先要求得AR模型参数。假定观察到的谐波信号中采样点的数据为 $y(0), y(2), \dots, y(N-1)$ ，其中 N 为采样点数。由式(9)可知， m 阶前向预测误差^[18]为

$$f_m(n) = y(n) + \sum_{i=1}^m a_m(i)y(n-i) \quad (10)$$

为提取到信号的更多信息，可令 m 阶后向预测误差为

$$b_m(n) = y(n-m) + \sum_{i=1}^m a_m(i)y(n+i-m) \quad (11)$$

m 阶前、后向预测误差的平均功率为

$$e_m = \frac{1}{2} \sum_{n=m}^{N-1} [|f_m(n)|^2 + |b_m(n)|^2] \quad (12)$$

由式(10)~(12)可看出，AR模型谱估计方法对于观测区间 $[0, N-1]$ 外的样本未作任何假定，克服了傅里叶变换及周期图谱估计的不足，具有更好的频率分辨率。通常，AR模型参数是通过将式(12)中的 e_m 极小化求得。Burg算法是其中较常用的方法，利用前、后向预测误差平均功率最小准则先估计反射系数 k_m ，再用Levinson递推公式由低阶到高阶来求出AR模型的参数，避免了自相关矩阵估计和矩阵求逆运算。但正是由于Levinson递推公式这一强约束条件的影响，致使该算法易出现谱线分裂现象，尤其是在信噪比较高、阶数选取较大以及初始相位为 $\pi/4$ 的奇数倍时。并且该算法对初始相位较为敏感，导致与相位相关的谱峰偏移^[17]。

Marple算法从解除这Levinson递推公式一强约束条件入手，在预测误差平均功率最小的意义下直接求解 m 阶AR系数^[17]。使得

$$\partial e_m / \partial a_m(i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (13)$$

解式(13)得

$$\mathbf{R}_m \begin{bmatrix} 1 \\ a_m(1) \\ \vdots \\ a_m(m) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} e_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

式中

$$\mathbf{R}_m = \begin{bmatrix} r_y(0,0) & r_y(0,1) & \cdots & r_y(0,m) \\ r_y(1,0) & r_y(1,1) & \cdots & r_y(1,m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_y(m,0) & r_y(m,1) & \cdots & r_y(m,m) \end{bmatrix} \quad (15)$$

式(14)中的自相关矩阵估计 \mathbf{R}_m 是一个非 Toeplitz 矩阵, 不能利用 Levinson 递推关系, 虽然式(14)中的 AR 模型参数 $(e_m, a_m(1), \dots, a_m(m))$ 可用直接求解逆矩阵的方法得到, 然而这样做计算量较大。Marple 算法将自相关矩阵估计 \mathbf{R}_m 变换为 Toeplitz 矩阵的组合:

$$\mathbf{R}_m = (\mathbf{T}_m)^H \mathbf{T}_m + (\mathbf{T}_m^v)^H \mathbf{T}_m^v \quad (16)$$

式中: H 表示共轭转置; $\mathbf{T}_m^v = (\mathbf{T}_m \mathbf{J})^*$; \mathbf{T}_m 为一个 $(N-m) \times (m+1)$ 的 Toeplitz 矩阵, 即

$$\mathbf{T}_m = \begin{bmatrix} y(m+1) & y(m) & \cdots & y(1) \\ y(m+2) & y(m+1) & \cdots & y(2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y(N) & y(N-1) & \cdots & y(N-m) \end{bmatrix} \quad (17)$$

\mathbf{J} 为 $(m+1) \times (m+1)$ 的交换矩阵, 即

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ & & \vdots & \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Marple 根据式(16)提出了求解 AR 模型参数的 Levinson 型递推算法。即首先通过时移递推, 阶数不增加, 前向预测右移一步, 由 $(e_i, a_i(1), \dots, a_i(i))$ 推出 $(e'_i, a'_i(1), \dots, a'_i(i))$, 然后进行阶数递推, 将阶数由 i 增加为 $i+1$, 再由 $(e'_i, a'_i(1), \dots, a'_i(i))$ 推出 $(e_{i+1}, a_{i+1}(1), \dots, a_{i+1}(i+1))$, 这样便完成一次递推^[20]。计算终止的条件为

$$\begin{cases} |a_m(m)| \geq 1 \\ e_m/e_0 < \varepsilon_1 \\ (e_{m-1} - e_m)/e_{m-1} < \varepsilon_2 \end{cases} \quad (19)$$

式中: 参数 $a_m(m)$ 为反射系数, 必须满足 $|a_m(m)| < 1$, 才能保证 AR 模型的稳定; e_m/e_0 为相对预测误差; $(e_{m-1} - e_m)/e_{m-1}$ 为预测误差变化率。当信噪比较高时, 为尽量提取出信号中的有用信息, ε_1 和 ε_2 应选用偏小的常数; 当信噪比较低时, 为避免噪声的影响, 则 ε_1 和 ε_2 不宜选取过低。通常, ε_1 和 ε_2 取值范围为 $10^{-4} \sim 10^{-2}$ 。

将最终求得的 AR 模型参数代入到式(2)中, 可得到各次谐波和间谐波的频率信息。其递推算法详见文献[17]。在得到了信号频率信息的基础上, 可用非线性最小二乘的方法^[11,13]进一步求得幅值和相位信息, 具体推导见附录 A。

4 算法复杂度分析

为检验 Marple 算法的运算性能, 本文选用了几种典型的高精度电力系统间谐波检测算法来进行

对比研究, 包括各种特征值法(如 Pisarenko 算法、Music 算法、Espri 算法和 Min-Norm 算法等)和 AR 模型算法中 Burg 算法。由于各种特征值算法的共同点都是需要进行自相关矩阵的估计, 故可用自相关矩阵来代替特征值法进行算法复杂度分析。各种算法复杂度比较如表 1、2 所示。

表 1 各种算法复杂度的比较

Tab. 1 Comparison of computational complexity for various algorithms

算法	乘法	加法	除法	存储量
自相关矩阵估计	$2Nm^2 - 2m^3 + m^2$	$2Nm^2 - 2m^3 - m^2$	0	$N + m^2$
Burg 算法	$3Nm - m^2 - N + 6m + 1$	$3Nm - m^2 - N + 2m - 1$	m	$3N + m + 2$
Marple 算法 ^[17]	$Nm + 9m^2 + 2N + 25m - 3$	$Nm + 8m^2 + N + 7m - 8$	$5m + 3$	$N + 4m + 15$

表 2 各种算法复杂度的定量比较

Tab. 2 Quantitative comparison of computational complexity for various algorithms

算法	乘法		加法		除法		存储量	
	$N=80$ $m=30$	$N=100$ $m=40$	$N=80$ $m=30$	$N=100$ $m=40$	$N=80$ $m=30$	$N=100$ $m=40$	$N=80$ $m=30$	$N=100$ $m=40$
自相关矩阵估计	90 900	193 600	89 100	190 400	0	0	980	1 700
Burg 算法	6 401	10 541	6 279	10 379	30	40	272	342
Marple 算法	11 407	19 597	9 882	17 172	153	203	215	275

由表 1、2 可见, 自相关矩阵估计的运算量和存储量明显高于 Burg 算法和 Marple 算法, 如果再将矩阵的特征值分解运算考虑在内, 特征值算法的运算量和存储量将更高。而 Marple 算法与 Burg 算法通过 Levinson 递推的方式求取 AR 模型参数, 避免了自相关矩阵估计, 其运算量和存储空间都显著降低了, 更有利于硬件实现。并且从表 1 中的公式可看出: 自相关矩阵的时间复杂度为 $O(m^3)$, 存储空间复杂度为 $O(m^2)$; Marple 算法和 Burg 算法的时间复杂度为 $O(m^2)$, 存储空间复杂度为 $O(m)$, 两者的差距会随着问题规模的增大而不断增大。Marple 算法和 Burg 算法具有相同的时间复杂度和存储空间复杂度, 其运算量和存储量相差不大。

5 仿真算例

5.1 Marple 算法与 Burg 算法谱估计性能比较

为了对两种算法的谱估计性能进行比较, 在文献[17]的基础上分别进行了两组实验。

第 1 组实验用来检测谱峰偏移程度, 设分析信号为 $x(t) = \sin(100\pi t + 5\pi/18)$, AR 阶数为 2。实验结

果如图 1(a)所示，其中 ρ 为功率谱密度。

第 2 组实验用来检测谱线分裂程度，设分析信号为 $x(t)=\sin(100\pi t+3\pi/4)$ 。AR阶数为 4。实验结果如图 1(b)所示。

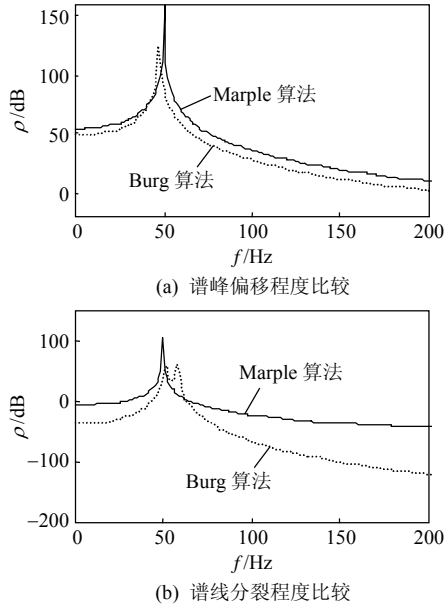


图 1 Marple 算法和 Burg 算法的比较
Fig. 1 Comparison of Marple and Burg algorithms

两组实验中信号的采样频率为 1 kHz，采样点数为 55。

由图 1(a)可看出，由于Burg算法受到初始相位的影响，导致其出现谱峰偏移。图中检测到的谱峰为 47 Hz，与实际谱峰偏差为 3 Hz。而Marple算法对初始相位不敏感，频率偏移相对于Burg算法得到明显改善，可精确检测到 50 Hz 的谱峰。从图 1(b)可看出，由于信号的初始相位($3\pi/4$)为 $\pi/4$ 的奇数倍，并且由式(5)可知，相对于信号中仅含有的基波分量，AR阶数(为 4)选取较大，故Burg算法易出现谱线分裂现象。本来应该在 50 Hz(基波)出现的谱峰分裂成 52 和 58 Hz 两个谱峰。而Marple算法没有出现谱线分裂现象，谱峰较为尖锐，谱估计性能较好。

5.2 多个谐波和间谐波分量检测。

设信号除基波(50 Hz)外还含有 1.7、3、5.1、6.7、7 和 9 次谐波分量，幅值分别为基波的 11%、5.7%、6.2%、8.3%、6.8%和 2%，相位分别为 $\pi/8$ 、 $\pi/4$ 、0、 $\pi/8$ 、 $\pi/7$ 和 $3\pi/4$ ；基波相位为 $\pi/3$ 。信号中加入了 60 dB 的高斯白噪声，信号的采样频率为 1 kHz，采样点数为 53。并根据式(6)设定 ε_1 和 ε_2 均为 0.001。采用Marple算法与FFT算法得到的结果如图 2 所示。

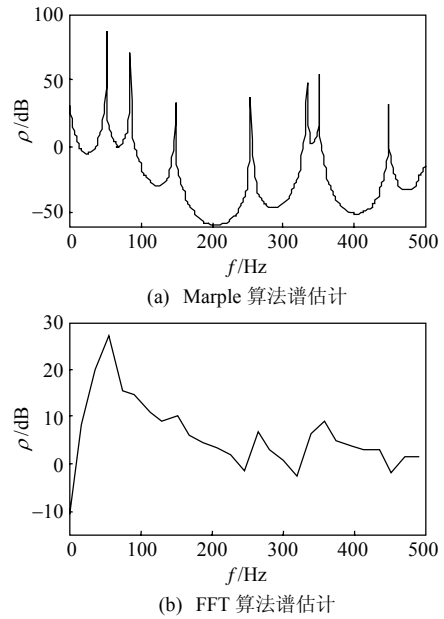


图 2 Results of the power spectral estimation

由图 2(b)可看出，FFT算法受到非同步采样和数据窗的影响，无法从图上提取到信号的全部谐波和间谐波分量，也无法检测到各次谐波和间谐波的精确频率信息，其谱估计效果较差。从图 2(a)可看出，Marple算法可准确地检测到频率为 50、85、148、255、333、350 和 449 Hz 的 7 个谱峰，平均频率偏差仅为 0.714 3 Hz，检测精度较高。从而进一步验证了Marple算法的高分辨率特性。由于已对参数 ε_1 和 ε_2 进行了设置，故Marple算法无需设定AR阶数。

6 结论

本文将Marple算法用于电力系统间谐波分析。与Burg算法相比，该算法对初始相位不敏感，频率偏移程度较低，且不存在谱线分裂现象。对较短的谐波信号进行检测，能精确检测出各次谐波和间谐波的频率信息。在设置了合适的参数 ε_1 和 ε_2 的情况下，无需事先确定阶数，由于算法利用了Levinson型阶数递推和附加的时移递推，计算效率高。同时，从仿真结果可看出该方法不受非同步采样的影响。

参考文献

- [1] 林海雪. 电力系统中的间谐波问题[J]. 供用电, 2001, 18(3): 6-9. Lin Haixue. Interharmonics in electrical power system[J]. Distribution and Utilization, 2001, 18(3): 6-9(in Chinese).
- [2] 张伏生, 耿中行, 葛耀中. 电力系统谐波分析的高精度 FFT 算法[J]. 中国电机工程学报, 1999, 19(3): 63-66. Zhang Fusheng, Geng Zhongxing, Ge Yaozhong. FFT algorithm with high accuracy for harmonic analysis in power system[J]. Proceedings of the CSEE, 1999, 19(3): 63-66(in Chinese).
- [3] 祈才君, 王小海. 基于插值 FFT 算法的间谐波参数估计[J]. 电工

- 技术学报, 2003, 18(1): 92-95.
- Qi Caijun, Wang Xiaohai. Interharmonics estimation based on interpolation FFT algorithm[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2003, 18(1): 92-95(in Chinese).
- [4] 钱昊, 赵荣祥. 基于插值 FFT 算法的谐波分析[J]. 中国电机工程学报, 2005, 25(21): 87-91.
- Qian Hao, Zhao Rongxiang. Interharmonics analysis based on interpolation FFT algorithm[J]. Proceedings of the CSEE, 2005, 25(21): 87-91(in Chinese).
- [5] 庞浩, 李东霞, 俎云霄, 等. 应用 FFT 进行电力系统谐波分析的改进算法[J]. 中国电机工程学报, 2003, 23(6): 50-54.
- Pang Hao, Li Dongxia, Zu Yunxiao, et al. An improved algorithm for harmonic analysis of power system using FFT technique[J]. Proceedings of the CSEE, 2003, 23(6): 50-54(in Chinese).
- [6] 卿柏元, 滕召胜, 高云鹏, 等. 基于 Nuttall 窗双谱线插值 FFT 的电力谐波分析方法[J]. 中国电机工程学报, 2008, 28(25): 153-158.
- Qing Baiyuan, Teng Zhaosheng, Gao Yunpeng, et al. An approach for electrical harmonic analysis based on Nuttall window double-spectrum-line Interpolation FFT[J]. Proceedings of the CSEE, 2008, 28(25): 153-158(in Chinese).
- [7] 兰华, 孙亮, 石要武. 基于互高阶谱 Pisarenko 方法的谐波计算[J]. 电工电能新技术, 2006, 25(1): 5-8.
- Lan Hua, Sun Liang, Shi Yaowu. Interharmonics calculation using cross-high-order spectral Pisarenko method[J]. Advanced Technology of Electrical Engineering and Energy, 2006, 25(1): 5-8(in Chinese).
- [8] 王志群, 朱守真, 周双喜. 基于 Pisarenko 谐波分解的谐波估算方法[J]. 电网技术, 2004, 28(15): 72-77.
- Wang Zhiqun, Zhu Shouzhen, Zhou Shuangxi. Inter-harmonics estimation by Pisarenko harmonic decomposition method[J]. Power System Technology, 2004, 28(15): 72-77(in Chinese).
- [9] 高培生, 谷湘文, 吴为麟. 基于空间谱和支持向量回归机的谐波分析[J]. 电力系统自动化, 2007, 31(24): 67-70.
- Gao Peisheng, Gu Xiangwen, Wu Weilin. Interharmonic analysis based on spatial spectrum and support vector regression machine[J]. Automation of Electric Power Systems, 2007, 31(24): 67-70(in Chinese).
- [10] 田伟, 王洪希, 白晶. 基于互高阶谱 Music 法的谐波检测[J]. 继电器, 2007, 35(22): 49-52.
- Tian Wei, Wang Hongxi, Bai Jing. Inter-harmonics parameter estimation on crosshigh-spectrum based on Music method[J]. Relay, 2007, 35(22): 49-52(in Chinese).
- [11] 沈睿俊, 杨洪耕. 基于特征空间求根法的非整数次谐波估计方法[J]. 中国电机工程学报, 2006, 26(24): 72-76.
- Shen Ruijun, Yang Honggeng. A new method for non-integer harmonics measurement based on root-eigenspace method[J]. Proceedings of the CSEE, 2006, 26(24): 72-76(in Chinese).
- [12] 牛卢璐. 基于 Esprit 的谐波和间谐波参数估计方法[J]. 继电器, 2007, 35(9): 37-40.
- Niu Lulu. Esprit based method for harmonics and interharmonics parameters estimation[J]. Relay, 2007, 35(9): 37-40(in Chinese).
- [13] 李晶, 裴亮, 郁道银, 等. 一种用于电力系统谐波与间谐波分析的超分辨率算法[J]. 中国电机工程学报, 2006, 26(15): 35-39.
- Li Jing, Pei Liang, Yu Daoyin, et al. A super-resolution algorithm for harmonic and inter-harmonic analysis in power system[J]. Proceedings of the CSEE, 2006, 26(15): 35-39(in Chinese).
- [14] 蔡忠法, 陈隆道. 基于 AR 谱估计和 Adaline 神经元的谐波分析[J]. 电力系统自动化, 2007, 31(17): 78-82.
- Cai Zhongfa, Chen Longdao. Inter-harmonic analysis based on AR spectral estimation and adaline neural network[J]. Automation of Electric Power Systems, 2007, 31(17): 78-82(in Chinese).
- [15] 马秉伟, 刘会金, 周莉, 等. 一种基于自回归模型的谐波谱估计的改进算法[J]. 中国电机工程学报, 2005, 25(15): 79-83.
- Ma Bingwei, Liu Huijin, Zhou Li, et al. An improved algorithm of interharmonics spectral estimation based on AR mode[J]. Proceedings of the CSEE, 2005, 25(15): 79-83(in Chinese).
- [16] 陈涵, 刘会金, 李大路. 基于高阶累积量 Burg 自适应算法的谐波谱估计[J]. 电力系统自动化, 2008, 32(21): 72-76.
- Chen Han, Liu Huijin, Li Dalu. Inter-harmonic estimation using Burg adaptive algorithm based on higher-order cumulant[J]. Automation of Electric Power Systems, 2008, 32(21): 72-76(in Chinese).
- [17] Marple L. A new autoregressive spectrum analysis algorithm[J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, 1980, ASSP-28(4): 441-454.
- [18] 皇甫堪, 陈建文, 楼生强. 现代数字信号处理[M]. 北京: 电子工业出版社, 2003: 197, 208-214.
- [19] 张贤达. 现代数字信号处理[M]. 2版. 北京: 清华大学出版社, 1999: 120-121.
- [20] 陆传赉. 现代信号处理导论[M]. 北京: 北京邮电大学出版社, 2002: 102-109.

附录 A

首先, 式(3)可表示为

$$x(n) = \sum_{i=1}^M \frac{A_i}{2} e^{j(2\pi f_i n / f_s + \varphi_i - \pi/2)} + \sum_{i=1}^M \frac{A_i}{2} e^{j(-2\pi f_i n / f_s - \varphi_i + \pi/2)} + \eta(n) \quad (A1)$$

在不考虑负频率分量的情况下, 可得

$$x(n) = \sum_{i=1}^M \frac{A_i}{2} e^{j(2\pi f_i n / f_s + \varphi_i - \pi/2)} + \eta(n) = \hat{x}(n) + \eta(n) \quad (A2)$$

式中 $\hat{x}(n) = \sum_{i=1}^M \frac{A_i}{2} e^{j(2\pi f_i n / f_s + \varphi_i - \pi/2)}$.

$$\text{令: } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ e^{j2\pi f_1 / f_s} & e^{j2\pi f_2 / f_s} & \cdots & e^{j2\pi f_M / f_s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j2\pi f_1 (N-1) / f_s} & e^{j2\pi f_2 (N-1) / f_s} & \cdots & e^{j2\pi f_M (N-1) / f_s} \end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{X}} = [\hat{x}(1), \hat{x}(2), \cdots, \hat{x}(N)], \mathbf{B} = [b_1, b_2, \cdots, b_M]^T, b_i = \frac{A_i}{2} e^{j(\varphi_i - \pi/2)},$$

其中 N 为信号的采样点数, 则有

$$\mathbf{AB} = \hat{\mathbf{X}} \quad (A3)$$

根据最小二乘法可得

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \hat{\mathbf{X}} \quad (A4)$$

实际信号中的 $\hat{x}(n)$ 是未知的, 在允许一定误差的条件下, 可用 $x(n)$ 代替 $\hat{x}(n)$, 求出 b_i 后, 可根据式(A5)来计算信号中各谐波和间谐波分量的幅值 A_i 和相位 φ_i :

$$\begin{cases} A_i = 2 |b_i| \\ \varphi_i = \pi/2 + \angle b_i \end{cases} \quad (A5)$$



李明

收稿日期: 2009-05-31.

作者简介:

李明(1981—), 男, 博士研究生, 研究方向为现代信号处理在电力系统中的应用研究, qingxiaoyanzhong@126.com;

王晓茹(1962—), 女, 教授, 博士生导师, 研究方向为电力系统保护与安全稳定控制、变电站自动化。

(责任编辑 谷子)