互补约束优化问题的乘子序列部分罚函数算法 *

刘水霞 [1†] 陈国庆 [1]

摘要 利用互补问题的 Lagrange 函数，将互补约束优化问题 (MPCC) 转化为含参数的约束优化问题. 给出 Lagrange 乘子的简单修正公式，并给出求解互补约束优化问题的部分罚函数法. 无须假设二阶必要条件成立，只要算法产生的迭代点列的极限点满足互补约束优化问题的线性独立约束规范 (MPCC-LICQ)，且极限点是 MPCC 的可行点，则算法收敛到原问题的 M- 稳定点. 另外，在上水平严格互补 (ULSC) 成立的条件下，算法收敛到原问题的 B- 稳定点.

关键词 互补约束优化问题， Lagrange 函数，上水平严格互补， B- 稳定点

中图分类号 O221.2

数学分类号 90C33

A Multiplier Sequential Partial Penalization Algorithm for Mathematical Programs with Complementarity Constraints

LIU Shuixia[1†] CHEN Guoqing[1]

Abstract By using the Lagrangian function of the complementarity problem, a mathematical program with complementarity constraints (MPCC) is reformulated as a constrained optimization problem with the multiplier parameter. The simple modified strategy of the multiplier parameter is provided. Based on this, a multiplier sequential partial penalization algorithm for MPCC is proposed. Without requiring the second-order necessary condition, we show the limited point of the sequence (generated from the algorithm) is an M-stationary point if it is the feasible to MPCC and the MPCC linear independence constraint qualification (LICQ) holds. Moreover, it is B-stationary point if the upper lever strict complementarity(ULSC) holds.

Keywords mathematical programs with complementarity constraints, Lagrangian function, upper lever strict complementarity, B-stationary point

Chinese Library Classification O221.2

2010 Mathematics Subject Classification 90C33

收稿日期： 2009 年 4 月 1 日.

* 基金项目：内蒙古自治区优秀学科带头人基金

1. 内蒙古大学数学科学学院，呼和浩特， 010021; School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot 010021, China

† 通讯作者 Corresponding author

0 引 言

考虑下列互补约束优化问题 (MPCC):

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ s.t. & g(x) \leqslant 0, h(x)=0, \\ & G(x) \geqslant 0, H(x) \geqslant 0, \\ & G(x)^{\mathrm{T}} H(x)=0, \end{array} \tag{1}$$

其中 $x \in I\!R^n$, $f: I\!R^n \rightarrow I\!R, g: I\!R^n \rightarrow I\!R^p, h: I\!R^n \rightarrow I\!R^q, G, H: I\!R^n \rightarrow I\!R^m$ 为连续可微函数.

$$g(x) \leqslant 0,\ h(x)=0 \tag{2}$$

为一般约束条件,

$$G(x) \geqslant 0,\ H(x) \geqslant 0,\ G(x)^{\mathrm{T}} H(x)=0 \tag{3}$$

为互补约束条件，记为 NCP(G, H).

互补约束优化问题 (MPCC) 是一类重要的平衡约束优化问题 (MPEC), 在工程设计、经济平衡、多目标决策和数学规划本身等方面都有着广泛的应用. 故近几年来，许多学者在互补约束优化问题的理论研究和数值解法方面作了大量的工作，可参见 [1-2].

由于互补约束条件中 $G(x)^{\mathrm{T}} H(x)=0$ 的存在，故标准的非线性规划的 Mangasarian-Fromoritz 约束规范不成立 [3], 由此导致比较成熟的、经典的非线性规划的算法不能直接应用于求解互补约束优化问题. Fukushima 和 Pang[4] 给出了求解互补约束优化问题的连续光滑法，在互补约束优化问题的线性独立约束规范 (MPCC-LICQ) 和渐进非退化假设的条件下，近似问题的满足二阶必要条件的 KKT 点列的任何聚点都是原问题的 B- 稳定点. Scholtes[5], Lin[6] 分别给出了求解互补约束优化问题的正则化方法及其修正方案，在 MPCC-LICQ 和上水平严格互补 (ULSC) 的条件下，松弛问题的稳定点若满足二阶必要条件，则其聚点是原问题的 B- 稳定点. Fukushima 和 Pang[7] 利用 ε- 积极集算法求解互补约束优化问题，在 ε- 可行集满足一致线性独立约束规范的假设条件下，算法也收敛到原问题的 B- 稳定点. 还有一类重要的求解互补约束优化问题的方法 - 罚函数法. Hu 和 Ralph[8] 给出了二次罚函数法， Huang[9] 和 Yang[10] 给出了序列罚函数法，低阶罚函数法. 另外， Yang[11] 和 Huang[12] 分别给出了求解互补约束优化问题的增广 Lagrange 法和部分增广 Lagrange 法. 以上各种罚方法具有相似的收敛性质，在 MPCC-LICQ 和 ULSC 的条件下, 罚问题的满足二阶必要条件的稳定点点列收敛到原问题的 B- 稳定点.

本文利用互补问题 NCP(G, H) 的 Lagrange 函数 [13−14], 将互补约束优化问题 MPCC(1) 转化为含参数的约束优化问题：

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ s.t. & g(x) \leqslant 0, h(x)=0, \\ & G(x) \geqslant 0, H(x) \geqslant 0, \\ & L(x, \lambda)=0, \lambda \in[0,1]^m . \end{array} \tag{4}$$

由于互补问题的 Lagrange 函数的线性性质， (4) 不满足线性独立约束规范. 为了克服此弱点，我们把互补约束的 Lagrange 函数作为惩罚项加到目标函数上，这样得到一个新的

约束优化问题 $P(x,\lambda,\rho)$:

$$\begin{array}{ll}\min & f(x)+\dfrac{\rho}{2}\|L(x,\lambda)\|^2\\ s.t. & g(x)\leqslant 0, h(x)=0,\\ & G(x)\geqslant 0, H(x)\geqslant 0,\\ & \lambda\in[0,1]^m.\end{array}\tag{5}$$

在 MPCC-LICQ 成立的条件下， $P(x,\lambda,\rho)$ 满足线性独立约束规范．在此基础上，给出求解互补约束优化问题的乘子序列部分罚函数算法并分析其收敛性质．与以前的收敛性结论相比，我们得到更弱的收敛性质．无须假设二阶必要条件成立，只要算法产生的迭代点列的极限点满足 MPCC-LICQ, 且极限点是原问题的可行点，则算法收敛到原问题的 M-稳定点．另外，在 ULSC 成立的条件下，算法收敛到原问题的 B- 稳定点．

本文所用到的符号和术语：

$\mathcal{F}$ 表示 MPCC 的可行域．设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, 则 $\nabla f(x)$ 为 f 在 $x\in\mathbb{R}^n$ 处的梯度，并且定义以下集合：

$$\alpha(x):=\{i\in\{1,\cdots,m\}\mid G_i(x)<H_i(x)\},$$
$$\beta(x):=\{i\in\{1,\cdots,m\}\mid G_i(x)=H_i(x)\},$$
$$\gamma(x):=\{i\in\{1,\cdots,m\}\mid G_i(x)>H_i(x)\}.$$
$$I_f(x):=\{i\mid f_i(x)=0\},$$
$$I_f^c(x):=\{i\mid f_i(x)\neq 0\}.$$

1 基本概念

定义 1.1 设向量值函数 $L:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$,

$$L_i(x,\lambda):=\lambda_iG_i(x)+(1-\lambda_i)H_i(x),\ i=1,\cdots,m,\tag{6}$$

则 $L(x,\lambda)$ 称为互补问题 NCP(G,H) 的 Lagrange 函数，其中 λ 为乘子向量．对任意的 $x\in\mathbb{R}^n$, 若

$$\lambda_i=\begin{cases}1, & G_i(x)<H_i(x),\\ 0, & G_i(x)>H_i(x),\\ \text{任意实数}, & G_i(x)=H_i(x),\end{cases}\tag{7}$$

则称 λ 为 NCP(G,H) 在 x 处的 Lagrange 乘子.

命题 1.2 $L(x,\lambda)=0,\lambda$ 是 NCP(G,H) 在 x 处的 Lagrange 乘子当且仅当 x 是 NCP(G,H) 的解.

易知，当 $G(x)\geqslant 0,H(x)\geqslant 0$ 时,

$$L(x,\lambda)=0,\lambda\in[0,1]^m\Leftrightarrow G(x)^TH(x)=0,\ \lambda\text{ 是 NCP}(G,H)\text{ 在 }x\text{ 处的 Lagrange 乘子}.$$

由此可得，互补约束优化问题 MPCC(1) 等价于含参数的约束优化问题 (4).

下面介绍一些有关互补约束优化问题 (MPCC) 的基本概念 [15−16].

定义 1.3 设 $x \in \mathcal{F}$, 若向量组

$$\nabla g_j(x), j \in I_g(x), \nabla h_l(x), l = 1, \cdots, q,$$

$$\nabla G_i(x), i \in I_G(x), \nabla H_i(x), i \in I_H(x)$$

线性无关，则称在 x 处互补约束优化问题的线性独立约束规范 (MPCC-LICQ) 成立.

设 $x \in \mathcal{F}$, 则 $\mathcal{F}$ 在 x 处的切锥定义为

$$\mathcal{T}(x) := \left\{ d \in I\!R^n \,\middle|\, \exists \{x^k\} \subset \mathcal{F}, t_k \downarrow 0 : x^k \to x, \frac{x^k - x}{t_k} \to d \right\}.$$

定义 1.4 设 $\bar{x} \in \mathcal{F}$, 若 $\nabla f(\bar{x})^{\mathrm{T}} d \geqslant 0, \forall d \in \mathcal{T}(\bar{x})$, 则称 $\bar{x}$ 是 MPCC 的 B- 稳定点.

定义 1.5 设 $\bar{x} \in \mathcal{F}$, 若存在乘子向量 $\bar{\lambda} \in I\!R^p$, $\bar{\mu} \in I\!R^q$, $\bar{u}, \bar{v} \in I\!R^m$, 使得

$$\nabla f(\bar{x}) + \nabla g(\bar{x})\bar{\lambda} + \nabla h(\bar{x})\bar{\mu} - \nabla G(\bar{x})\bar{u} - \nabla H(\bar{x})\bar{v} = 0, \tag{8}$$

$$\bar{\lambda} \geqslant 0, \bar{\lambda}^T g(\bar{x}) = 0, \tag{9}$$

$$\bar{u}_i = 0, i \notin I_G(\bar{x}), \tag{10}$$

$$\bar{v}_i = 0, i \notin I_H(\bar{x}), \tag{11}$$

则称 $\bar{x}$ 是 MPCC 的 W- 稳定点；若

$$\bar{u}_i \bar{v}_i = 0,\ \text{或}\ \bar{u}_i > 0,\ \bar{v}_i > 0,\ \ \forall i \in I_G(\bar{x}) \cap I_H(\bar{x}),$$

则称 $\bar{x}$ 是 MPCC 的 M- 稳定点；若

$$\bar{u}_i \geqslant 0,\ \bar{v}_i \geqslant 0,\ \ \forall i \in I_G(\bar{x}) \cap I_H(\bar{x}),$$

则称 $\bar{x}$ 是 MPCC 的 S- 稳定点.

众所周知，若在 $\bar{x}$ 处 MPCC-LICQ 成立，则 B- 稳定点与 S- 稳定点等价.

定义 1.6 设 $\bar{x}$ 是 MPCC 的 W- 稳定点，若对于 $\forall i \in I_G(\bar{x}) \cap I_H(\bar{x})$, $\bar{u}_i \bar{v}_i \neq 0$, 则称在 $\bar{x}$ 处满足上水平严格互补 (ULSC).

2 乘子序列部分罚函数算法

由命题 1.2 得，若 $\bar{x}$ 是 NCP(G, H) 的解，$\bar{\lambda}$ 是 NCP(G, H) 在 $\bar{x}$ 处的 Lagrange 乘子，则

$$\bar{\lambda}_i = \begin{cases} 1, & i \in \alpha(\bar{x}), \\ 0, & i \in \gamma(\bar{x}), \\ \text{任意实数}, & i \in \beta(\bar{x}). \end{cases} \tag{12}$$

由 G, H 的连续性和 α, β, γ 的定义，若 $x^k \to \bar{x}$, 则当 k 充分大时有,

$$\alpha(\bar{x}) \subset \alpha(x^k), \gamma(\bar{x}) \subset \gamma(x^k), \beta(x^k) \subset \beta(\bar{x}).$$

在此基础上，我们给出 λ 的一种简单的修正公式.

$$\lambda_i^k = \begin{cases} 1, & i \in \alpha(x^k) \cup \beta(x^k), \\ 0, & i \in \gamma(x^k). \end{cases} \tag{13}$$

可以证明当 $x^k \to \bar{x}$ 时， $\lambda^k \to \bar{\lambda}$.

算法 2.1 (乘子序列部分罚函数算法):

步 0　任意选取初始点 $x^0 \in I\!R^n$, 由 (13) 式得到 λ^0. 选取 $\rho_0 > 0, \varepsilon > 0, c > 1$. 置 $k := 0$;

步 1　若

$$\begin{aligned} \max\{ & |G_i(x^k)H_i(x^k)|,\ G_i^-(x^k),\ H_i^-(x^k),\ i = 1, \cdots, m, \\ & g_j^+(x^k),\ j = 1, \cdots, p,\ |H_l(x^k)|,\ l = 1, \cdots, q\} < \varepsilon, \end{aligned}$$

则停止迭代;

步 2　求解非线性规划 $P(x, \lambda^k, \rho_k)$, 得到解 x^{k+1};

步 3　由 (13) 式得到 λ^{k+1}. 令 $\rho_{k+1} = c \times \rho_k$, 置 $k := k+1$, 转步 1.

命题 2.2 设 x^{k+1} 是 $P(x, \lambda^k, \rho_k)$ 的可行点. 若 $\bar{x}$ 是 $\{x^k\}$ 的极限点，在 $\bar{x}$ 处 MPCC-LICQ 成立，则 $P(x, \lambda^k, \rho_k)$ 在 x^{k+1} 处满足线性独立约束规范.

证明 由在 $\bar{x}$ 处 MPCC-LICQ 成立，即

$$\nabla G_i(\bar{x}), i \in I_G(\bar{x}), \nabla H_i(\bar{x}), i \in I_H(\bar{x}),$$

$$\nabla g_j(\bar{x}), j \in I_g(\bar{x}), \nabla h_l(\bar{x}), l = 1, \cdots, q$$

线性无关，及 $x^k \to \bar{x}$ 得，当 k 充分大时，

$$\nabla G_i(x^{k+1}), i \in I_G(\bar{x}), \nabla H_i(x^{k+1}), i \in I_H(\bar{x}),$$

$$\nabla g_j(x^{k+1}), j \in I_g(\bar{x}), \nabla h_l(x^{k+1}), l = 1, \cdots, q$$

线性无关，且

$$I_G(x^{k+1}) \subset I_G(\bar{x}), I_H(x^{k+1}) \subset I_H(\bar{x}), I_g(x^{k+1}) \subset I_g(\bar{x}).$$

故

$$\nabla G_i(x^{k+1}), i \in I_G(x^{k+1}), \nabla H_i(x^{k+1}), i \in I_H(x^{k+1}),$$

$$\nabla g_j(x^{k+1}), j \in I_g(x^{k+1}), \nabla h_l(x^{k+1}), l = 1, \cdots, q$$

线性无关，即 $P(x, \lambda^k, \rho_k)$ 在 x^{k+1} 处满足线性独立约束规范.

3 收敛性分析

定理 3.1 设 $\rho_k \to +\infty$, $\bar{x} \in I\!R^n$ 是算法 2.1 产生的迭代点列 $\{x^k\}$ 的极限点，假设存在实数 $M > 0$ 使得，

$$f(x^{k+1}) + \frac{\rho_k}{2}\|L(x^{k+1}, \lambda^k)\|^2 \leqslant M, \quad \forall k, \tag{14}$$

则 $\bar{x}$ 是 MPCC(1) 的可行点.

证明 不失一般性，假设 $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = \bar{x}$, 若非可以选取子列. 由 λ^k 的修正公式 (13) 可得， $\lambda^k \to \bar{\lambda} \in [0,1]^m$.

(14) 式的两边同时除以 ρ_k 得，

$$\frac{f(x^{k+1})}{\rho_k} + \frac{1}{2}\|L(x^{k+1}, \lambda^k)\|^2 \leqslant \frac{M}{\rho_k}.$$

注意到 f 的连续可微性，并令 $k \to \infty$ 得，

$$\|L(\bar{x}, \bar{\lambda})\| = 0. \tag{15}$$

且由 $G(x^{k+1}) \geqslant 0, H(x^{k+1}) \geqslant 0, g(x^{k+1}) \leqslant 0, h(x^{k+1}) = 0$ 得，

$$G(\bar{x}) \geqslant 0, \quad H(\bar{x}) \geqslant 0, \quad g(\bar{x}) \leqslant 0, \quad h(\bar{x}) = 0.$$

故 $\bar{x}$ 是 MPCC(1) 的可行点，且 $\bar{\lambda}$ 是 NCP(G,H) 在 $\bar{x}$ 处的 Lagrange 乘子.

定理 3.2 设定理 3.1 中的条件成立， x^{k+1} 是 $P(x, \lambda^k, \rho_k)$ 的可行点，且在 x^{k+1} 处满足一阶必要条件. $\bar{x}$ 是 $\{x^k\}$ 的极限点，在 $\bar{x}$ 处 MPCC-LICQ 成立，则 $\bar{x}$ 是 MPCC(1) 的 M- 稳定点. 进而，若在 $\bar{x}$ 处 ULSC 成立，则 $\bar{x}$ 是 MPCC(1) 的 B- 稳定点.

证明 由定理 3.1 得，当 $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = \bar{x}$ 时，

$$\lim_{k\to\infty} \lambda^k = \bar{\lambda},$$

且 $\bar{x} \in \mathcal{F}$, $\bar{\lambda}$ 是 NCP(G,H) 在 $\bar{x}$ 处的 Lagrange 乘子.

在 x^{k+1} 处 $P(x, \lambda^k, \rho_k)$ 的一阶必要条件成立，即存在 $u^{k+1} \in I\!R^m, v^{k+1} \in I\!R^m, \mu^{k+1} \in I\!R^p, \tau^{k+1} \in I\!R^q$, 使得

$$\begin{aligned}
&\nabla f(x^{k+1}) + \rho_k \sum_{i=1}^m L_i(x^{k+1}, \lambda^k)\nabla_x L_i(x^{k+1}, \lambda^k) - \sum_{i=1}^m u_i^{k+1} \nabla G_i(x^{k+1}) \\
&- \sum_{i=1}^m v_i^{k+1} \nabla H_i(x^{k+1}) + \sum_{j=1}^p \mu_j^{k+1} \nabla g_j(x^{k+1}) + \sum_{l=1}^q \tau_l^{k+1} \nabla h_l(x^{k+1}) = 0,
\end{aligned} \tag{16}$$

$$u^{k+1} \geqslant 0, G(x^{k+1}) \geqslant 0, (u^{k+1})^T G(x^{k+1}) = 0, \tag{17}$$

$$v^{k+1} \geqslant 0, H(x^{k+1}) \geqslant 0, (v^{k+1})^T H(x^{k+1}) = 0, \tag{18}$$

$$\mu^{k+1} \geqslant 0, g(x^{k+1}) \leqslant 0, (\mu^{k+1})^T g(x^{k+1}) = 0, \tag{19}$$

$$h(x^{k+1}) = 0. \tag{20}$$

由

$$\nabla_x L_i(x^{k+1},\lambda^k)=\lambda_i^k\nabla G_i(x^{k+1})+(1-\lambda_i^k)\nabla H_i(x^{k+1}),\ i=1,\cdots,m,$$

并记

$$\begin{aligned}\tilde{u}_i^{k+1}&=u_i^{k+1}-\lambda_i^k\rho_k L_i(x^{k+1},\lambda^k),\\ \tilde{v}_i^{k+1}&=v_i^{k+1}-(1-\lambda_i^k)\rho_k L_i(x^{k+1},\lambda^k),\ i=1,\cdots,m,\end{aligned}\tag{21}$$

则 (16) 式可写成

$$\begin{aligned}&\nabla f(x^{k+1})+\sum_{j=1}^{p}\mu_j^{k+1}\nabla g_j(x^{k+1})+\sum_{l=1}^{q}\tau_l^{k+1}\nabla h_l(x^{k+1})\\ &-\sum_{i=1}^{m}\tilde{u}_i^{k+1}\nabla G_i(x^{k+1})-\sum_{i=1}^{m}\tilde{v}_i^{k+1}\nabla H_i(x^{k+1})=0.\end{aligned}\tag{22}$$

下面证明 $\{\tilde{u}_i^{k+1}\},i=1,\cdots,m$, $\{\tilde{v}_i^{k+1}\},i=1,\cdots,m$, $\{\mu_j^{k+1}\},j=1,\cdots,p$, $\{\tau_l^{k+1}\},l=1,\cdots,q$ 都是有界数列. 若非, 假设

$$\sigma_{k+1}=\sum_{j=1}^{p}|\mu_j^{k+1}|+\sum_{l=1}^{q}|\tau_l^{k+1}|+\sum_{i=1}^{m}|\tilde{u}_i^{k+1}|+\sum_{i=1}^{m}|\tilde{v}_i^{k+1}|\to+\infty.$$

不失一般性, 假设

$$\begin{aligned}&\lim_{k\to\infty}\frac{\mu_j^{k+1}}{\sigma_{k+1}}=\bar{\mu}_j,\ j=1,\cdots,p,\\ &\lim_{k\to\infty}\frac{\tau_l^{k+1}}{\sigma_{k+1}}=\bar{\tau}_l,\ l=1,\cdots,q,\\ &\lim_{k\to\infty}\frac{\tilde{u}_i^{k+1}}{\sigma_{k+1}}=\bar{u}_i,\ i=1,\cdots,m,\\ &\lim_{k\to\infty}\frac{\tilde{v}_i^{k+1}}{\sigma_{k+1}}=\bar{v}_i,\ i=1,\cdots,m.\end{aligned}$$

(22) 式两边同时除以 σ_{k+1}, 并令 $k\to\infty$ 得,

$$\sum_{j=1}^{p}\bar{\mu}_j\nabla g_j(\bar{x})+\sum_{l=1}^{q}\bar{\tau}_l\nabla h_l(\bar{x})-\sum_{i=1}^{m}\bar{u}_i\nabla G_i(\bar{x})-\sum_{i=1}^{m}\bar{v}_i\nabla H_i(\bar{x})=0,\tag{23}$$

且

$$\sum_{j=1}^{p}|\bar{\mu}_j|+\sum_{l=1}^{q}|\bar{\tau}_l|+\sum_{i=1}^{m}|\bar{u}_i|+\sum_{i=1}^{m}|\bar{v}_i|=1.\tag{24}$$

当 $j\in I_g^c(\bar{x})$ 时, 由 $x^k\to\bar{x}$, 则对充分大的 k 有 $g_j(x^{k+1})<0$. 由 (19) 式得, $\mu_j^{k+1}=0$, 故 $\bar{\mu}_j=0$.

当 $i\in\gamma(\bar{x})$ 时, $G_i(\bar{x})>0=H_i(\bar{x}),\bar{\lambda}_i=0$. 由 $x^k\to\bar{x}$, 则对充分大的 k 有

$$G_i(x^{k+1})>0,\ G_i(x^{k+1})>H_i(x^{k+1}),\ \lambda_i^k=0.$$

由 (21) 式和 (17) 式得 $\tilde{u}_i^{k+1}=0$, 故 $\bar{u}_i=0$.

同理可得，当 $i\in\alpha(\bar{x})$ 时，$\tilde{v}_i^{k+1}=0$, 故 $\bar{v}_i=0$.

由上面的讨论和 (23) 式、(24) 式得，

$$\sum_{j\in I_g(\bar{x})}\bar{\mu}_j\nabla g_j(\bar{x})+\sum_{l=1}^{q}\bar{\tau}_l\nabla h_l(\bar{x})-\sum_{i\in I_G(\bar{x})}\bar{u}_i\nabla G_i(\bar{x})-\sum_{i\in I_H(\bar{x})}\bar{v}_i\nabla H_i(\bar{x})=0, \tag{25}$$

$$\sum_{j\in I_g(\bar{x})}|\bar{\mu}_j|+\sum_{l=1}^{q}|\bar{\tau}_l|+\sum_{i\in I_G(\bar{x})}|\bar{u}_i|+\sum_{i\in I_H(\bar{x})}|\bar{v}_i|=1. \tag{26}$$

这与在 $\bar{x}$ 处 MPCC-LICQ 成立的假设条件相矛盾，故得 $\{\mu_j^{k+1}\}, j=1,\cdots,p$, $\{\tau_l^{k+1}\}, l=1,\cdots,q$, $\{\tilde{u}_i^{k+1}\}, i=1,\cdots,m$, $\{\tilde{v}_i^{k+1}\}, i=1,\cdots,m$ 都是有界数列．不失一般性，假设

$$\begin{aligned}&\mu_j^{k+1}\to\bar{\mu}_j,\ j=1,\cdots,p,\\&\tau_l^{k+1}\to\bar{\tau}_l,\ l=1,\cdots,q,\\&\tilde{u}_i^{k+1}\to\bar{u}_i,\ i=1,\cdots,m,\\&\tilde{v}_i^{k+1}\to\bar{v}_i,\ i=1,\cdots,m.\end{aligned} \tag{27}$$

和上面的讨论完全类似可得，

$$\begin{aligned}&\bar{\mu}_j=0,\ j\in I_g^c(\bar{x}),\\&\bar{u}_i=0,\ i\in\gamma(\bar{x}),\\&\bar{v}_i=0,\ i\in\alpha(\bar{x}).\end{aligned} \tag{28}$$

令 $k\to\infty$, 由 (22) 式得，

$$\begin{aligned}&\nabla f(\bar{x})+\sum_{j\in I_g(\bar{x})}\bar{\mu}_j\nabla g_j(\bar{x})+\sum_{l=1}^{q}\bar{\tau}_l\nabla h_l(\bar{x})\\&-\sum_{i\in I_G(\bar{x})}\bar{u}_i\nabla G_i(\bar{x})-\sum_{i\in I_H(\bar{x})}\bar{v}_i\nabla H_i(\bar{x})=0.\end{aligned} \tag{29}$$

故 $\bar{x}$ 是 MPCC 的 W- 稳定点.

当 $i\in I_G(\bar{x})\cap I_H(\bar{x})$ 时，下面分两种情况讨论：

(1) 若 $\bar{\lambda}_i=0$, 则当 k 充分大时，$\lambda_i^k=0$. 由 λ 的选取方式 (13) 式得，$i\in\gamma(x^{k+1})$, 即 $G_i(x^{k+1})>H_i(x^{k+1})\geqslant 0$. 由 (21) 式和 (17) 式得 $\tilde{u}_i^{k+1}=0$, 故 $\bar{u}_i=0$.

(2) 若 $\bar{\lambda}_i=1$, 则当 k 充分大时，$\lambda_i^k=1$. 由 λ 的选取方式 (13) 式得，$i\in\alpha(x^{k+1})$ 或 $i\in\beta(x^{k+1})$.

(i) 当 $i\in\alpha(x^{k+1})$ 时，即 $0\leqslant G_i(x^{k+1})<H_i(x^{k+1})$. 由 (21) 式和 (18) 式得 $\tilde{v}_i^{k+1}=0$, 故 $\bar{v}_i=0$.

(ii) 当 $i\in\beta(x^{k+1})$ 时，即 $0\leqslant G_i(x^{k+1})=H_i(x^{k+1})$.

若 $G_i(x^{k+1})=H_i(x^{k+1})=0$, 则 $L_i(x^{k+1},\lambda^k)=0$. 由 (21) 式得，$\tilde{u}_i^{k+1}=u_i^{k+1}\geqslant 0, \tilde{v}_i^{k+1}=v_i^{k+1}\geqslant 0$, 从而可得 $\bar{u}_i\geqslant 0, \bar{v}_i\geqslant 0$;

若 $G_i(x^{k+1})=H_i(x^{k+1})>0$, 由 (21) 式和 (18) 式得，$\tilde{v}_i^{k+1}=0$, 故 $\bar{v}_i=0$.

综上可得，对于 $\forall i\in I_G(\bar{x})\cap I_H(\bar{x})$, $\bar{u}_i\bar{v}_i=0$, 或 $\bar{u}_i>0, \bar{v}_i>0$, 故 $\bar{x}$ 是 MPCC 的 M- 稳定点.

进而, 若在 $\bar{x}$ 处 ULSC 成立, 则 $\bar{x}$ 是 MPCC(1) 的 S- 稳定点, 从而可得 $\bar{x}$ 是 MPCC(1) 的 B- 稳定点.

4　数值实验

为了说明算法的可行性，我们利用 Matlab 程序实现算法 2.1. 程序中 $\rho_0 = 1$， $c = 4$, $\varepsilon = 10^{-6}$, 并利用 fmincon 函数求解非线性规划 $P(x, \lambda^k, \rho_k)$.

例 1

$$\begin{aligned}
&\min\ f(x) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2\\
&\ \text{s.t.}\ 2x_1 - x_2 \geqslant 0,\ x_4 \geqslant 0,\ x_4(2x_1 - x_2) = 0,\\
&\qquad x_1 \leqslant 2,\ x_2 + x_3 = 4,\ 4x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0.
\end{aligned}$$

例 2

$$\begin{aligned}
&\min\ f(x) = -x_1 - 3x_2 + 2x_3\\
&\ \text{s.t.}\ x_1 \leqslant 8,\ x_2 + x_3 = 0,\\
&\qquad x_3 - x_4 + x_5 = 0,\ x_4 - 2x_5 - 3x_6 = 0,\\
&\qquad G(x) = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \geqslant 0,\ H(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 - 4x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} \geqslant 0,\\
&\qquad G(x)^{\mathrm{T}} H(x) = 0.
\end{aligned}$$

例 1−2 的数值实验结果

例	迭代次数	最优解 x^*	运行时间 (s)	$f(x^*)$
1	3	$(1,\ 0,\ 4,\ 0,\ 5.3333)^{\mathrm{T}}$	0.2030	0
2	3	$(8,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)^{\mathrm{T}}$	0.2314	−8

数值实验表明算法可行，有效.

参 考 文 献

[1] Luo Z Q, Pang J S, Ralph D. Mathetatical programs with equilibrium contraints [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.

[2] Scheel H, Scholtes S. Mathematical programs with complementarity constraints [J]. *Math Oper Res*, 2000, **25**: 1-22.

[3] Chen Y, Florian M. The nonlinear bilevel programming problem: formulations, regularity and optimality conditions [J]. *Optim*, 1995, **32**: 193-209.

[4] Fukushima M, Pang J S. Convergence of a smoothing continuation method for mathematical programs with complementarity constraints, Ill-posed variational problems and regularition techniques [J]. *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems,* 1999, **477**: 105-116.

[5] Scholtes S. Convergence properties of a regularization scheme for mathematical programs with complementarity constraints [J]. *SIAM J Optim*, 2001, **11**: 918-936.

[6] Lin G H, Fukushima M. A modified relaxation scheme for mathematical programs with complementarity constraints [J]. *Annals Oper Res*, 2005, **133**: 63-84.

[7] Fukushima M, Tseng P. An implementable active-set algorithm for computing a B-stationary point of the mathematical program with linear complementarity constraints [J]. *SIAM J Optim*, 2002, **12**: 724-739.

[8] Hu X M, Ralph D. Convergence of a penalty method for mathematical programs with complementarity constraints [J]. *J Optim Theory Appl*, 2004, **123**: 365-390.

[9] Huang X X, Yang X Q, Zhu D L. A sequential smooth penalization approach to mathematical programs with complementarity constraints [J]. *Numer Funct Anal Optim*, 2006, **27**: 71-98.

[10] Yang X Q, Huang X X. Lower-order penalty methods for mathematical programs with complementarity constraints [J]. *Optim Meth Software* , 2004, **19**: 693-720.

[11] Yang X Q, Huang X X. Convergence analysis of an augmented Lagrangian method for mathematical programs with complementarity constraints [J]. *Nonlinear Anal*, 2005, **63**: e2247 -e2256.

[12] Huang X X, Yang X Q, Teo K L. Partial augmented Lagrangian method and mathematical programs with complementarity constraints [J]. *J Global Optim*, 2006, **35**: 235-254.

[13] 乌力吉，陈国庆. 线性互补问题的一种新 Lagrange 乘子法 [J]. *高等学校计算数学学报*, 2004, **26**: 162-171.

[14] 乌力吉，陈国庆. 线性互补问题的一类新的带参数价值函数的阻尼牛顿法 [J]. *应用数学*, 2005, **18**: 33-39.

[15] Pang J S, Fukushima M. Complementarity constraint qualifications and simplified B-stationary conditions for mathematical programs with equilibrium constraints [J]. *Comput Optim Appl*, 1999, **13**: 111-136.

[16] Scheel H, Scholtes S. Mathematical programs with complementarity constraints: stationarity, optimality and sensitivity [J]. *Math Oper Res*, 2000, **25**: 1-22.