集值优化问题严最大有效解的高阶刻画 *

杨 扬 [1]　徐义红 [1†]　熊卫芝 [1]

摘要 在实赋范线性空间中考虑集值优化问题的严有效性. 利用高阶导数的性质给出了受约束于固定集的集值优化问题取得严最大有效解的高阶导数型最优性必要条件. 当目标函数为锥凹集值映射时, 利用严最大有效点的性质得到集值优化问题取得严最大有效解的充分条件.

关键词 严最大有效解, m- 阶 Contingent 切导数, 集值优化

中图分类号 O221

数学分类号 90C28, 90C29

Higher-Order Characterizations for Set-Valued Optimization on Strictly Maximal Efficient Solutions

YANG Yang[1]　XU Yihong[1†]　XIONG Weizhi[1]

Abstract The strict efficiency of set-valued optimization is considered in real normed spaces. By applying the properties of higher-order derivatives, higher-order type necessary optimality condition is established for a set-valued optimization problem whose constraint condition is determined by a fixed set to attain its strictly maximal efficient solution. When objective function is concave, with the properties of strictly maximal efficient point, sufficient optimality condition is also derived.

Keywords strictly maximal efficient solution, mth-order contingent derivative, set-valued optimization

Chinese Library Classification O221

2010 Mathematics Subject Classification 90C28, 90C29

0 引 言

众所周知, 集值优化问题各种有效解意义下的最优性条件, 是近年来学者们研究的热点 [1−7], 其中, 导数型最优性条件尤其引起人们的关注 [8−10]. 导数型最优性条件一般以某种类型的切锥和导数为基础, 例如 Clarke 切锥, Adjacent 切锥与 Contingent 切锥及其引进的导数. Aubin 和 Frankowska[8] 定义了 m- 阶 Contingent 切锥和 m- 阶

收稿日期: 2009 年 1 月 6 日.

* 基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10461007) ; 江西省自然科学基金项目 (2009GZS0021) ; 江西省教育厅科技项目 (GJJ09069)

1. 南昌大学数学系, 南昌 330031; Department of Mathematics, Nanchang University, Nanchang 330031, China

† 通讯作者 Corresponding author

Contingent 切导数 (其中 m 是正整数). Li[9] 借助高阶导数研究了当目标函数和约束函数均为锥凹时，集值优化问题取得弱最大有效解的充分必要条件. Wang[10] 利用高阶切集和凸集分离定理，在锥 - 似凸映射的假设条件下，得到了带广义不等式约束的集值优化问题取得 Benson 真有效解的高阶 Fritz John 型最优性条件. 为了改善有效点的概念，傅万涛 [11−12] 提出一种新的有效点 —— 严有效点的概念，它具有良好的性质，即每个严有效点都能用严格正泛函来标量化.

本文先研究受约束于固定集的集值优化问题取得严最大有效解的高阶必要条件，其次研究取得严最大有效解的高阶充分条件.

1 基本概念及有关结论

以下总假设 X,Y 为实赋范线性空间， C 是 Y 中的闭凸点锥，且 $\mathrm{int}C\neq\emptyset$. 设 M 为 Y 的任一子集，我们用 $\mathrm{cl}M$,$\mathrm{int}M$ 和 $\mathrm{cone}M$ 分别表示 M 的闭包，内部和生成锥. 一个凸子集 $B\subset C$ 为锥 C 的基，如果 $0\notin\mathrm{cl}B$，且 $C=\mathrm{cone}B=\bigcup\limits_{\lambda\geqslant 0}\lambda B=\{\lambda x:\ x\in B,\lambda\geqslant 0\}$.

定义 1.1[11] 设 M 是 Y 的非空子集， B 是 C 的基. $y_0\in M$ 称为关于基 B 的严有效点，记为 $y_0\in FE\left(M,B\right)$，若存在一个零点的邻域 U 使得

$$\mathrm{cl}\left(\mathrm{cone}\left(M-y_0\right)\right)\cap\left(U-B\right)=\emptyset. \tag{1.1}$$

注 1.1[11] 关于基 B 的严有效点定义， (1.1) 式等价于

$$\mathrm{cone}\left(M-y_0\right)\cap\left(U-B\right)=\emptyset, \tag{1.2}$$

且根据需要，零点的邻域 U 可取为或开或闭或凸或均衡的.

定义 1.2 设 M 是 Y 的非空子集， B 是 C 的基. $y_0\in M$ 称为关于基 B 的严最大有效点，记为 $y_0\in FE\max\left(M,B\right)$，若存在一个零点的邻域 U 使得

$$\mathrm{cl}\left(\mathrm{cone}\left(y_0-M\right)\right)\cap\left(U-B\right)=\emptyset. \tag{1.3}$$

注 1.2 关于基 B 的严最大有效点定义， (1.3) 式等价于

$$\mathrm{cone}\left(y_0-M\right)\cap\left(U-B\right)=\emptyset, \tag{1.4}$$

且根据需要，零点的邻域 U 可取为或开或闭或凸或均衡的.

我们用 $FE\left(M,B\right)$ 表示 M 关于基 B 的所有严有效点集，用 $FE\max\left(M,B\right)$ 表示 M 关于基 B 的所有严最大有效点集.

设 A 是 X 的非空子集， $F:X\to 2^Y$,F 的有效域表示如下：

$$\mathrm{Dom}\left(F\right)=\left\{x\in X{:}F\left(x\right)\neq\emptyset\right\}.$$

A 在 F 作用下的像集记为

$$F\left(A\right)=\bigcup_{x\in A}F\left(x\right).$$

考虑下面的集值优化问题

$$(\mathrm{VP})\quad \max_{x\in A} F(x).$$

设 $x_0\in A$, 如果 $y_0\in F(x_0)\cap FE\max(F(A),B)$, 则称 x_0 是 (VP) 在 y_0 处的一个严最大有效解. 设 $x_0\in A$, 如果 $y_0\in F(x_0)\cap FE(F(A),B)$, 则称 x_0 是 (VP) 在 y_0 处的一个严有效解.

下面用一个例子来说明严最大有效解与严有效解是有区别的.

例 1 设 $X=Y=R^2$, $C=\{(a,b):0\leqslant a\leqslant b\}$, $B=\left\{(a,b):a+b-1=0,0\leqslant a\leqslant \frac{1}{2}\right\}$.

考虑下面的集值优化问题的严最大有效解与严有效解.

$$\max_{x\in A} F(x),$$

其中 $A=\left\{(a,b):\ b\leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}a,\ b\geqslant -\frac{\sqrt{3}}{3}a+3,\ a\leqslant 2\sqrt{3}\right\}$, $F(x)=\left\{x,\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)\right\}$, $x\in A$. 求得

$$F(A)=\left\{(a,b):b\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}a,b\geqslant-\frac{\sqrt{3}}{3}a+3,a\leqslant 2\sqrt{3}\right\}.$$

下面先求出 $F(A)$ 的关于基 B 的所有严最大有效点集及严有效点集.

$$FE\max(F(A),B)=\left\{(a,b):b=\frac{\sqrt{3}}{3}a,\frac{3\sqrt{3}}{2}\leqslant a\leqslant 2\sqrt{3}\right\},$$

$$FE(F(A),B)=\left\{(a,b):b=-\frac{\sqrt{3}}{3}a+3,\frac{3\sqrt{3}}{2}\leqslant a\leqslant 2\sqrt{3}\right\}.$$

由严有效解与严最大有效解的定义得:

严最大有效解集为 $\left\{(a,b):b=\frac{\sqrt{3}}{3}a,\frac{3\sqrt{3}}{2}\leqslant a\leqslant 2\sqrt{3}\right\}$,

严有效解集为 $\left\{(a,b):b=-\frac{\sqrt{3}}{3}a+3,\frac{3\sqrt{3}}{2}\leqslant a\leqslant 2\sqrt{3}\right\}$.

定义 1.3[9] 设 $F:X\to 2^Y$ 是一个集值映射, 称 F 在 X 上 C- 凹, 若对任意的 $x_1,x_2\in X$ 和 $\lambda\in(0,1)$, 有

$$\lambda F(x_1)+(1-\lambda)F(x_2)\subset F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)-C.$$

定义 1.4[9] 设 $x\in K\subset X$, 且 $v_1,\cdots,v_{m-1}\in X$, 我们称集合

$$\begin{aligned}T_K^{(m)}(x,v_1,\cdots,v_{m-1})&=\limsup_{h\to0^+}\frac{K-x-hv_1-\cdots-h^{m-1}v_{m-1}}{h^m}\\&=\left\{y\in X:\liminf_{h\to0^+}d\left(y,\frac{K-x-hv_1-\cdots-h^{m-1}v_{m-1}}{h^m}\right)=0\right\}\end{aligned}$$

是 K 在 $(x,v_1,\cdots,v_{m-1})$ 处的 m- 阶 Contingent 切锥 (mth-order contingent cone).

定义 1.5[9] 设 $x\in K\subset X$, 且 $v_1,\ldots,v_{m-1}\in X$, 我们称集合

$$\begin{aligned}T_K^{b(m)}\left(x,v_1,\cdots,v_{m-1}\right)&=\liminf_{h\to 0^+}\frac{K-x-hv_1-\cdots-h^{m-1}v_{m-1}}{h^m}\\&=\left\{y\in X:\lim_{h\to 0^+}d\left(y,\frac{K-x-hv_1-\cdots-h^{m-1}v_{m-1}}{h^m}\right)=0\right\}\end{aligned}$$

是 K 在 $(x,v_1,\cdots,v_{m-1})$ 处的 m- 阶相依切锥 (mth-order adjacent tangent cone).

定义 1.6[9] 设 X, Y 是赋范线性空间， $F:\ X\to 2^Y$ 是一个集值映射， F 在 $(x,y)\in \mathrm{Graph}(F)$ 关于向量 $(u_1,v_1),\cdots,(u_{m-1},v_{m-1})$ 的 m- 阶 Contingent 切导数 (mth-order contingent derivative) $D^{(m)}F(x,y,u_1,v_1,\cdots,u_{m-1},v_{m-1})$ 是一个从 X 到 Y 的集值映射，定义如下

$$\mathrm{Graph}\big(D^{(m)}F(x,y,u_1,v_1,\cdots,u_{m-1},v_{m-1})\big)=T^{(m)}_{\mathrm{Graph}(F)}(x,y,u_1,v_1,\cdots,u_{m-1},v_{m-1}),$$

即

$$\begin{aligned}&v_m\in D^{(m)}F(x,y,u_1,v_1,\cdots,u_{m-1},v_{m-1})(u_m)\\\Longleftrightarrow&(u_m,v_m)\in T^{(m)}_{\mathrm{Graph}(F)}(x,y,u_1,v_1,\cdots,u_{m-1},v_{m-1}).\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{Graph}\,(F)=\{(x,y):y\in F\,(x)\,,x\in \mathrm{Dom}\,(F)\}$.

定义 1.7[9] 设 X, Y 是赋范线性空间， $F:\ X\to 2^Y$ 是一个集值映射， F 在 $(x,y)\in \mathrm{Graph}(F)$ 关于向量 $(u_1,v_1),\cdots,(u_{m-1},v_{m-1})$ 的 m- 阶相依导数 (mth-order adjacent derivative) $D^{b(m)}F(x,y,u_1,v_1,\cdots,u_{m-1},v_{m-1})$ 是一个从 X 到 Y 的集值映射，定义如下

$$\mathrm{Graph}\big(D^{b(m)}F(x,y,u_1,v_1,\cdots,u_{m-1},v_{m-1})\big)=T^{b(m)}_{\mathrm{Graph}(F)}(x,y,u_1,v_1,\cdots,u_{m-1},v_{m-1}),$$

即

$$\begin{aligned}&v_m\in D^{b(m)}F(x,y,u_1,v_1,\cdots,u_{m-1},v_{m-1})(u_m)\\\Longleftrightarrow&(u_m,v_m)\in T^{b(m)}_{\mathrm{Graph}(F)}(x,y,u_1,v_1,\cdots,u_{m-1},v_{m-1}).\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{Graph}(F)=\{(x,y:\ y\in F(x),\ x\in \mathrm{Dom}(F)\}$.

定义 1.8[9] F 在 (x,y) 处关于向量 $(u_1,v_1)\,,\ldots,(u_{m-1},v_{m-1})$ 的由 C 诱导的 m- 阶 Contingent 切导数 $D_C^{(m)}F\,(x,y,u_1,v_1,\ldots,u_{m-1},v_{m-1})$ 是集值映射

$$F\,(x)-C=\{y-c:y\in F\,(x)\,,c\in C\}$$

在 (x,y) 处关于向量 $(u_1,v_1)\,,\ldots,(u_{m-1},v_{m-1})$ 的 m- 阶 Contingent 切导数. F 在 (x,y) 处关于向量 $(u_1,v_1)\,,\ldots,(u_{m-1},v_{m-1})$ 的由 C 诱导的 m- 阶相依导数 $D_C^{b(m)}F(x,y,u_1,v_1,\cdots,u_{m-1},v_{m-1})$ 可类似定义.

2 最优性条件

记 F_A 为 F 在 A 上的限制.

设 x_0 是集值优化问题 (VP) 在 y_0 处的一个严最大有效解，则存在零点的开凸邻域 U_0 使得

$$\operatorname{cone}(y_0 - F(A)) \cap (U_0 - B) = \emptyset. \tag{2.1}$$

定理 2.1 若 x_0 是集值优化问题 (VP) 在 y_0 处的一个严最大有效解，则对任意 $(u_i, v_i) \in X \times (B - U_0), i = 1, \cdots, m-1$, 有

$$D^{(m)} F_A(x_0, y_0, u_1, v_1, \ldots, u_{m-1}, v_{m-1})(x) \cap \operatorname{cone}(B - U_0) \subset \{0\}, \quad \forall x \in A.$$

证明 (i) 若 $D^{(m)} F_A(x_0, y_0, u_1, v_1, \ldots, u_{m-1}, v_{m-1})(x) \cap \operatorname{cone}(B - U_0) = \emptyset$, 则结论成立.

(ii) 若存在 $x^* \in A$, 使 $D^{(m)} F_A(x_0, y_0, u_1, v_1, \ldots, u_{m-1}, v_{m-1})(x^*) \cap \operatorname{cone}(B - U_0) \neq \emptyset$. 任取 $y^* \in D^{(m)} F_A(x_0, y_0, u_1, v_1, \ldots, u_{m-1}, v_{m-1})(x^*)$, 存在 $\lambda_0 \geqslant 0$, 使得

$$y^* \in \lambda_0 (B - U_0). \tag{2.2}$$

下证 $\lambda_0 = 0$. 若 $\lambda_0 > 0$, 由 $y^* \in D^{(m)} F_A(x_0, y_0, u_1, v_1, \cdots, u_{m-1}, v_{m-1})(x^*)$ 得，存在正序列 $h_n \to 0^+$, $(x_n, y_n) \in \operatorname{Graph}(F)$ 及 $\{x_n\} \subset A$, 使得

$$\frac{(x_n, y_n) - (x_0, y_0) - h_n(u_1, v_1) - \cdots - h_n^{m-1}(u_{m-1}, v_{m-1})}{h_n^m} \to (x^*, y^*).$$

由 (2.2) 及 $\lambda_0(B - U_0)$ 为开集，得到当 n 充分大时，有

$$\frac{y_n - y_0 - h_n v_1 - \cdots - h_n^{m-1} v_{m-1}}{h_n^m} \in \lambda_0 (B - U_0).$$

于是存在 $v_0 \in B - U_0$, 使得

$$\begin{aligned} y_n - y_0 &= \lambda_0 h_n^m v_0 + h_n v_1 + \cdots + h_n^{m-1} v_{m-1} \\ &= t_0 \left(\frac{\lambda_0 h_n^m}{t_0} v_0 + \frac{h_n}{t_0} v_1 + \cdots + \frac{h_n^{m-1}}{t_0} v_{m-1} \right), \end{aligned}$$

其中 $t_0 = \lambda_0 h_n^m + h_n + \cdots + h_n^{m-1} > 0$. 由 $B - U_0$ 是凸集， $v_0, v_1, \cdots, v_{m-1} \in B - U_0$ 得

$$\frac{\lambda_0 h_n^m}{t_0} v_0 + \frac{h_n}{t_0} v_1 + \cdots + \frac{h_n^{m-1}}{t_0} v_{m-1} \in B - U_0,$$

即

$$\frac{y_n - y_0}{t_0} \in B - U_0.$$

由 $y_n \in F(x_n), x_n \in A$ 得

$$\operatorname{cone}(F(A) - y_0) \cap (B - U_0) \neq \emptyset.$$

这与 (2.1) 矛盾. 于是 $\lambda_0 = 0$, 由 (2.2) 得 $y^* = 0$. 由 y^* 的任意性及 $0 \in \operatorname{cone}(B - U_0)$ 知

$$D^{(m)}F_A(x_0, y_0, u_1, v_1, \ldots, u_{m-1}, v_{m-1})(x^*) \cap \operatorname{cone}(B - U_0) = \{0\}.$$

综合 (i)(ii) 得

$$D^{(m)}F_A(x_0, y_0, u_1, v_1, \ldots, u_{m-1}, v_{m-1})(x) \cap \operatorname{cone}(B - U_0) \subset \{0\}, \forall x \in A.$$

引理 2.1[7] 设 F 在凸集 $A \subset \operatorname{Dom}(F)$ 上 C- 凹, 则对任意的 $x_1, x_2 \in A$ 及任意的 $y_1 \in F(x_1)$, 有

$$F(x_2) - y_1 \subset D_C^{b(m)}F(x_1, y_1, u_1 - x_1, v_1 - y_1, \ldots, u_{m-1} - x_1, v_{m-1} - y_1)(x_2 - x_1),$$

其中 $u_1, \cdots, u_{m-1} \in A, v_1 \in F(u_1) - C, \cdots, v_{m-1} \in F(u_{m-1}) - C$.

定理 2.2 设 $\hat{U}$ 是零的凸邻域, $B \cap \hat{U} = \emptyset$, F 在 $A \subset \operatorname{Dom}(F)$ 上 $\operatorname{cone}(B - \hat{U})$- 凹, $u_1, \cdots, u_{m-1} \in A, v_1 \in F(u_1) - \operatorname{cone}(B - \hat{U}), \cdots, v_{m-1} \in F(u_{m-1}) - \operatorname{cone}(B - \hat{U})$.

若

$$D_{\operatorname{cone}(B-\hat{U})}^{b(m)}F(x_0, y_0, u_1 - x_0, v_1 - y_0, \cdots, u_{m-1} - x_0, v_{m-1} - y_0)(x - x_0) \cap \operatorname{cone}(B - \hat{U}) = \{0\},$$

$\forall x \in A$. 则 x_0 是集值优化问题 (VP) 在 y_0 处的严最大有效解.

证明 由 $y_0 \in F(x_0)$ 得

$$0 \in (F(x_0) - y_0) \cap \operatorname{cone}(B - \hat{U}),$$

于是

$$0 \in (F(A) - y_0) \cap \operatorname{cone}(B - \hat{U}). \tag{2.3}$$

由引理 2.1 知, $\forall x \in A$ 有

$$\begin{aligned}
&(F(x) - y_0) \cap \operatorname{cone}(B - \hat{U}) \\
\subset & D_{\operatorname{cone}(B-\hat{U})}^{b(m)}F(x_0, y_0, u_1 - x_0, v_1 - y_0, \cdots, \\
&u_{m-1} - x_0, v_{m-1} - y_0)(x - x_0) \cap \operatorname{cone}(B - \hat{U}) \\
=&\{0\}.
\end{aligned}$$

再由 (2.3) 得

$$(F(A) - y_0) \cap \operatorname{cone}(B - \hat{U}) = \{0\}. \tag{2.4}$$

下证

$$\operatorname{cone}(y_0 - F(A)) \cap \left(\hat{U} - B\right) = \emptyset. \tag{2.5}$$

反证法．若存在 $u_0 \in \hat{U}$, $b_0 \in B$, $x^1 \in A$, $y^1 \in F\left(x^1\right)$, $\lambda_0 \geqslant 0$, 使得

$$u_0 - b_0 = \lambda_0\left(y_0 - y^1\right).$$

由于 $B \cap \hat{U} = \emptyset$, 可知 $\lambda_0 \neq 0$, 且 $y_0 - y^1 \neq 0$.

$$y^1 - y_0 = \frac{b_0 - u_0}{\lambda_0} \in \operatorname{cone}\left(B - \hat{U}\right).$$

$$y^1 - y_0 \in F\left(x^1\right) - y_0 \subset F(A) - y_0.$$

这与 (2.4) 矛盾.

由 (2.5) 知 x_0 是集值优化问题 (VP) 在 y_0 处的严最大有效解.

注 2.1 下面说明定理 2.2 中的邻域 $\hat{U}$ 是存在的．由 $0 \notin \mathrm{cl}B$ 得存在 $t_0 > 0$ 及 Y 上的连续线性泛函 f 使得 $f(b) \geqslant t_0$ ， $\forall b \in B$. 令 $\hat{U} = \{y \in Y : |f(y)| < t_0\}$ ，则 $\hat{U}$ 是零的邻域且 $B \cap \hat{U} = \emptyset$.

参考文献

[1] 盛宝怀, 刘三阳．Benson 真有效意义下集值优化的广义最优性条件 [J]. 数学学报, 2003, **46**(3): 611-620.

[2] 徐义红．集值优化问题的最优性条件 [D]. 西安电子科技大学博士学位论文, 西安， 2003.

[3] Li Taiyong, Xu Yihong. Optimality Conditions for Strictly Efficient Solutions of Nondifferentiable Vector Optimization Problem[J]. *OR Transactions*, 2008, **12**(1): 43-50.

[4] 徐义红, 刘三阳. 近似锥 - 次类凸集值优化的严有效性 [J]. 系统科学与数学, 2004, **24**(3): 311-317.

[5] Li Taiyong, Xu Yihong. ε-Strictly efficient solutions of vector optimization problems with set-valued maps[J]. *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, 2007, **24**(6): 841-854.

[6] Li Taiyong, Xu Yihong. The Strictly Efficient Subgradient of Set-valued Optimization[J]. *Bull Austral Math Soc*, 2007, **75**: 361-371.

[7] Sheng Baohuai, Liu Sanyang. On the generalized Fritz John optimality conditions of vector optimization with set-valued maps under Benson proper efficiency[J]. *Applied Mathematics and Mechanics(English Edition)*, 2002, **23**(12): 1444-1451.

[8] Aubin J P, Frankowska H. Set-Valued Analysis[M]. Birkhauser, Basel, Switzerland, 1990.

[9] Li S J, Teo K L, Yang X Q. Higher-order optimality conditions for set-valued optimization[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2008, **137**: 533-553.

[10] Wang Qilin. Higher-order Fritz John type optimality conditions for Benson proper efficient solutions in set-valued optimization problems[J]. *OR Transactions*, 2009, **13**(3): 1-9.

[11] 傅万涛．赋范线性空间集合的严有效点 [J]. 系统科学与数学, 1997, **17**(4): 324-329.

[12] 傅万涛，陈晓清．逼近锥族和严有效点 [J]. 数学学报，1997, **40**(6): 933-938.