

在 MIMD 型机上求解板的临界载荷 的一种并行算法

吕全义 叶天麒

(西北工业大学一系, 西安, 710072)

A PARALLEL ALGORITHM ON THE MIMD FOR THE CALCULATION OF BUCKLING LOADS OF THE PLATE

Lu Quanyi, Ye Tianqi

(First Department, Northwestern Polytechnical University, Xi'an, 710072)

摘要 提出了一种在 MIMD 型并行机上求解板的临界载荷的子结构方法的并行算法。此算法实际上就是解决 $Ax = \lambda Bx$ 广义特征值问题(其中 A 、 B 为正定的箭头型矩阵)。主要通过矩阵变换将此问题转化成适合并行算法的一般特征值问题。给出了此并行算法的并行加速及效率的分析和算例, 证明了此并行算法的优越性。

关键词 并行处理, 本征矢量, 同余, 矩阵法

中图分类号 V214.1, TP391.75

Abstract A parallel algorithm is presented which is based on the substructure technique of the finite element method for determining the critical loads of thin elastic plates. The single path subdivision approach is used for the numbering of the nodes of the finite element mesh; therefore the doubly bordered band form of the stiffness matrices can be obtained. By using a congruence transformation, an equivalent mathematical model of the generalized eigenvalue problem is established to fit the parallel processing for calculating the critical loads of the plate stability problem. The criterion for the evaluation of the speed-up of the parallel computation is given. Numerical analyses have been performed to illustrate the efficiency and the advantages of the parallel processing on Multi-Transputer System.

Key words parallel processing (computers), eigenvalues, congruences, matrix methods

如何将有限元法并行化是当前面临的重要问题之一。目前已有许多人从事这方面的工作, 国内外出现了许多关于并行有限元分析的文献^[1~4]。本文提出一种在 MIMD 型并行机上求解板的临界载荷的子结构方法的并行算法, 并进行了加速及并行效率的分析, 证明此算法具有明显的优越性。

1 子结构的划分与算法

1.1 子结构的划分

假设有 P 台处理机, 则将结构划分成 P 个子结构。再用单道剖分法为节点编号。这样形成的结构刚度矩阵与几何刚度矩阵皆是箭头形, 即由此得到的数学模型为

1992年9月14日收到, 1993年7月15日收到修改稿

国家自然科学基金资助课题

$$DKu = rGu \quad (1)$$

其中 K 为结构刚度矩阵; G 为几何刚度矩阵; D 为板的抗弯刚度; r 为一系数; u 为位移参数组成的向量。

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & & & & K_{1M} \\ & K_{22} & & & K_{2M} \\ & & & & \\ & & & K_{PP} & K_{PM} \\ K_{1M}^T & K_{2M}^T & \cdots & K_{PM}^T & K_{MM} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} G_{11} & & & & G_{1M} \\ & G_{22} & & & G_{2M} \\ & & & & \\ & & & G_{PP} & G_{PM} \\ G_{1M}^T & G_{2M}^T & \cdots & G_{PM}^T & G_{MM} \end{bmatrix}$$

式中 M 为交界上的总自由度数。

剖分原则: ①使每个子结构所形成的矩阵 K_{ii} 、 G_{ii} 的阶数尽可能接近,这里不妨设都为 $n \times n$ 阶; ②各子结构的交界面应尽量小。设 $\mu = D/\lambda$, 则式(1)变成 $\mu Ku = Gu$ 。求板的临界载荷, 就是求 $\mu Ku = Gu$ 的广义特征值的绝对最大值。

1.2 算法

首先将 K 进行合同变换, 使 K 化成块对角矩阵。只需取

$$C = \begin{bmatrix} I & & & & 0 \\ & I & & & 0 \\ & & & I & \\ -K_{1M}^T K_{11}^{-1} & -K_{2M}^T K_{22}^{-1} & & K_{3M}^T K_{33}^{-1} & I \end{bmatrix}$$

则 $CKC^T = \begin{bmatrix} K_{11} & & & & \\ & K_{22} & & & \\ & & & & \\ & & & K_{PP} & \\ & & & & K_{MM} - \sum_{i=1}^P K_{iM}^T K_{ii}^{-1} K_{iM} \end{bmatrix}$

同时, G 也作相应的合同变换。显然 CGC^T 仍为箭头形矩阵。令 $\bar{K} = CKC^T$, $\bar{G} = CGC^T$, 则原来的广义特征值变成

$$\mu \bar{K}X = \bar{G}X \quad (2)$$

的广义特征值问题。式(2)可化成

$$\bar{K}^{-1} \bar{G}X = \mu X \quad (3)$$

由于 \bar{K} 是块对角阵, 所以 \bar{K}^{-1} 很容易并行求解。最后, 用幂乘法求出式(3)的绝对最大特征值。

2 并行计算的实施

2.1 存贮方法

在每台处理机中, 形成各自的子结构刚度矩阵和几何刚度矩阵。例如: 在第 i 台处理

机中形成如下子结构矩阵

$$\begin{bmatrix} K_{ii} & K_{im} \\ K_{im}^T & K_{MM}^{(i)} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} G_{ii} & G_{im} \\ G_{im}^T & G_{MM}^{(i)} \end{bmatrix}$$

2.2 并行算法

① 预处理过程

(a) 在第 i 台处理机中, 计算 K_{ii}^{-1} , $K_{MM}^{(i)} - K_{iM}^T K_{ii}^{-1} K_{iM}$, $\bar{G}_{iM}^T = G_{iM}^T - K_{iM}^T K_{ii}^{-1} G_{ii}$, $\bar{G}_{MM}^T = G_{MM}^{(i)} - K_{iM}^T K_{ii}^{-1} G_{iM} - \bar{G}_{iM}^T K_{ii}^{-1} K_{iM}$ 。

(b) 由 P 台处理机相互进行数据通讯, 在每台机中形成 $\bar{K}_{MM} = \sum_{i=1}^P (K_{MM}^{(i)} - K_{iM}^T K_{ii}^{-1} K_{iM})$, 并各自求出 \bar{K}_{MM}^{-1} 。

(c) 在第 i 台处理机中计算 $K_{ii}^{-1} \bar{G}_{ii}$, $K_{ii}^{-1} \bar{G}_{iM}$, $\bar{K}_{MM}^{-1} \bar{G}_{iM}^T$, $\bar{K}_{MM}^{-1} \bar{G}_{MM}^{(i)}$ 。

② 迭代过程

(a) 在第 i 台处理机赋初值 $X_i^{(0)} = (1, 1, \dots, 1)^T$, $X_M^{(0)} = (1, 1, \dots, 1)^T$ 。

(b) 计算

$$\begin{bmatrix} X_i^{(k)} \\ X_M^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ii}^{-1} \bar{G}_{ii} & K_{ii}^{-1} \bar{G}_{iM} \\ \bar{K}_{MM}^{-1} \bar{G}_{iM}^T & \bar{K}_{MM}^{-1} \bar{G}_{MM}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i^{(k-1)} \\ X_M^{(k-1)} \end{bmatrix} \quad (4)$$

(c) P 台处理机进行相互数据通讯, 在每台处理机中形成 $X_M^{(k)} = \sum_{i=1}^P X_{Mi}^{(k)}$ 。返回 (b), 如此循环 10 次。

③ 判断过程

在第 i 台处理机中判断 $\left| \frac{X_i^{(k)}(j)}{X_i^{(k-1)}(j)} - \frac{X_M^{(k)}(M)}{X_M^{(k-1)}(M)} \right| < 0.01$ ($0 < j < n$)。若 P 台处理机都

满足此不等式, 则停机。否则返回 ② 中的 (b)。

3 并行效率分析

这里只能给出一个粗略的结果。

① 在预处理过程中, 需并行运算次数为

$$\bar{t}_1 = 3n^3 - \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 6Mn^2 - 3Mn + 8M^2n + 3M^3 - \frac{3}{2}M^2 + \frac{1}{2}M + M^2 \log_2 P$$

还需 $\log_2 P$ 次通讯, 相当于并行运算 $(\alpha + M^2 \beta) \log_2 P$ 次 ($\alpha + l\beta$ 表示传送 l 个字相当的运算次数)。所以共需并行运算次数为

$$t_1 = 3n^3 - \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 6Mn^2 - 3Mn + 8M^2n + 3M^3 - \frac{3}{2}M^2 + \frac{1}{2}M + M^2 \log_2 P + (\alpha + M^2 \beta) \log_2 P \quad (5)$$

串行运算次数为

$$T_1 = P(3n^3 - \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 6n^2M - 3Mn + 8M^2n) + 3M^3 - \frac{3}{2}M^2 + \frac{1}{2}M \quad (6)$$

② 在迭代过程, 共需并行运算次数为

$$t_2 = [4(n + M)^2 - 2(n + M) + (\alpha + M\beta)\log_2 P + M\log_2 P]k \quad (7)$$

共需串行运算次数为

$$T_2 = \{P[4(n + M)^2 - 2(n + M)] + [2(Pn + M) - 1]M\}k \quad (8)$$

并行运算的加速度

$$S_p = \frac{T_1 + T_2}{t_1 + t_2} \quad (9)$$

并行效率

$$E_p = \frac{S_p}{P} \quad (10)$$

当 P 固定, $n \gg M$ 时, 如果 $n \rightarrow \infty$, 则 $S_p \rightarrow P$, $E_p \rightarrow 1$.

4 算例

在 Multi-Transputer System 上作了两个算例。

例 1 如图 1, 一矩形薄板两端受均匀压力 P , 受力两端简支, 其余两端一为固支, 一为自由。求 P_{cr} 。

解: 将板如图 2 划分成二个子结构及节点编号, 取矩形元素的 Hermiter 型函数为形状函数。设 $P_{cr} = \frac{r\pi^2 D}{b^2}$, 计算结果如表 1。

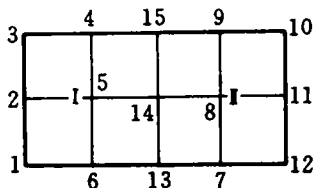
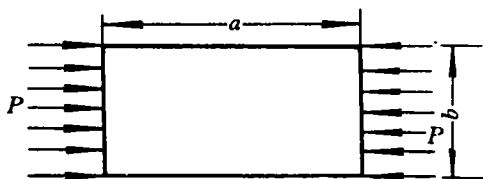


图 1 矩形薄板

图 2 矩形板划分及节点编号

表 1 计算结果 ($\mu=0.25$)

* a/b	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
r	1.707	1.474	1.368	1.335	1.347	1.390
精确解	1.70	1.47	1.36	1.33	1.34	1.38
k	18	22	27	37	70	70
S_p	1.6	1.59	1.57	1.55	1.52	1.52

例 2 只是将上例中板的固支端改为简支端, 求 P_{cr} 。

解: 划分及节点编号还有形状函数均与例 1 相同。设 $P_{cr} = \frac{r\pi^2 D}{b^2}$, 计算结果如表 2。

表 2 计算结果 ($\mu=0.25$)

a/b	0.5	1.4	1.8	2.0	2.5	4.0
r	4.414	0.953	0.758	0.698	0.611	0.516
精确解	4.40	0.952	0.755	0.698	0.610	0.516
k	13	43	35	200	45	54
S_p	1.66	1.59	1.6	1.53	1.59	1.58

5 讨论

本文的主要工作是给出了在 MIMD 型机上用有限元法解决临界载荷问题的一种算法。其算法经实例验证, 效果良好。在实际迭代中, 为了使其能迭代下去, 即避免上溢或下溢, 应在迭代一次后, 进行处理 $X(i) = X(i) / 10^5 (0 < i < Pn+M)$ 。此算法适合于大型结构。

参 考 文 献

- 1 Law K H A. Parallel finite element solution method. Computer and structures, 1986; 23(6): 845-858
- 2 Noor A K. Parallel computations and their impact on mechanics. The ASME, 1987: 1-10
- 3 Farhat Ch, Crivelli L. A general approach to nonlinear FE computations on shared memory multiprocessors. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1989; 72: 153-171
- 4 李晓梅, 任兵, 宗君强. 并行计算与偏微分方程数值解. 长沙: 国防科技大学出版社, 1990: 310-315