

# 感应同步器的部分元等效电路模型

刘承军, 邹继斌

(机器人技术与系统国家重点实验室(哈尔滨工业大学), 黑龙江省 哈尔滨市 150001)

## Partial Element Equivalent Circuit Model of Inductosyn

LIU Cheng-jun, ZOU Ji-bin

(State Key Laboratory of Robotic Technology and System (Harbin Institute of Technology),  
Harbin 150001, Heilongjiang Province, China)

**ABSTRACT:** The mathematical model of output voltage is the theoretical basis for analyzing the errors of inductosyn and optimizing design of windings. For the current misdistribution caused by contiguity effect between the exciting windings not being taken into account in traditional mathematical model, the bigger calculation error of harmonic voltages is brought out when the high frequency alternating current flows in the exciting windings. A mathematical model of output voltage based on partial element equivalent circuit (PEEC) method was built, on the basis of which, current distribution characteristic of exciting windings was studied, the output voltages of induction windings were calculated in condition of different exciting frequency and different configuration parameters. The method to eliminate harmonic voltages was proposed by analyzing harmonic component of position function. The accuracy of the model was verified by experiment.

**KEY WORDS:** inductosyn; mathematical model; output voltage; equivalent circuit

**摘要:** 输出电势的数学模型是分析感应同步器误差及进行绕组优化设计的理论基础。传统的数学模型未考虑激磁绕组邻近效应引起的电流分布不均对输出电势的影响, 从而会在高频下带来较大的谐波电势计算误差。建立了基于部分元等效电路方法的输出电势数学模型, 研究激磁绕组的电流分布特性, 计算了激磁绕组在不同工作频率、不同结构参数下感应绕组的输出电势, 分析其位置函数的谐波成分, 并提出消除谐波电势的途径。最后通过实验验证了模型的准确性。

**关键词:** 感应同步器; 数学模型; 输出电势; 等效电路

## 0 引言

感应同步器是一种高精度的位置传感器, 被广

基金项目: 国家自然科学基金项目(50777012)。

Project Supported by National Natural Science Foundation of China (50777012).

泛应用于惯导测试系统中。感应同步器各种误差的分析和计算都依赖于输出电势的准确计算, 所以建立感应同步器输出电势的数学模型具有重要的意义。目前, 输出电势的模型, 如长线分布参数模型和谐波电势模型等<sup>[1-2]</sup>, 一般都假设导体截面上各点电流是均匀分布的, 而实际上由于电流在导片内的趋肤效应、相邻导片的邻近效应和相间隔导片电流的斥流效应, 电流在导片中分布不均匀, 且频率越高, 不均匀性越严重。

部分元等效电路(partial element equivalent circuit, PEEC)是一种有效的电路建模和参数提取方法, 最初由IBM公司的Ruehli于20世纪70年代在计算复杂集成电路的电感时提出<sup>[3-6]</sup>, 后被广泛应用于集成电路和PCB布线时部分参数的计算<sup>[7-11]</sup>。经过30多年的发展, 延迟时间<sup>[12-13]</sup>、电介质单元<sup>[14]</sup>及非正交单元几何公式<sup>[15-16]</sup>的引入, 使部分元等效电路方法成为一种多用途的电磁求解方法。PEEC方法从积分形式的麦克斯韦方程出发, 将大尺寸导体分割成适当数量的小导体(部分电路单元), 计算出各部分电路单元的部分电感、部分电容以及各单元之间的互感和互容, 最后将部分电路单元构成等效电路进行电路模拟, 从而将复杂形状导体的电磁场求解问题转换为等效电路的建立和分析问题。PEEC方法综合考虑了趋肤效应、邻近效应等因素的影响<sup>[17]</sup>, 可以准确地计算感应同步器在不同结构参数下的阻抗分布, 分析定子绕组和转子绕组在不同工作频率下的绕组电流分布, 进而得到了定子绕组的输出电势。本文用PEEC方法对感应同步器输出电势进行建模研究, 分析输出电势位置函数的谐波组成, 并通过实验验证该模型的准确性。

## 1 感应同步器输出电势建模

### 1.1 PEEC 方法

PEEC 方法的基本原理是基于电磁场方程推导出等值电路模型。根据电磁场方程,多导体系统中空间任意一点  $P$  满足方程:

$$E_0(\mathbf{r}, t) = \frac{J(\mathbf{r}, t)}{\sigma} + \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \varphi(\mathbf{r}, t) \quad (1)$$

式中:  $\mathbf{r}$  为从源点到观测点的矢量;  $\sigma$  为  $P$  点处电导率;  $J(\mathbf{r}, t)$  为  $t$  时刻电流密度;  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  分别为  $t$  时刻  $P$  点处的矢量电位与标量电位;  $E_0(\mathbf{r}, t)$  为外界施加的场强,一般情况下  $E_0(\mathbf{r}, t) = 0$ 。

对于由  $K$  个导体所组成的系统,有

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{k=1}^K \frac{\mu}{4\pi\epsilon} \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') J(\mathbf{r}', t') dv' \quad (2)$$

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \sum_{k=1}^K \frac{1}{4\pi\epsilon} \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}', t') dv' \quad (3)$$

式中:  $v'$  为导体体积;  $\mathbf{r}'$  为场源的矢量;  $t'$  为延迟时间;  $v_k$  为第  $k$  个导体的体积;  $\epsilon$  为介质的介电常数;  $\mu$  为介质的磁导率;  $\rho(\mathbf{r}', t')$  为导体表面电荷密度;  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  为格林函数。

将式(2)、(3)代入式(1),得

$$E_0(\mathbf{r}, t) = \frac{J(\mathbf{r}, t)}{\sigma} + \sum_{k=1}^K \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\mu}{4\pi\epsilon} \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') J(\mathbf{r}', t') dv' \right] + \sum_{k=1}^K \nabla \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon} \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}', t') dv' \right] \quad (4)$$

PEEC方法将式(4)描述的电磁场求解转换成相应的等值电路方程求解。在研究复杂形状的多导体系统时,通常将其划分为若干细小单元,假定  $J$ 、 $\rho$  均为常数,则上述积分方程式(4)的求解近似为多个细小单元的物理量代数方程的联立求解<sup>[18]</sup>。

令  $\gamma$  代表  $x$ 、 $y$ 、 $z$  中任一方向,每个导体沿  $\gamma$  方向分成  $N_\gamma$  ( $N_{\gamma x}$ ,  $N_{\gamma y}$ ,  $N_{\gamma z}$ ) 个单元,假定每个单元上的电流密度矢量恒定<sup>[4]</sup>,则式(4)可写为

$$E_{0\gamma}(\mathbf{r}, t) = \frac{J_\gamma(\mathbf{r}, t)}{\sigma} + \sum_{k=1}^K \sum_{n=1}^{N_{\gamma k}} \frac{\mu}{4\pi} \left( \int \frac{dv'}{v_{nk}} \right) \frac{\partial J_{\gamma nk}(t_n)}{\partial t} + \sum_{k=1}^K \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t') dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \quad (5)$$

将式(5)在每个体积电流单元上积分,就得到一组可视为支路伏安关系的方程。在第  $l$  个单元上积分,并令  $E_0(\mathbf{r}, t) = 0$ , 得

$$\frac{1}{\sigma} \int J_\gamma(\mathbf{r}, t) dv_l + \sum_{k=1}^K \sum_{n=1}^{N_{\gamma k}} \frac{\mu}{4\pi} \left[ \int \int \frac{dv' dv'_l}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \frac{\partial J_{\gamma nk}(t_n)}{\partial t} +$$

$$\sum_{k=1}^K \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[ \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t') ds'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] dv_l = 0 \quad (6)$$

式(6)两端除以部分单元  $l$  的横截面积  $a_l$ , 则等式左边的 3 项分别对应于电阻、电感和电容分量,各项可用基尔霍夫电压定律来解释。由此得部分电阻、部分电感和部分电容分别为

$$R_{ii} = \frac{l_i}{\sigma a_i}$$

$$L_{pji} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{a_i a_j} \int_{v_i} \int_{v_j} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv_i dv_j$$

$$C_{pji} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{s_i} \int_{s_j} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds' ds$$

### 1.2 感应同步器输出电势的 PEEC 模型

旋转式感应同步器定、转子绕组排列如图 1 所示。图 1(a)所示连续绕组为感应同步器的转子绕组,即激磁绕组;图 1(b)所示分段绕组为定子绕组,感应绕组。

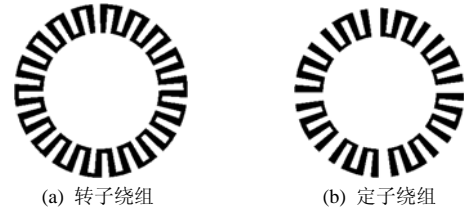


图 1 圆感应同步器的绕组排列

Fig. 1 Winding arrangement of rotary-type inductosyn

为分析感应同步器的输出电势,忽略非线性基板材料的影响,将旋转式感应同步器的绕组展开成直线排列,并假设  $x$  方向的导体互相平行,如图 2 所示。

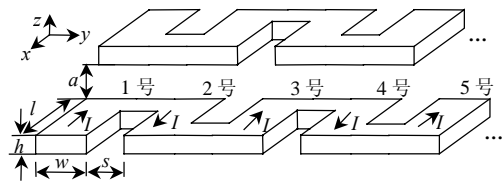


图 2 感应同步器绕组的直线排列

Fig. 2 Line arrangement of inductosyn windings

由于感应同步器绕组的径向( $x$  方向)导体长度远大于切向( $y$  方向)导体长度,若忽略  $y$  方向导体,则感应同步器的 PEEC 模型如图 3 所示。其中,转子绕组简化为下方的 8 个平行的矩形导体,分别记为 1,2,3,...,8 号;定子绕组简化为上方 3 个平行的矩形导体,分别记为 A、B、C。此 11 个导体长为  $l$ , 宽为  $w$ , 高为  $h$ , 且  $l=w=h$ ; 下方各导体间距均为  $s$ ; 上下导体垂直间距为  $a$ 。设转子绕组所通电流为  $I$ , 则下方导体的电流方向如图 3 所示,上方定子绕组

空载，电流为 0。

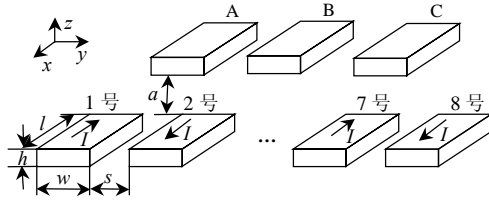


图 3 感应同步器的 PEEC 模型  
Fig. 3 PEEC model of inductosyn

将各导体沿 Y 方向均分为 N 个相互并联的矩形导线段，方便起见，1 号导体的 N 个导线段分别记为 11,12,⋯,1N，2 号导体的 N 个导线段分别记为

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} R_{11} + j\omega L_{11,11} & \dots & j\omega M_{11,1N} & \dots & j\omega M_{11,2N} & \dots & j\omega M_{11,CN} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ j\omega M_{1N,11} & \dots & R_{1N} + j\omega L_{1N,1N} & \dots & j\omega M_{1N,2N} & \dots & j\omega M_{1N,CN} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ j\omega M_{2N,11} & \dots & j\omega M_{2N,1N} & \dots & R_{2N} + j\omega L_{2N,2N} & \dots & j\omega M_{2N,CN} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ j\omega M_{A1,11} & \dots & j\omega M_{A1,1N} & \dots & j\omega M_{A1,2N} & \dots & j\omega M_{A1,CN} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ j\omega M_{CN,11} & \dots & j\omega M_{CN,1N} & \dots & j\omega M_{CN,2N} & \dots & R_{CN} + j\omega L_{CN,CN} \end{bmatrix} \quad (8)$$

由于各导体的 N 个导线段并联，所以每个导体两端电压都与各导线段两端电压相等，导体电流等于各导线段电流之和，即

$$I_i = I_{i1} + I_{i2} + \dots + I_{iN} = I, \quad i=1,2,\dots,8 \quad (9)$$

$$I_i = I_{i1} + I_{i2} + \dots + I_{iN} = 0, \quad i=A,B,C \quad (10)$$

$$U_i = U_{i1} = U_{i2} = \dots = U_{iN}, \quad i=1,2,\dots,C \quad (11)$$

设

$$\mathbf{T} = \mathbf{Z}^{-1} \quad (12)$$

根据式(7)、(11)，有

$$\begin{bmatrix} I_{11} \\ \vdots \\ I_{1N} \\ \vdots \\ I_{2N} \\ \vdots \\ I_{A1} \\ \vdots \\ I_{CN} \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} U_{11} \\ \vdots \\ U_{1N} \\ \vdots \\ U_{2N} \\ \vdots \\ U_{A1} \\ \vdots \\ U_{CN} \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_2 \\ \vdots \\ U_A \\ \vdots \\ U_C \end{bmatrix} \quad (13)$$

根据式(9)、(10)可得各导体的总电流为

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1C} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2C} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ S_{C1} & S_{C2} & \dots & S_{CC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_C \end{bmatrix} \quad (14)$$

21,22,⋯,2N，以此类推。则各导体 U-I 关系如式(7)。

$$\begin{bmatrix} U_{11} \\ \vdots \\ U_{1N} \\ \vdots \\ U_{2N} \\ \vdots \\ U_{A1} \\ \vdots \\ U_{CN} \end{bmatrix} = \mathbf{Z} \begin{bmatrix} I_{11} \\ \vdots \\ I_{1N} \\ \vdots \\ I_{2N} \\ \vdots \\ I_{A1} \\ \vdots \\ I_{CN} \end{bmatrix} \quad (7)$$

式中：Z 为 (11N)×(11N) 的阻抗矩阵，其自感及互感采用 Greenhouse 公式<sup>[19-20]</sup>计算，即

$$\text{式中：}$$

式中：

$$S_{11} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N T_{ij}; S_{12} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=N+1}^{2N} T_{ij}; S_{1C} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=10N+1}^{11N} T_{ij}; S_{21} = \sum_{i=N+1}^{2N} \sum_{j=1}^N T_{ij}; S_{22} = \sum_{i=N+1}^{2N} \sum_{j=N+1}^{2N} T_{ij}; S_{2C} = \sum_{i=N+1}^{2N} \sum_{j=10N+1}^{11N} T_{ij}; S_{C1} = \sum_{i=10N+1}^{11N} \sum_{j=1}^N T_{ij}; S_{C2} = \sum_{i=10N+1}^{11N} \sum_{j=N+1}^{2N} T_{ij}; S_{CC} = \sum_{i=10N+1}^{11N} \sum_{j=10N+1}^{11N} T_{ij}。$$

其中， $T_{ij}$  为矩阵 T 的第 i 行、第 j 列的元素。则各导体电压为

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1C} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2C} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ S_{C1} & S_{C2} & \dots & S_{CC} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_C \end{bmatrix} \quad (15)$$

将式(9)、(10)中各导体的电流值代入式(15)，得到各导体的电压为

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_8 \\ U_A \\ U_B \\ U_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & \dots & S_{18} & S_{1A} & S_{1B} & S_{1C} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ S_{81} & \dots & S_{88} & S_{8A} & S_{8B} & S_{8C} \\ S_{A1} & \dots & S_{A8} & S_{AA} & S_{AB} & S_{AC} \\ S_{B1} & \dots & S_{B8} & S_{BA} & S_{BB} & S_{BC} \\ S_{C1} & \dots & S_{C8} & S_{CA} & S_{CB} & S_{CC} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ \vdots \\ I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

由于感应同步器在圆周方向上有多根导体，考虑对称性，导体 B 的电势  $U_B$  能够准确描述实际的

导体电势, 则定子一相的总输出电势为

$$E_{BS} = nU_B \quad (17)$$

式中:  $n$  为定子一相绕组的导体总数。

### 1.3 谐波电势模型及与 PEEC 模型的比较

传统谐波电势法的核心是求解气隙磁感应强度。首先把激磁绕组的电流密度函数进行谐波分解, 并列各区域的向量磁位方程组, 方程组中的系数可利用分界面上磁场的边界条件确定; 然后求出每根导体的平均磁链; 进而求出输出绕组的总磁链; 最后求得输出绕组的输出总电势。由于假定介质是线性的, 故可将电流密度、磁场和电势全部分解成各次谐波成分进行计算, 则输出电势如式(18)<sup>[1]</sup>所示。

$$E = 2\pi fL \sum_{v=1,3,5}^{\infty} \psi = \sum_{v=1,3,5}^{\infty} \left[ \frac{fIK_j ML \times 10^{-8}}{v^3 k_j^2 a_1 a_2} \cdot e^{-vk_j \delta} k_s k_{\Delta} k_{\mu} k_{a_1} k_{a_2} k_{\gamma_1} \sin(vk_j \alpha) \right] \quad (18)$$

式中:  $f$  为激磁频率;  $L$  为有效耦合长度;  $\psi$  为每根导体的平均磁链;  $I$  为激磁电流;  $K_j$  为分段绕组一相的导体组数;  $M$  为组导体数;  $v$  为以极距为基波节距的谐波次数;  $k_j$  为极距弧度转换系数;  $k_s$ 、 $k_{\Delta}$ 、 $k_{\mu}$ 、 $k_{a_1}$ 、 $k_{a_2}$ 、 $k_{\gamma_1}$  分别为分段绕组的符号系数, 计及原、副端导体厚度引起磁链减少的系数, 计及采用导磁基板后引起磁通增加的系数, 分段绕组导体宽度系数, 连续绕组导体宽度系数, 分段绕组导体分布系数。

比较两种建模方法可以发现: 谐波电势法的前提是假设导体截面上各点电流密度相同, 对于矩形截面的绕组而言, 无论激磁频率高低, 输出电势中仅存在理论上的全部奇数次谐波, 且大小取决于诸多经验系数, 造成计算复杂、不准确; 而部分元等效电路法将导体分成若干小导体, 计及了电流在导片内的趋肤效应、邻近效应等因素造成电流在导片中分布的不均匀。当激磁频率越高时, 不均匀性越严重, 输出电势中的谐波含量越高, 而这部分谐波含量的变化并未反映在谐波电势模型中。所以, 相对于传统的谐波电势法, 部分元等效电路法可以更真实地描述导体中的电流分布, 更准确地计算输出电势的数值。

## 2 激磁绕组的电流分布特性研究

根据 1 节的分析可知, 感应同步器工作于不同频率时, 激磁绕组中的电流由于邻近效应等因素影响, 电流分布将出现不均匀现象。通过建立基于部

分元等效电路方法的数学模型, 可以对感应同步器绕组导体中的电流分布特性进行研究。感应同步器的结构参数如下: 定、转子导体宽  $w=2$  mm, 定、转子极距均为 2.8 mm, 定、转子导体厚  $h=0.035$  mm, 激磁绕组通以一定频率、峰值为 0.5 A 的交流电流, 工作气隙  $a=0.2$  mm。图 4 为激磁绕组在不同工作频率下的电流分布计算结果(如不作特殊说明, 本文的计算结果均指 PEEC 模型在 Matlab 软件中计算得到的结果)。由图可知, 激磁频率  $f=20$  Hz 和  $f=1$  kHz 时, 电流分布比较均匀;  $f=10$  kHz 时, 电流分布明显不均匀;  $f=100$  kHz 时, 电流分布则极不均匀, 此时将在输出电势中产生较大的高次谐波电势, 进而给感应同步器的精度带来损失。

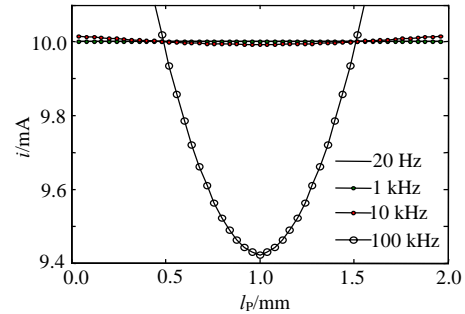


图 4 电流分布特性

Fig. 4 Current distribution characteristic

## 3 输出电势的谐波分析及抑制

为模拟感应同步器真实的运动工作状态, 将转子绕组相对定子绕组的位置函数用离散点描述, 由式(17)计算出每个位置点的输出电势, 通过快速傅里叶变换(fast Fourier transform, FFT)对输出电势的位置函数进行谐波分析。感应同步器输出电势的位置函数如图 5 所示, 其描述的为定子绕组相对转子绕组旋转运动的情形。图中的低频正弦波包络即为输出电势的位置函数, 它是一个载波频率与激磁电流频率相同的被角位置调制的函数。在本文研究中, 为计算方便, 只取单根导体 B 的电势, 不影响位置函数的谐波分析, 同时, 取电角度周期  $360^\circ$  内的离散点数为 282。

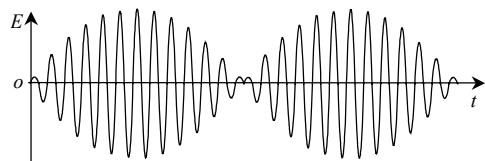


图 5 输出电势的位置函数

Fig. 5 Location function of output voltage

以 2 节的结构参数为例, 对感应同步器输出电势位置函数的谐波进行分析, 谐波含量定义为各次谐波

的幅值与基波幅值的比值，并用百分数表示。图 6 为各次谐波含量随工作频率变化的曲线图，可见随着频率增加，各次谐波含量均发生不同程度的变化，尤其 3 次谐波含量变化最大。激磁频率  $f=100\text{ kHz}$  时的 3 次谐波含量为  $f=20\text{ Hz}$  时的近 6 倍，而 5、7、9 次谐波则基本不变，甚至略有下降。所以，感应同步器的工作频率不宜过高，在条件允许的情况下，尽量选择 10 kHz 以下。

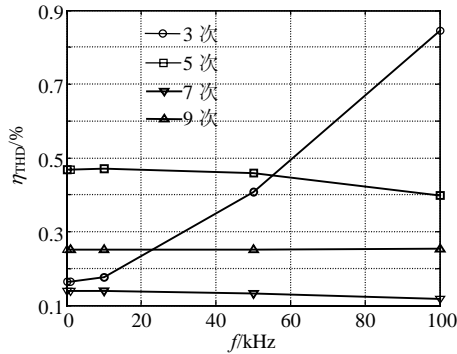


图 6 谐波含量随频率变化规律

Fig. 6 Changes of harmonic content with frequency

定、转子导体的尺寸是感应同步器绕组最重要的参数。合理地设计定、转子导体的宽度有助于抑制高次谐波。仍采用 2 节的算例进行分析，工作气隙  $a=0.2\text{ mm}$ 。改变激磁绕组的导体宽度，计算不同导体宽度情况下各高次谐波含量。图 7 为激磁频率  $f=10\text{ kHz}$  时的变化规律。由图可知，3 次谐波的含量在  $w=1.7\text{ mm}$  时达到最小值，为 0.063%，而 5 次谐波含量在  $w=1.6\text{ mm}$  时达到最小值，为 0.085%。

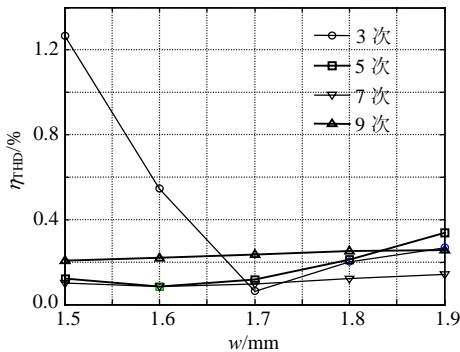


图 7 谐波含量随导体宽度变化规律 ( $f=10\text{ kHz}$ )

Fig. 7 Harmonic content changes with conductor width ( $f=10\text{ kHz}$ )

图 8 为激磁频率  $f=100\text{ kHz}$  时的变化规律。由图可知，3 次谐波含量在  $w=1.66\text{ mm}$  时达到最小值，为 0.005%；5 次谐波含量在  $w=1.5\text{ mm}$  时达到最小值，为 0.007%。经分析可知，选择合适的导体宽度能明显地抑制高次谐波；另外，在不同的工作频率下，抑制谐波所取的导体宽度也不同。以 5.6 mm

为一个电角度周期计算，为抑制 3 次谐波， $f=10\text{ kHz}$  时  $w=0.304\text{ T}$ ，而  $f=100\text{ kHz}$  时  $w=0.296\text{ T}$ 。为抑制 5 次谐波， $f=10\text{ kHz}$  时  $w=0.286\text{ T}$ ，而  $f=100\text{ kHz}$  时  $w=0.268\text{ T}$ 。这进一步说明了工作频率对高次谐波含量有明显的影 响，需要根据不同情况选择不同的导体宽度以抑制高次谐波。

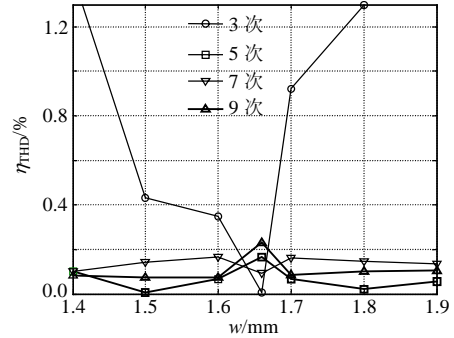


图 8 谐波含量随导体宽度变化规律 ( $f=100\text{ kHz}$ )

Fig. 8 Harmonic content changes with conductor width ( $f=100\text{ kHz}$ )

### 4 实验验证

为验证所建立的基于 PEEC 方法的感应同步器输出电势模型及相应分析的正确性，制作了一套 360 对极的旋转式感应同步器进行实验，其结构参数同 2 节。由功率函数发生器为激磁绕组供电，感应绕组输出电势经高精度测量放大器放大后由多位电压表测量。将感应同步器安装在高精度的光学分度头上，由数显表提供角度基准，每个电角度周期等分为 120 个点测量，把测量得到的数据用 FFT 进行谐波分析，并与模型的计算结果比较。实验中任取定子绕组中的一相进行测量，而模型的计算值则考虑了一相所有导体(704 根)串联，这样就保证了二者的等价性。

图 9 为 PEEC 法计算结果、谐波电势法计算结果和实验结果的对比曲线。随着气隙的增大，输出

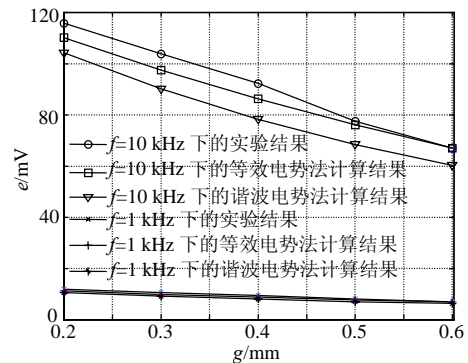


图 9 随气隙变化的计算结果与实验结果对比  
Fig. 9 Calculation and experimental results comparison with the air-gap changes

电势逐渐减小。实验值比计算值稍大的原因是模型计算忽略了端部导体的耦合电势。定义 $e_p$ 为PEEC法计算结果相对于实验结果的误差，而 $e_H$ 为谐波电势法计算结果相对于实验结果的误差，对比工作频率 $f=1\text{ kHz}$ 和 $f=10\text{ kHz}$ 时随气隙变化的计算误差。由表1可知，等效电路法模型和谐波电势法模型的计算误差最大值分别为6.73%和15.4%，等效电路法模型的计算精度明显高于谐波电势法模型。

表1 PEEC法与谐波电势法的计算误差比较  
Tab. 1 Comparison of calculation error between PEEC method and harmonic voltage method

气隙/mm	$e_p/\%$		$e_H/\%$	
	$f=10\text{ kHz}$	$f=1\text{ kHz}$	$f=10\text{ kHz}$	$f=1\text{ kHz}$
0.2	4.76	5.98	9.96	11.11
0.3	6.17	6.73	13.21	13.46
0.4	6.72	6.52	15.40	15.22
0.5	1.94	2.56	11.77	12.82
0.6	2.99	4.29	10.27	14.29

图10为不同工作频率下，3、5次谐波含量的等效电路模型计算结果、谐波电势法计算结果和实验结果的对比曲线。以图中3次谐波为例进行分析，在 $f=100\text{ kHz}$ 时，等效电路法模型的计算结果已反映出3次谐波含量的增加，并且与实验结果吻合；而谐波电势模型由于假设电流分布是均匀的，导致3次谐波含量的计算结果不随频率的变化而变化，这与实际情况明显不符。

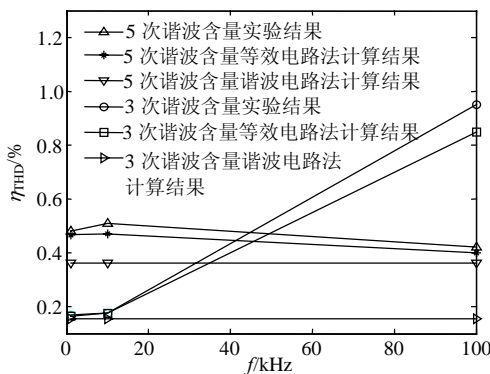


图10 随频率变化的计算结果与实验结果对比  
Fig. 10 Calculation and experimental results comparison with the frequency changes

## 5 结论

1) 部分元等效电路方法综合考虑了趋肤效应和邻近效应等因素的影响，可以用来建立感应同步器绕组输出电势的数学模型。

2) 感应同步器激磁绕组的导体电流在工作频率超过10 kHz时将产生明显的不均匀分布，随频率的增加，输出电势的3次谐波含量成正比增加。

3) 通过合理选择导体宽度尺寸，可以有效地抑制输出电势中的高次谐波，在不同工作频率下导体宽度的选择不同。

4) 感应同步器输出电势的等效电路模型可以准确计算各种不同结构参数及工作频率下的输出电势。

## 参考文献

- [1] 陆永平, 岑文远. 感应同步器及其系统[M]. 北京: 国防工业出版社, 1985: 204.  
Lu Yongping, Cen Wenyuan. Inductosyn and system[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 1985: 204(in Chinese).
- [2] 陆永平, 张小兵. 感应同步器的气隙电势和零位误差分析[J]. 电机与控制学报, 1997, 1(1): 7-10.  
Lu Yongping, Zang Xiaobing. The EMF of inductosyn and error analysis[J]. Electric Machines and Control, 1997, 1(1): 7-10(in Chinese).
- [3] Ruehli A E. Inductance calculations in a complex integrated circuit environment[J]. IBM Journal of Research and Development, 1972, 16(5): 470-481.
- [4] Ruehli A E. Equivalent circuit models for three dimensional multiconductor system[J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 1974, 22(3): 216-221.
- [5] Ruehli A E, Clayton P, Jan G. Inductance calculations using partial inductances and macromodels[C]. IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility, Atlanta, US, 1995.
- [6] Ruehli A E, Miekala U, Heeb H. Stability of discretized partial element equivalent EFIE circuit models[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1995, 43(6): 553-559.
- [7] 曾翔君, 王兆安. 基于局部元电路等效原理对混合封装电力电子集成模块内互感耦合的研究[J]. 中国电机工程学报, 2004, 24(7): 134-139.  
Zeng Xiangjun, Wang Zhaoan. Mutual inductance coupling research based on PEEC theory inside hybrid IPEM[J]. Proceedings of the CSEE, 2004, 24(7): 134-139(in Chinese).
- [8] Mei Shizhong, Ismail Y I. Modeling skin and proximity effects with reduced realizable RL circuits[J]. IEEE Transactions on Very Large Scale Integration (VLSI) System, 2004, 12(4): 437-447.
- [9] 赵治华, 马伟明. 钢板地阻抗的频率特性[J]. 中国电机工程学报, 2003, 23(8): 119-124.  
Zhao Zhihua, Ma Weiming. Frequency characteristic of ground impedance for steel plane[J]. Proceedings of the CSEE, 2003, 23(8): 119-124(in Chinese).
- [10] 潘启军, 马伟明, 赵治华, 等. 混合电磁结构磁性部分元等效电路建模技术的解析及实验研究[J]. 中国电机工程学报, 2008, 28(21): 128-134.  
Pan Qijun, Ma Weiming, Zhao Zhihua, et al. Analytical method and experimental validation of magpeec modeling technique for hybrid structure[J]. Proceedings of the CSEE, 2008, 28(21): 128-134(in Chinese).
- [11] 钟玉林, 咸哲龙, 孙旭东, 等. 计及部分电容的接地回路高频电路模型[J]. 中国电机工程学报, 2005, 25(17): 37-41, 149.  
Zhong Yulin, Xian Zhelong, Sun Xudong, et al. HF circuit model of conducted EMI of ground net based on PEEC[J]. Proceedings of the

- CSEE, 2005, 25(17): 37-41, 149(in Chinese).
- [12] Heeb H, Ruehli A E. Retarded models for PC board interconnects-or how the speed of light affects your SPICE circuit simulation[C]. IEEE International Conference on Computer-Aided Design, Santa Clara, CA, US, 1991.
- [13] Ruehli A E, Chiprout. The importance of retardation in PEEC models for electrical interconnect and package (EIP) applications [J]. Electrical Performance of Electronic Packaging, 1995, 2(4): 232-234.
- [14] Ruehli A E, Heeb H. Circuit models for three-dimensional geometries including dielectrics[J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 1992, 40(7): 1507-1516.
- [15] Ruehli A E, Antonini G, Esch J, et al. Nonorthogonal PEEC formulation for time-and frequency-domain EM and circuit modeling[J]. IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, 2003, 45(2): 167-176.
- [16] Musing A, Ekman J, Kolar J W. Efficient calculation of non-orthogonal partial elements for the PEEC method[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2009, 45(3): 1140-1143.
- [17] Cao Y, Groves R A, Zamdmer N D, et al. Frequency-independent equivalent circuit model for on-chip spiral inductors[J]. IEEE Journal of Solid-State Circuits, 2003, 38(3): 419-426.
- [18] 戚哲龙, 钟玉林, 孙旭东, 等. 用于传导电磁干扰分析的接地回路模型与参数[J]. 中国电机工程学报, 2005, 25(7): 156-161.
- Xian Zhelong, Zhong Yulin, Sun Xudong, et al. Grounding circuit model and parameters for conducted EMI analysis[J]. Proceedings of the CSEE, 2005, 25(7): 156-161(in Chinese).
- [19] Li F H, Li Z F. A novel modeling method of SI chip integrated spiral inductors for RFIC's[J]. Chinese Journal of Electronics, 2003, 12(3): 483-486.
- [20] Greenhouse H M. Design of planar rectangular micro-electronic inductors[J]. IEEE Transactions on Parts, Hybrids and Packaging, 1974, 10(2): 101-109.



刘承军

收稿日期: 2009-09-10。

作者简介:

刘承军(1976—), 男, 博士研究生, 讲师, 主要研究方向为测角电机系统、特种电机, liucj@hit.edu.cn;

邹继斌(1957—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为一体化电机、微特电机及控制, zoujibin@hit.edu.cn。

(责任编辑 张玉荣)