

有限元-边界元耦合法 在运动导体涡流场中的应用

刘守豹¹, 阮江军¹, 张宇², 杜志叶¹, 黄道春¹

(1. 武汉大学电气工程学院, 湖北省 武汉市 430072; 2. 江西省电力公司, 江西省 南昌市 330077)

Application of Finite Element and Boundary Element Coupling Method in Moving Conductor Eddy Current Problem

LIU Shou-bao¹, RUAN Jiang-jun¹, ZHANG Yu², DU Zhi-ye¹, HUANG Dao-chun¹

(1. School of Electrical Engineering, Wuhan University, Wuhan 430072, Hubei Province, China;

2. Jiangxi Provincial Electric Power Company, Nanchang 330077, Jiangxi Province, China)

ABSTRACT: Finite element governing equations of the conductor region and source current region were deduced based on magnetic vector potential/electric scalar potential formulations using the Coulomb gauge. Boundary element equations of free space were built on direct method. By introducing interface condition, the finite element and boundary element coupling method (FE-BECM) was realized in which boundary element matrix was equivalent to finite element matrix. In order to prove the validity of FE-BECM in eddy current problem and study modeling principle of the method, it was used to solve TEAM-7 problem. In the application of FE-BECM in moving conductor eddy current problem (MCEC), the source regions and moving components was discretized by finite elements, boundary elements were used to discretize the free space and associate finite element regions. When the position of moving components changed, it was only need to change the coordinate of nodes in moving region and all elements' shape kept invariant. The trouble of remeshing in normal finite element technique based on one set of grid was overcome in FE-BECM. The dynamic characteristics of a 3D coil gun model were calculated by FE-BECM. Numerical results obtained were compared with experimental data and results of 3D composite grid method (CGM), reasonable agreement was achieved and the efficiency of FE-BECM for such kind of problems was displayed.

KEY WORDS: finite element method; boundary element method; finite element and boundary element coupling method; moving conductor eddy current

摘要: 基于 A, ϕ -A 法和库伦规范, 推导了导体区域和非导

体区域的有限元方程及自由空间的边界元方程, 通过引入交界面条件, 实现了将边界元矩阵等效为有限元矩阵求解的有限元-边界元耦合法(finite element and boundary element coupling method, FE-BECM)。将 FE-BECM 应用于 TEAM-7 问题的计算, 验证了该方法处理开域涡流问题的有效性。当 FE-BECM 应用于运动导体涡流场(moving conductor eddy current, MCEC)问题时, 用有限元离散源电流区域和运动部件, 用边界元离散自由空间并关联相互独立的有限元区域。该方法克服了常规有限元法使用 1 套网格处理运动问题所遇到的麻烦。使用有限元-边界元耦合法对单级线圈炮问题进行了计算, 验证了算法处理运动导体涡流场问题的有效性。

关键词: 有限元法; 边界元法; 有限元-边界元耦合法; 运动导体涡流场

0 引言

运动导体涡流场问题广泛存在于各种电磁-机械装置的分析 and 计算中, 如旋转电机、直线感应电机、电磁炮、磁悬浮装置、电动刹车等^[1]。随着产品设计精细化程度的提高, 常规路仿真方法越来越难以满足分析和设计的需要^[2], 对这些装置的电磁场和运动过程进行分析变得必要。

对于运动部分和静止部分的材料结构不随运动而改变的情况, 可以使用静止坐标系描述下的迎风法^[3]、有限解析单元法^[4]或者有限元-有限体积耦合法^[5]来处理。对于运动方向和运动静止部分交界面平行的场合, 如凸极旋转电机、直线电机问题和线圈炮问题, 可以采用运动带法和滑动剖分法^[6]。

对于任意运动问题目前常规的处理方法是重剖分法^[7], 这种方法在微小位移发生的时候只需改变网格形状, 在大的位移产生时则需要对局部或全部区域进行重剖^[8], 对于大规模问题, 这种方法显然是不可取的。与上述方法相比, 组合网格法无疑具有巨大优势, 这种方法使用2套网格分别离散静止和运动区域, 2套网格之间没有拓扑约束, 适合于处理任意运动问题^[1]。但是由于组合网格法在每一时间步都必须在粗细网格之间进行反复地迭代求解以实现数值解的收敛, 当粗、细网格形状和密度差别较大时, 数值解的收敛性变差^[9]。这种串行结构的迭代过程时间开销大且不利于并行计算, 该缺陷限制了其进一步发展。

有限元-边界元耦合方法 (finite element and boundary element coupling method, FE-BECM) 用有限元离散源电流区域和运动部件, 用边界元离散自由空间并关联相互独立的有限元区域^[10]。当运动部件位置变化时, 只需改变该部件所在离散该区域节点的坐标, 对应网格的形状不变。该方法克服了常规有限元法使用1套网格处理运动问题所遇到的麻烦且易于并行实现^[11], 具有应用于求解大规模运动问题的可能。

1 FE-BECM 求解区域与边界条件

考虑如图1所示的求解区域, 其中全局求解区域为 $\Omega = \Omega_{FEM1} \cup \Omega_{FEM2} \cup \Omega_{BEM}$, 边界元位于边界面 $\Gamma_{BEM} = \Gamma_{BEMi1} \cup \Gamma_{BEMi2} \cup \Gamma_{BEM\infty}$ 。在图1中有限元离散区域可以不存在拓扑联系, 有限元区域的外表面用边界单元离散, 相互独立的有限元区域的联系由外包边界单元实现。

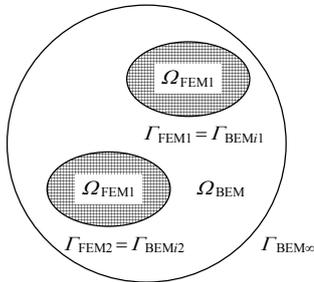


图1 FE-BECM 求解区域
Fig. 1 Solution region of FE-BECM

在有限元区域和边界元区域的交界面上的交界面条件为

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{FEM} &= \mathbf{A}^{BEM} & (1) \\ \nabla \cdot \mathbf{A}^{FEM} &= \nabla \cdot \mathbf{A}^{BEM} & (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu \nabla \times \mathbf{A} \times \mathbf{n} |^{FEM} &= -\nu \nabla \times \mathbf{A} \times \mathbf{n} |^{BEM} \Leftrightarrow \\ \mathbf{H}_i^{FEM} &= -\mathbf{H}_i^{BEM} \end{aligned} \quad (3)$$

式中: ν 为磁阻率; \mathbf{n} 表示有限元区域表面单位外法线方向, 由于在交界面上有限元和边界元的外法线方向刚好相反, 所以式(3)右端存在负号。

2 FE-BECM 离散方程

2.1 有限元区域

当处理三维涡流场问题时, 有限元区域的控制方程为

$$\nabla \times \nu \nabla \times \mathbf{A} + \sigma (\nabla \phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}) = \mathbf{J} \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \sigma (\nabla \phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}) = 0 \quad (5)$$

式中 σ 为电导率。对于场域中的任意有限元区域 Ω_j , 通过引入库伦规范, 式(4)与(5)的弱积分形式为

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_j} \nu (\nabla \times \mathbf{N}_i) \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) d\Omega - \int_{\Gamma_j} \nu \nabla \times \mathbf{A} \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{N}_i d\Gamma + \\ \int_{\Omega_j} \sigma (\nabla \phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}) \cdot \mathbf{N}_i d\Omega = \int_{\Omega_j} \mathbf{J} \cdot \mathbf{N}_i d\Omega \end{aligned} \quad (6)$$

$$\int_{\Omega_j} \sigma (\nabla \phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}) \cdot \nabla \mathbf{N}_i d\Omega = 0 \quad (7)$$

式中: \mathbf{N}_i 为体单元(有限元单元) Ω_j 的形函数; Γ_j 为位于有限元区域和边界元离散区域公共边界上的边界单元。在式(6)中有

$$\nu \nabla \times \mathbf{A} \times \mathbf{n} = \mathbf{H}_i \quad (8)$$

由式(6)和(7)得到有限元总体刚度矩阵为

$$\mathbf{K} \{ \mathbf{A}^{FEM}, \phi^{FEM} \} - \mathbf{T} \mathbf{H}_i^{FEM} = \mathbf{F} \quad (9)$$

式中: \mathbf{K} 为有限元刚度矩阵; \mathbf{T} 为交界面矩阵。

2.2 边界元区域

对于边界元离散的无限大自由空间区域, 其控制方程为

$$\nabla^2 \mathbf{A} = 0 \quad (10)$$

通过2次分部积分后, 式(10)可以表示为

$$\int_{\Omega_{BEM}} \mathbf{A} \nabla^2 u^* d\Omega + \int_{\Gamma_{BEM}} u^* \mathbf{Q} d\Gamma - \int_{\Gamma_{BEM}} q^* \mathbf{A} d\Gamma = 0 \quad (11)$$

其中,

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{A} \quad (12)$$

$$u^* = 1/4\pi r \quad (13)$$

$$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n} \quad (14)$$

式中 r 为源点和场点之间的距离。由于边界元单元只存在于场域的边界, 式(11)中的体积不存在, 所以式(11)可以改写为

$$c_i \mathbf{A} + \int_{\Gamma_{BEM}} q^* \mathbf{A} d\Gamma = \int_{\Gamma_{BEM}} u^* \mathbf{Q} d\Gamma \quad (15)$$

式(15)的离散形式可以表示为

$$HA^{BEM} = GQ^{BEM} \quad (16)$$

式中 H 为边界元矩阵。

2.3 等效有限元方程

由交界面条件式(2)和(3)可以得出

$$\begin{aligned} (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{A}^{FEM} &= -(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{A}^{BEM} \Leftrightarrow \\ \mathbf{Q}^{FEM} &= -\mathbf{Q}^{BEM} \end{aligned} \quad (17)$$

于是式(9)可以重写为

$$\mathbf{K}\{\mathbf{A}^{FEM}, \phi^{FEM}\} - \mathbf{TQ}^{FEM} = \mathbf{F} \quad (18)$$

考虑边界条件式(1)和(17), 可以将式(16)和(18)合并为等效的有限元矩阵:

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_{BEM})\{\mathbf{A}^{FEM}, \phi^{FEM}\} = \mathbf{F} \quad (19)$$

其中,

$$\mathbf{K}_{BEM} = \mathbf{TG}^{-1}\mathbf{H} \quad (20)$$

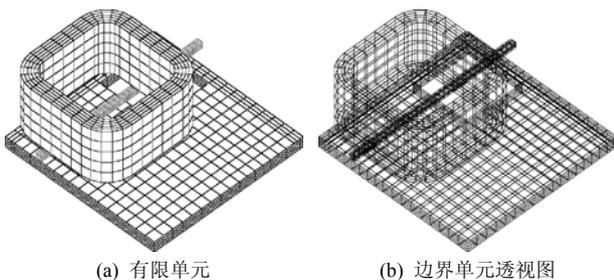
式中 \mathbf{K}_{BEM} 为变形后的边界元矩阵。式(19)中左端括号中为耦合的整体矩阵, 相比式(18)交界面上未知自由度 \mathbf{Q}^{FEM} 被消去, 求解式(19)即可求得区域内每个节点的自由度。

3 FE-BECM 建模方法

为了讨论 FE-BECM 的建模方法, 以三维时谐涡流场问题标准算例 TEAM-7 为分析对象^[12], 建立 3 种不同的分析模型, 比较计算结果与实测结果得出 FE-BECM 的建模原则。

工程电磁场问题中一般含有导体或者铁磁材料, 这些材料的电磁参数与周围空气的电磁属性有较大的差异, 为了消除这种差异通常在这些材料的周围包裹一层空气, 以避免将不同网格的交接点直接建立在 2 种不同材料的交界面上^[13]。在建立 FE-BECM 模型时, 按照对线圈和铝板包裹空气块形式的不同可以分 3 种情况进行建模。

1) 线圈和铝板没有空气包裹。在没有外包空气的情况下, 边界元单元存在于不同材料的分界面, 场域的离散结果如图 2 所示。图 2 中之所以建立狭长空气块是为了实现后处理结果的导出。

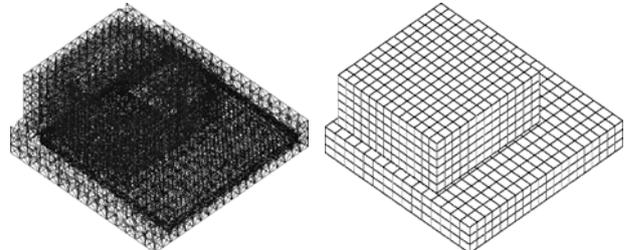


(a) 有限单元 (b) 边界单元透视图

图 2 无空气块的 FE-BECM 模型剖分

Fig. 2 Discretization of FE-BECM model without air layer

2) 线圈和铝板分别包裹。将线圈和铝板分别使用 2 个立方体空气块包裹, 其中, 铝板和线圈使用八节点六面体单元剖分, 边界单元为四节点四边形单元, 中间空气块使用四节点四面体单元离散, 模型的剖分结果如图 3 所示。

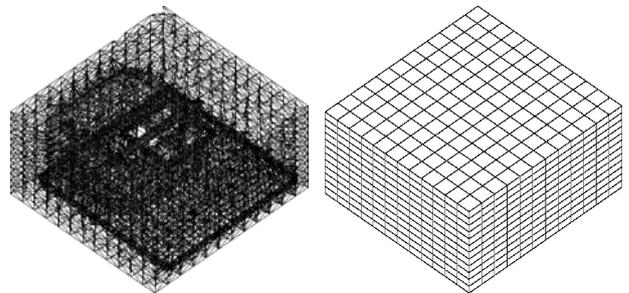


(a) 有限元网格透视图 (b) 边界元网格

图 3 两空气块分开包裹 FE-BECM 模型剖分
Fig. 3 Discretization of FE-BECM model with two air layer

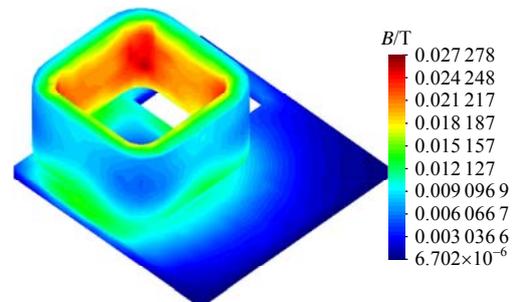
3) 使用空气块整体包裹。使用单一空气块包裹的情况下场域的离散情况如图 4 所示。其中, 在有限元区域线圈和铝板使用的是八节点六面体单元离散, 包裹它们的空气块使用四节点四面体单元离散; 空气块的 6 个面为边界元面, 使用四节点四边形单元离散。由该模型计算得到的场量分布如图 5 所示。

上述 3 种 FE-BECM 模型离散结果如表 1 所示。



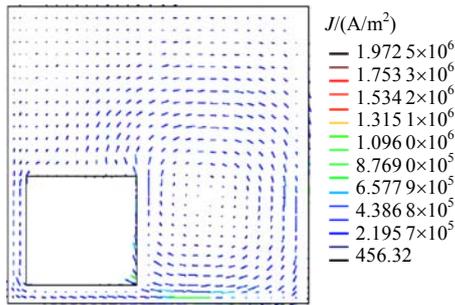
(a) 有限元网格透视图 (b) 边界元网格

图 4 整体包裹 FE-BECM 模型剖分
Fig. 4 Discretization of FE-BECM model with whole air layer



(a) B 场实部云图分布

图 5 FE-BECM 模型整体包裹场量分布
Fig. 5 Field distribution of FE-BECM with whole air layer



(b) 铝板涡流实部矢量图

图5(续) FE-BECM模型整体包裹场量分布
Fig. 5(continued) Field distribution of FE-BECM with whole air layer

表1 TEAM 7问题 FE-BECM模型网格参数
Tab. 1 Mesh parameter of TEAM 7 model

模型	FEM单元数	FEM节点数	BEM单元数	BEM节点数
无空气块	2572	3852	2290	2292
两空气块 分开包裹	41551	14856	1460	1464
整体包裹	58621	16200	864	866

上述3种FE-BECM模型计算得到观察路径上磁通密度z方向(B_z)的实部与测量结果比较如图6所示。

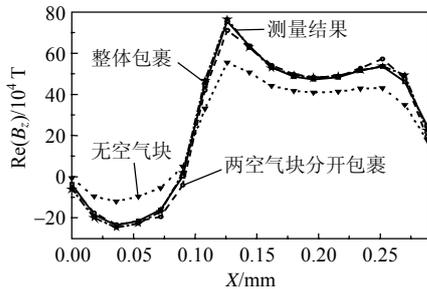


图6 整体包裹时计算结果

Fig. 6 Results of FE-BECM models and measure

通过图6可知,包裹空气块对于FE-BECM模型计算精度的提高作用明显。在整体空气块包裹的情况下计算结果最优,但是其计算量却是3种模型中最小的。

4 FE-BECM计算单级线圈炮问题

电磁发射是以电磁能代替化学能实现弹丸发射的技术,在国防、交通运输及航天领域有着广泛的应用前景^[14]。本节将FE-BECM应用于线圈炮动态特性的计算,计算模型取文献[6]中的实验模型,该模型包括单级线圈和作为电枢的铝筒,其示意图及几何尺寸如图7所示。

铝筒的电导率为 3×10^7 S/m;线圈和铝筒的相对磁导率均为 $\mu_r = 1$ 。线圈共60匝,其激励电流为振荡电路产生的脉冲波形电流,如图8所示。

根据第3节中的分析结论,使用空气层分别对线圈和铝筒部分进行包裹,边界单元只对2空气层的表面部分进行离散,其余部分(包括线圈、铝筒和包裹它们的空气)使用有限元单元离散,边界单元为四节点四边形单元,有限元单元为八节点六面体单元。单级线圈炮的场域离散如图9所示。

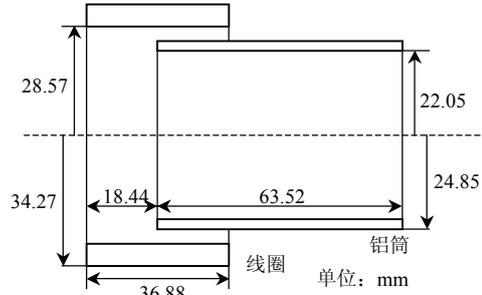


图7 线圈炮结构示意图

Fig. 7 Structural diagram of coil gun

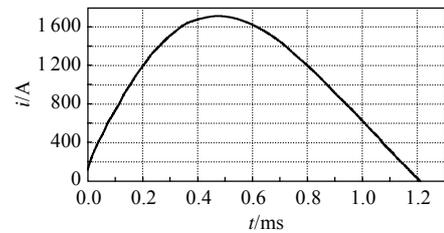


图8 激励电流波形

Fig. 8 Waveform of exciting current

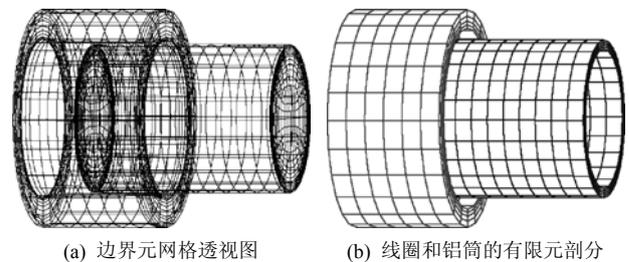


图9 场域离散示意图

Fig. 9 Discretization of solution region

在耦合法计算的每一时间步,在求得空间磁场分布和铝筒电受力之后需要考虑铝筒的受力并改变铝筒所在区域节点的坐标。铝筒所受的合力 F 可根据麦克斯韦应力张量在表面的积分或直接对电磁力密度对体积进行积分求得。在每一时间步下,根据合力 F 和铝筒质量 m 可计算得到加速度 a ,铝筒的速度和位置采用如下格式计算:

$$v_{n+1} = v_n + a\Delta t \quad (21)$$

$$x_{n+1} = x_n + (v_n + v_{n+1}) \Delta t / 2 \quad (22)$$

式中: v_n 和 v_{n+1} 分别为本时间步和下一时间步的速度, m/s; x_n 和 x_{n+1} 分别为本时间步和下一时间步沿运动方向的位置, m; Δt 为时间步长, s。

取时间步长 0.03 ms, 时间离散采取欧拉向后差分格式。首先设第 1 时间步的速度初值为 0 m/s。在每一时间步依次计算磁通密度、涡流密度及电磁力。得到加速度 a 后, 根据式(21)和(22), 计算下一时刻的速度和位移, 根据位移改变运动区域所有节点坐标, 进入下一时间步的计算。

图 10 为 0.15 ms 时线圈、铝桶的磁场分布和铝筒涡流分布。

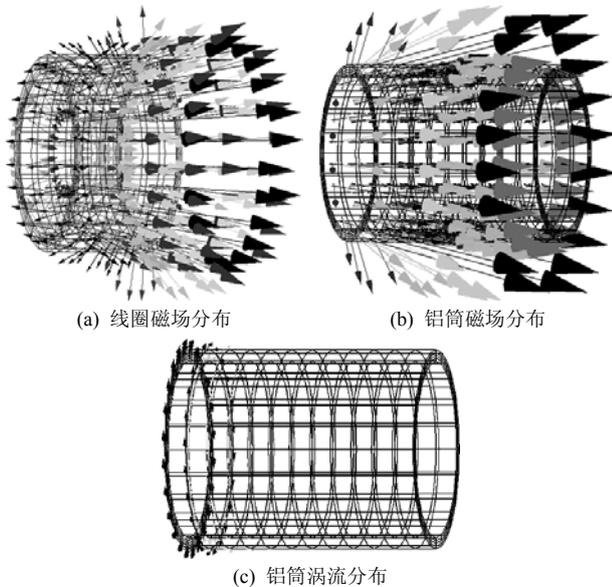


图 10 0.15 ms 时的场量分布
Fig. 10 Field distribution at 0.15 ms

铝筒沿炮口方向受力曲线如图 11 所示, 由于其他 2 个方向的受力大约比沿炮口方向的受力小 5 个数量级, 可以忽略不计。从图中可知, 在发射的前半阶段, 铝筒受到前向推力, 在将要离开线圈的阶段, 铝筒受到向后的拉力, 但是此阶段的反力无论是作用时间还是幅值都较小, 对最终出口速度的影响不大。

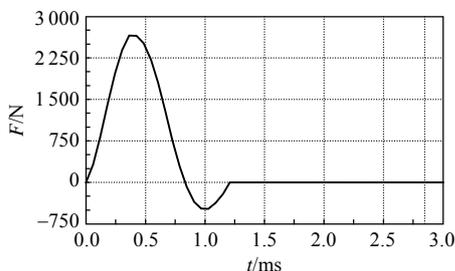


图 11 铝筒受力波形
Fig. 11 Force wave of armature

最终计算得到的铝筒运动速度随时间变化的曲线如图 12 所示, 其中, 给出了三维组合网格法 (composite grid method, CGM) 计算结果^[13]、文献[6]的计算结果(采用滑动网格法)及测量结果。从图 12

中可知, 在发射初期铝筒受到前向推动力速度迅速上升, 在铝筒将要离开线圈的时候它受到了一段持续时间不长的拖拽力, 而后匀速运动。FE-BECM、CGM、测量数据和滑动网格法的对比验证了 FE-BECM 在处理运动涡流问题上的有效性。

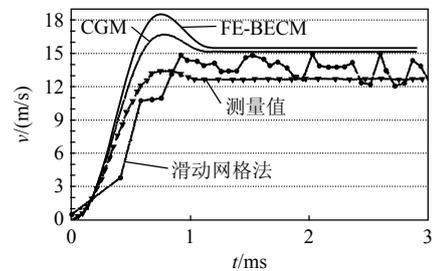


图 12 铝筒速度波形对比
Fig. 12 Waveform comparison of armature velocity

5 结论

本文将 FE-BECM 应用于三维运动导体涡流场并对单级线圈炮问题进行了计算。FE-BECM 使用有限元离散导体区域和源电流区域, 在有限元区域的边界使用边界单元, 实现几何上相互独立的各个有限元区域的联系。在运动发生时不需要改变单元网格的形状, 只需改变运动区域节点的坐标即可, 从而很好地克服了常规有限元使用一套网格处理此类问题所产生的麻烦。在建立 FE-BECM 分析模型时, 在不同材料外围包裹空气层可以有效减小边界单元的使用量并对计算结果产生有利的影响。

参考文献

- [1] 张宇, 阮江军, 刘兵, 等. 组合网格法在电磁-机械耦合问题中的应用[J]. 中国电机工程学报, 2007, 27(33): 42-47.
Zhang Yu, Ruan Jiangjun, Liu Bing, et al. Application of composite grid method in the electromagnetic- mechanical coupled problem[J]. Proceedings of the CSEE, 2007, 27(33): 42-47(in Chinese).
- [2] Liu Shoubao, Ruan Jiangjun, Huang Daochun, et al. Analysis of inductive coil gun performance based on field coupling circuit method [C]. IEEE 6th International Power Electronics and Motion Control Conference, Wuhan, Hubei, China, 2009.
- [3] 余海涛, 邵可然, 周克定. 迎风-线性棱边单元法[J]. 中国电机工程学报, 1996, 16(2): 92-94.
Yu Haitao, Shao Keran, Zhou Keding. Upwind-linear edge elements method[J]. Proceedings of the CSEE, 1996, 16(2): 92-94(in Chinese).
- [4] Chen Dezhi, Shao K R, Yu Haitao, et al. A novel finite analytic element method for solving eddy current problems with moving conductors[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2001, 35(1): 1350-1354.
- [5] 甘艳, 阮江军, 张宇. 有限元与有限体积法相结合处理运动电磁问题[J]. 中国电机工程学报, 2006, 26(14): 145-151.
Gan Yan, Ruan Jiangjun, Zhang Yu. Combining the finite element method and the finite volume method in motion problem simulation

- [J]. Proceedings of the CSEE, 2006, 26(14): 145-151(in Chinese).
- [6] Leonard P J, Lai H C, Hainswort G, et al. Analysis of the performance of tubular pulsed coil induction launchers[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 1993, 29(1): 686-690.
- [7] 金志颖, 杨仕友, 倪光正, 等. EMS型磁悬浮列车电磁系统动态电磁场的有限元分析及其悬浮与牵引力特性的研究[J]. 中国电机工程学报, 2004, 24(10): 133-137.
Jin Zhiying, Yang Shiyu, Ni Guangzheng, et al. A Time-Stepping FEM for transient electromagnetic filed analysis and levitation and propellant force study of an EMS maglev train[J]. Proceedings of the CSEE, 2004, 24(10): 133-137(in Chinese).
- [8] Katsumi Yamazaki, Shinjiro Watari, Akira Egawa Adaptive. Finite element meshing for eddy current analysis of moving conductor[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2004, 40(2): 993-996.
- [9] 王德生. 组合网格法和非结构化网格自动生成[D]. 北京: 中国科学院数学与系统科学研究所, 2001.
Wang Desheng. Application of composite grid method in the electromagnetic-mechanical coupled problem[D]. Beijing: Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, 2001(in Chinese).
- [10] Kurz Stefan, Fetzter Joachim, Lehner Gunther, et al. A novel formulation for 3D eddy current problems with moving bodies using a lagrangian description and BEM-FEM coupling[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 1998, 34(5): 3068-3073.
- [11] Rischmüller Volker, Haas Martin, Kurz Stefan, et al. 3D transient analysis of electromechanical devices using parallel BEM coupled to FEM[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2000, 36(4): 1360-1363.
- [12] 刘国强, 赵凌志, 蒋继亚. Ansoft 工程电磁场有限元分析[M]. 北京: 电子工业出版社, 2005: 203-209.
Liu Guoqiang, Zhao Lingzhi, Jiang Jiya. Finite element analysis of engineering electromagnetic fields[M]. Beijing: Electronics Industry Press, 2005: 203-209(in Chinese).
- [13] Yu Zhang, Jiangjun Ruan, Yan Gan, et al. Application of a composite grid method in the analysis of 3-D eddy current field involving movement[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2008, 44(6): 1298-1301.
- [14] Marshall R A, Wang Ying. Railguns: their science and technology[M]. Beijing: China Machine Press, 2004: 1-19.



刘守豹

收稿日期: 2009-12-07。

作者简介:

刘守豹(1983—), 男, 博士研究生, 从事电磁场理论及其数值计算的研究, liushoubao1983@126.com;

阮江军(1968—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 从事电磁场数值计算、电能质量及电磁兼容方面的研究。

(责任编辑 王剑乔)