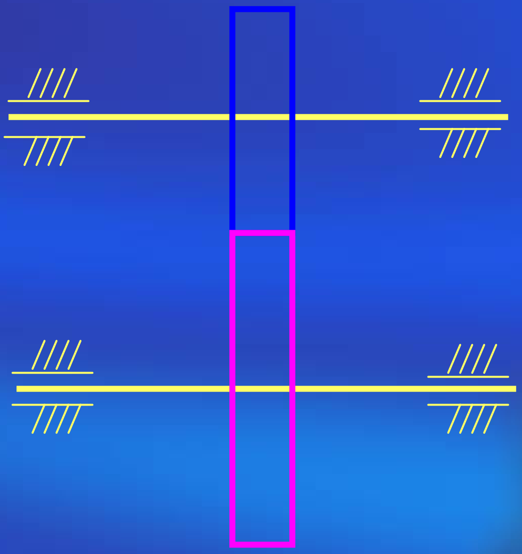
第八章　弯曲变形

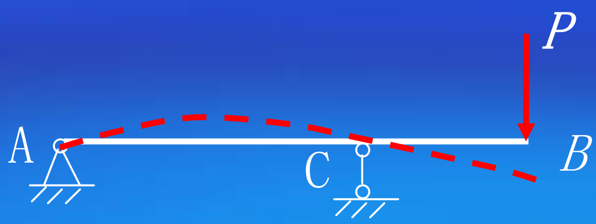
第六章　弯曲变形

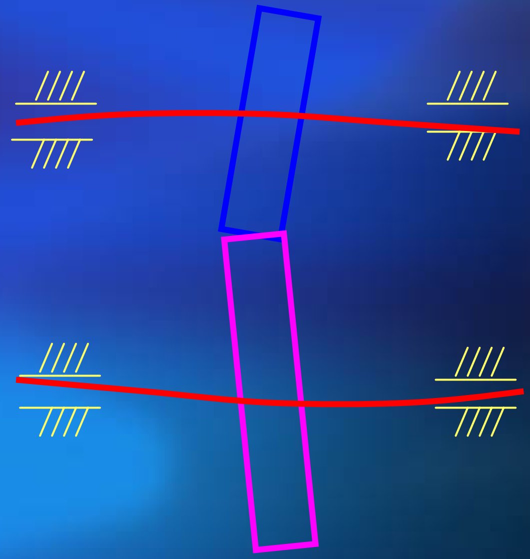
§8.1 工程中的弯曲变形问题

1 限制变形



2 利用变形





§8.2 挠曲线近似微分方程

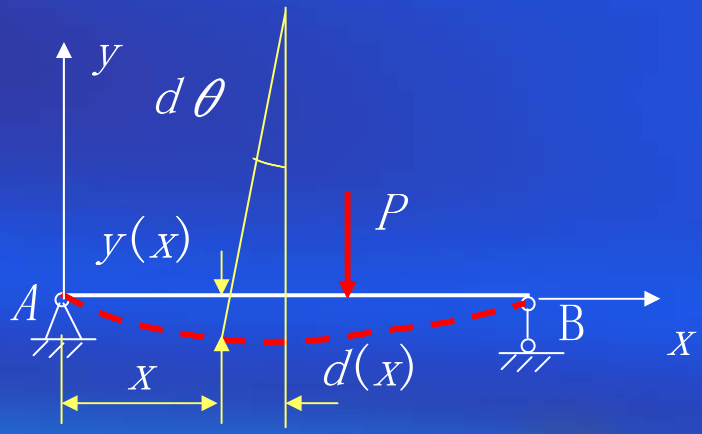
1 梁的弯曲变形

(1) 挠度

挠曲线：

挠度：

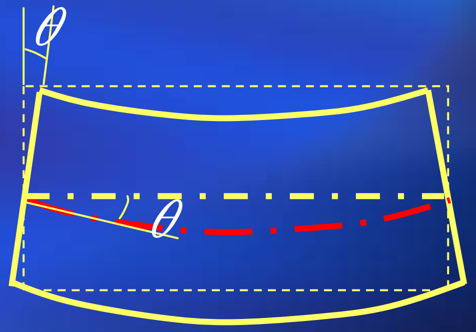
挠度方程： $y = y(x)$



(2) 转角

转角：

转角方程： $\theta = \theta(x)$



$$\theta = arctg\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dy}{dx}$$

2 挠曲线近似微分方程

纯弯曲 $\dfrac{1}{\rho}=\dfrac{M}{EI}$

推广到横力弯曲 $\dfrac{1}{\rho(x)}=\dfrac{M(x)}{EI}$

高等数学 $\dfrac{1}{\rho(x)}=\pm\dfrac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$

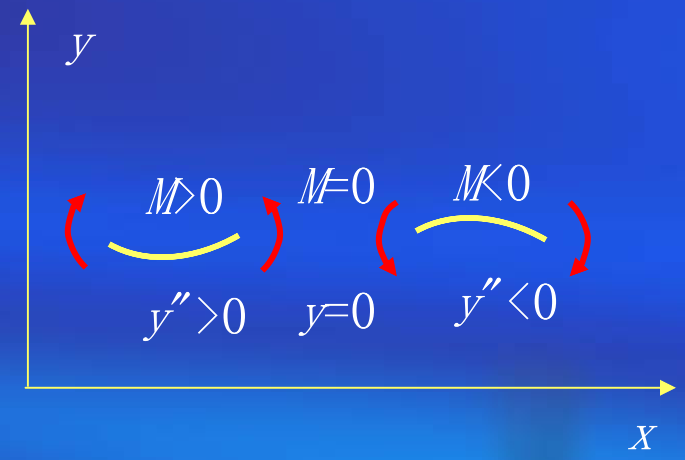
正负号由梁的凹凸判定 $\dfrac{1}{\rho(x)}=\dfrac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$

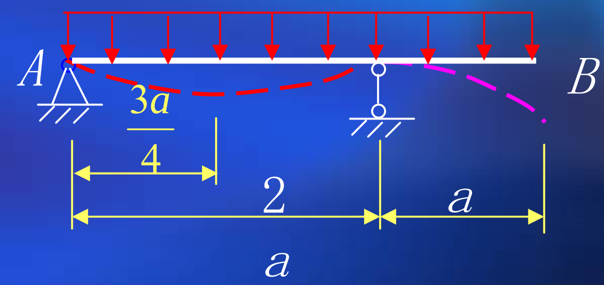
实用于任何弯曲形式

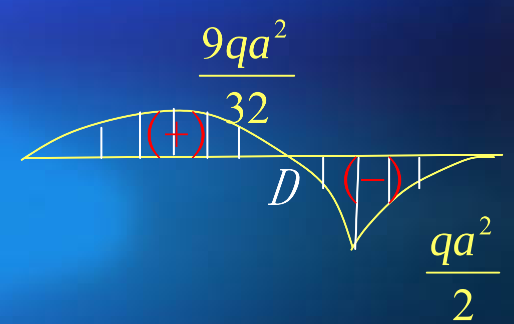
小变形下 $y'^2\to 0$ $y''=\dfrac{1}{\rho(x)}=\dfrac{M(x)}{EI}$

$$y''=\frac{M(x)}{EI}$$

3 大致描绘梁的挠曲线







§8.3 积分法

1 转角普遍方程和挠度普遍方程

$$y''=\frac{M(x)}{EI}$$

$$EIy''=M(x)$$

$$EIy'=\int M(x)\,dx+C$$ 转角普遍方程

$$EIy=\int\int M(x)\,dxdx+Cx+D$$ 挠度普遍方程

2 边界条件：支承条件和光滑连续条件

支承条件：

固定端： $y=0$ $\theta=0$

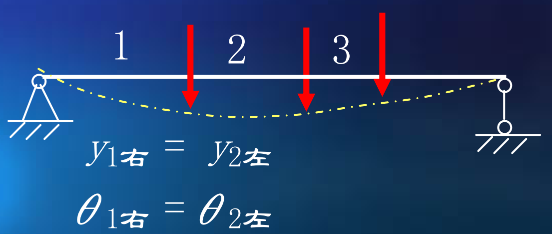
铰支座： $y=0$

弹性支承： $y=\delta$ $y=\Delta l$

光滑连续条件：分段处挠度，转角相等.

$y_{1右}=y_{2左}$ $\theta_{1右}=\theta_{2左}$

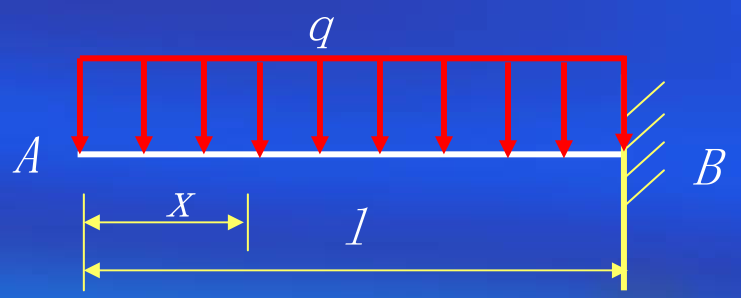
…



已知：$q \quad l$

求：y_A和 θ_A

解：1 弯矩方程 $$M(x) = -\frac{qx^2}{2}$$



2 普遍方程 $$EIy'' = -\frac{qx^2}{2}$$

$$EIy' = EI\theta = \int -\frac{qx^2}{2}dx = -\frac{qx^3}{6} + C$$

$$EIy = \int -\frac{qx3}{6}dx + Cx + D = -\frac{qx^4}{24} + Cx + D$$

3 确定积分常数 $x = l \quad y' = 0 \quad -\frac{ql^3}{6} + C = 0 \quad C = \frac{ql^3}{6}$

$y = 0 \quad -\frac{ql^4}{24} + Cx + D = 0 \quad D = -\frac{ql^4}{8}$

4 挠度方程好转角方程

$$EIy' = EI\theta = -\frac{qx^3}{6} + \frac{ql^3}{6} \qquad EIy = -\frac{qx^4}{24} + \frac{ql^3}{6}x - \frac{ql^4}{8}$$

5 求 θ_A 和 y_A

$$\theta_A\Big|_{x=0} = \frac{ql^3}{6EI} \qquad y_A\Big|_{x=0} = -\frac{ql^4}{8EI}$$

已知：$P\ l\ a>b$

求：挠度方程和转角方程

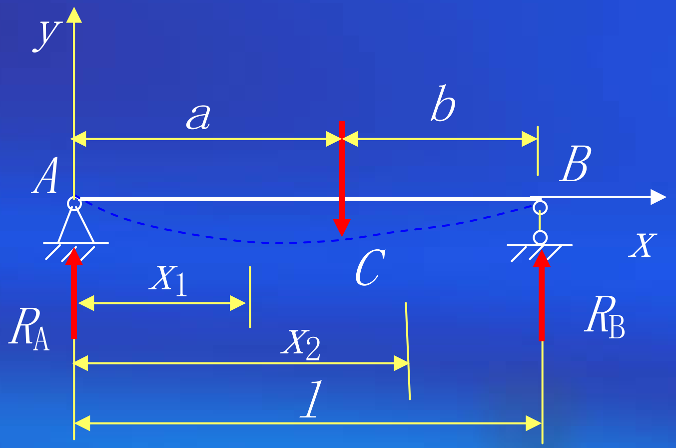
解：1　支反力

$$R_A=\frac{Pb}{l}\qquad R_B=\frac{Pa}{l}$$

2　弯矩方程

$AC(0\leq x\leq a)$　　$$M(x_1)=\frac{Pbx_1}{l}$$

$CB(a\leq x\leq l)$　　$$M(x_2)=\frac{Pbx_2}{l}-P(x_2-a)$$



3 挠度方程和转角方程

$AC(0\leq x\leq a)$	$CB(a\leq x\leq L)$
$EIy''=M(x_1)=\frac{Pbx_1}{l}$	$EIy_2''=M(x)=\frac{Pbx_2}{l}-P(x_2-a)$
$EIy_1'=\frac{Pbx_1^2}{2l}+C_1$	$EIy_2'=\frac{Pbx_2^2}{2l}-\frac{P}{2}(x_2-a)^2+C_1$
$EIy_1=\frac{Pbx_1^3}{6l}+C_1x_1+D_1$	$EIy_2=\frac{Pbx_2^3}{6l}-\frac{P}{6}(x_2-a)^3+C_2x_2+D_2$

4 确定积分常数

$x_1=0\quad y_1=0\qquad(1)\qquad\qquad x_2=l\quad y_2=0\qquad(2)$

$x_1=a\quad y_1=y_2\qquad(3)\qquad\qquad y'_1=y'_2\qquad(4)$

……

§8.4 叠加法

一 叠加条件

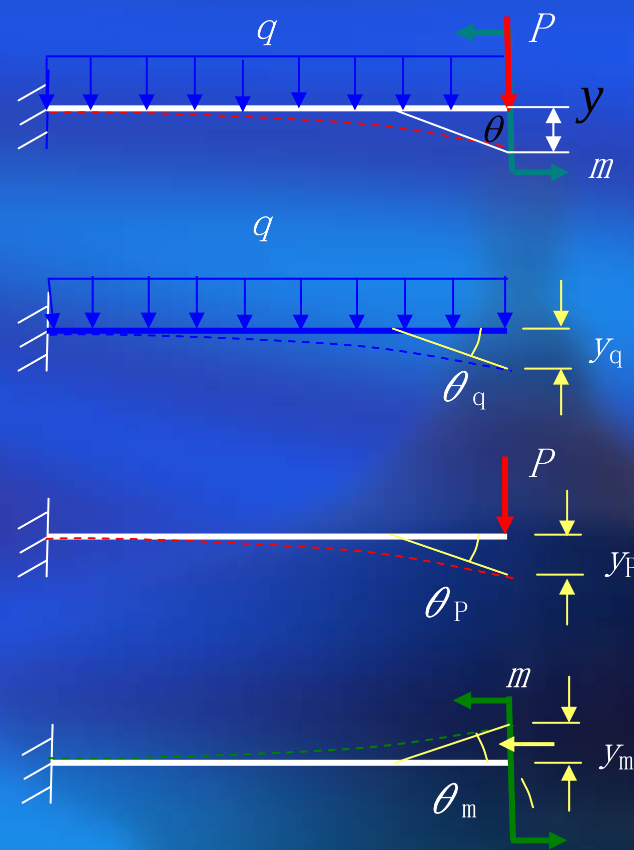
1 材料服从胡克定律，小变形，转角和挠度与载荷成齐次线性关系.

2 每一载荷对变形是各自独立的.

二 叠加原理

载荷单独作用

$$EIy_q'' = M_q \qquad EIy_P'' = M_P \qquad EIy_m'' = M_m$$



叠加

$$EIy_q'' + EIy_P'' + EIy_m'' = M_q + M_P + M_m$$

载荷共同作用

$$EIy'' = M$$

$$M = M_q + M_P + M_m$$

$$EIy'' = EIy_q'' + EIy_P'' + EIy_m''$$

$$y'' = y_q'' + y_P'' + y_m''$$

$$\boxed{y' = y_q' + y_P' + y_m'} \qquad \boxed{y = y_q + y_P + y_m}$$

§8.5刚度条件

$$\theta_{\max} \le [\theta]$$

$$y_{\max} \le [y]$$

$[\theta]$--许用转角

$[y]$--许用挠度

已知： $q \quad l \quad EI$

求： $\theta_{\max} \quad y_{\max}$

解：

$$\theta_A = \theta_{A_1} + \theta_{A_2} = \theta_{A_1} + \theta_B$$

$$y_A = y_{A_1} + y_{A_2} = y_{A_1} + y_B + \frac{\theta_B l}{2}$$

$$\theta_{A_1} = -\frac{ql^3}{6EI} \qquad \theta_B = \frac{q(\frac{l}{2})^3}{6EI} = \frac{ql^3}{48EI}$$

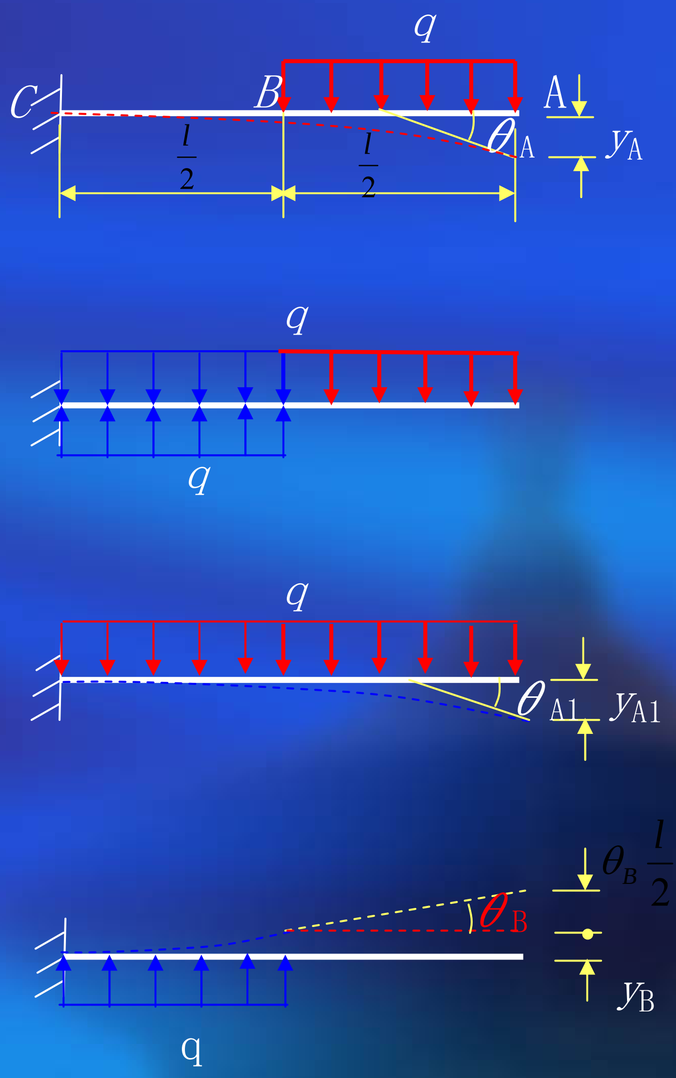
$$y_{A1} = -\frac{ql^4}{8EI} \qquad y_B = \frac{q(\frac{l}{2})^4}{8EI} = \frac{ql^4}{128EI}$$

$$\theta_{\max} = \theta_A = \theta_{A_1} + \theta_{A_2}$$

$$= -\frac{ql^3}{6EI} + \frac{ql^3}{48EI} = -\frac{7ql^3}{48EI}$$

$$y_{\max} = y_A = y_{A_1} + y_B + \frac{\theta_B l}{2}$$

$$= -\frac{ql^4}{8EI} + \frac{ql^4}{128EI} + \frac{ql^3}{48EI} \cdot \frac{l}{2} = -\frac{41ql^4}{384EI}$$



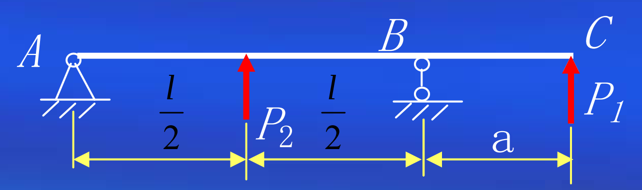
已知：$P_1 = 2\text{kN}, P_2 = 1\text{kN}, l = 400\text{mm}, a = 200\text{mm}, E = 210\text{GPa}, D = 80\text{mm}$

$d = 40\text{mm}$，C 处 $[y] = 0.0001l$. B处 $[\theta] = 0.001\text{rad}$.

求：校核其刚度.

解：用逐段刚化法计算挠度和转角

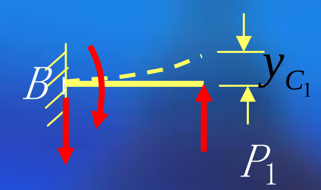
首先刚化AB，BC可视为悬臂梁：



$$y_{C_1} = \frac{P_1 a}{3EI} \qquad \theta_{B_1} = 0$$

然后刚化BC，AB可视为简支梁：

$$\theta_{B_2} = \frac{P_1 a l}{3EI} - \frac{P_2 l^2}{16EI} \qquad y_{C_2} = \theta_{B_2} a$$



B 截面的总转角

$$\theta_B = \theta_{B_1} + \theta_{B_2} = \frac{P_1 a l}{3EI} - \frac{P_2 l^2}{16EI}$$

$$= 0.000109 rad \langle [\theta] = 0.001 rad$$

C 截面的挠度

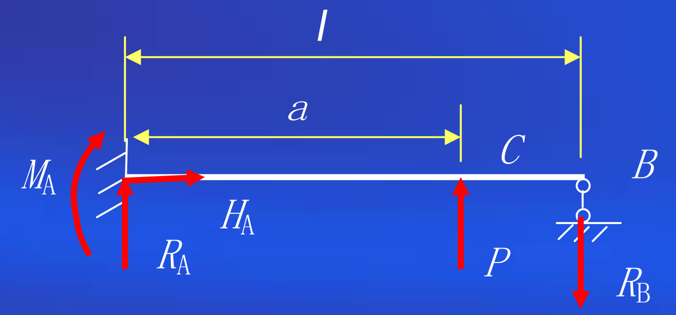
$$y_C = y_{C_1} + y_{C_2} = \frac{Pa^3}{3EI} + \theta_{B_2} a$$

$$= 0{,}035 mm \langle [y] = 0.0001 l = 004 mm$$

§8.6 简单静不定梁

用变形比较法解静不定梁：

1 确定静不定次数



2 解除多余约束，选取静定基.

多余约束：超过维持结构静力平衡所需的约束.

多余反力：多余约束引起的反力.

静定基：解除多余反力和载荷的静定基本系统.

3 建立相当系统.

在静定基加上多余反力和载荷，并保持几何不变性.

4 找变形协调条件，建立补充方程.

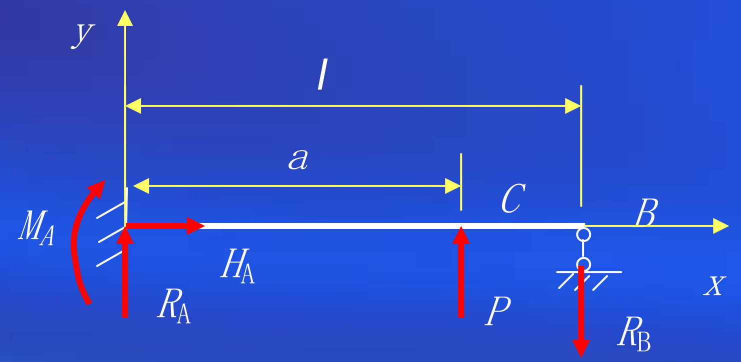
5 联列求解静力学平衡方程和补充方程，求得全部未知量.

1 确定静不定次数

$\sum x=0 \qquad H_A = 0 \qquad (1)$

$\sum y=0 \qquad P + R_A - R_B = 0 \qquad (2)$

$\sum m_A=0 \qquad Pa - R_B l - M_A = 0 \qquad (3)$



2 解除多余约束，选取静定基.

3 建立相当系统. $\qquad y_B = 0$

4 找变形协调条件，建立补充方程.

$$y_B = (y_B)_P + (y_B)_{R_B} = 0$$

$$\frac{Pa^2(3l-a)}{6EI} - \frac{R_B l^3}{3EI} = 0 \qquad (4)$$

5 联列求解静力学平衡方程和补充方程.

$H_A = 0$

$$R_B = \frac{P}{2}\left(\frac{3a^2}{l^2} - \frac{a^3}{l^3}\right)$$

$$R_A = \frac{P}{2}\left(\frac{3a^2}{l^2} - \frac{a^3}{l^3}\right) - P \qquad M_A = \frac{Pl}{2}\left(\frac{2a}{l} - \frac{3a^2}{l^2} + \frac{a^3}{l^3}\right)$$

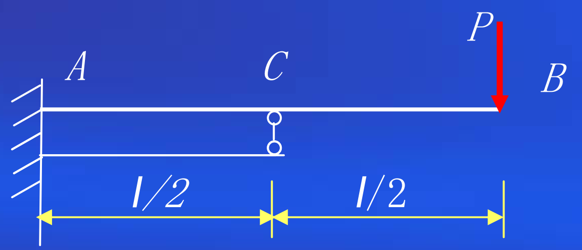
同理M_A为多余约束 $\theta_A = 0$ 得相同结果

$\theta_A = 0$

已知：P l

求：R_C=?

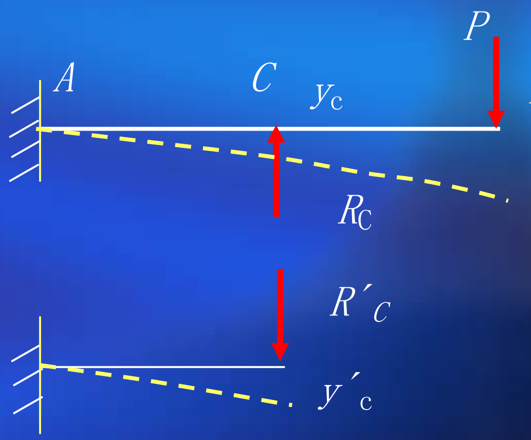
解：为一次静不定



变形协调条件：

$$y_c = y_C'$$

$$(y_C)_P + (y_c)_{R_C} = y_c$$



其中

$$(y_c)_P = -\frac{P(\frac{l}{2})^2(3l-\frac{l}{2})}{6EI}$$

$$(y_c)_{R_C} = \frac{R_C(\frac{l}{2})^3}{3EI} \qquad y'_C = -\frac{R'_C(\frac{l}{2})^3}{3EI}$$

且 $R_C = R'_C$

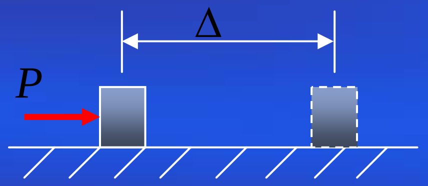
$$-\frac{P(\frac{l}{2})^2(3l-\frac{l}{2})}{6EI} + \frac{R_C(\frac{l}{2})^3}{3EI} = -\frac{R'_C(\frac{l}{2})^3}{3EI}$$

$$R_C = \frac{5P}{4}$$

§8.7　用莫尔定理计算梁的弯曲变形

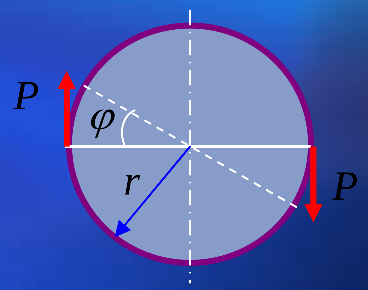
一、虚功原理

1、实功



一物体在大小与方向不变的力P作下，沿光滑地面移动距离$\triangle$，P力作的功可表为

$$W=P\triangle \qquad (a)$$



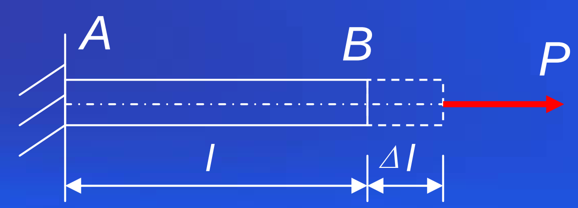
圆盘在大小与转向都不变的力偶$M=2Pr$作用下，转动的角位移为φ，力偶M作的功为

$$W=M\varphi \qquad (b)$$

上述两种情况，都是力或力偶矩在自身引起的线位移或角位移上所作的功，称为实功。

2、虚功

当作功的力或力偶与相应于力或力偶方向上的位移彼此独立无关时，这种功便称之为虚功。

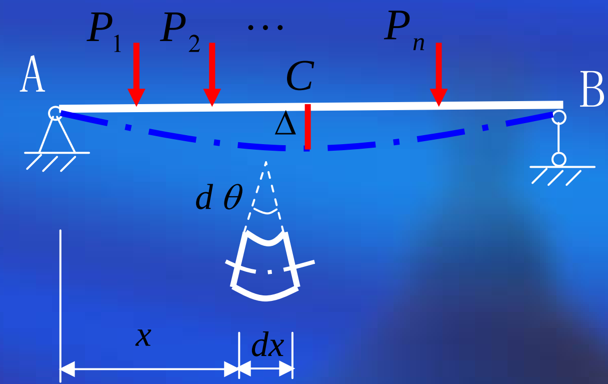


悬臂杆，P在境温度变化引起的变形$\triangle l$上作的功为：

$W=P\triangle l$ (c)

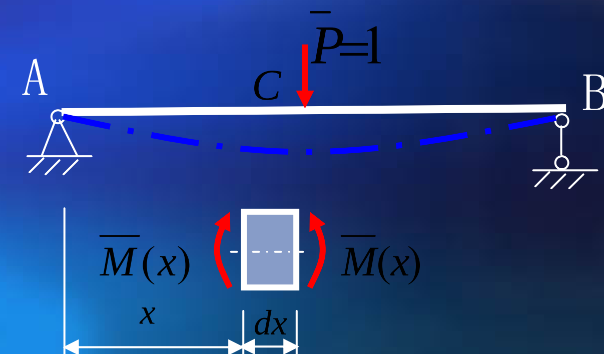
这个功就是虚功。

3 、虚功原理



简支梁在一组外力作用下，梁要产生弯曲变形，此状态称为位移状态.

同一简支梁c处作用一个单位集中



力状态中的外力沿着位移状态中相应的位移上所作的虚功，称为外虚功，用W_{ext}表示。

力状态中梁的内力沿着位移状态中相应的梁的变形上所作的虚功，称为内虚功，用W_{int}表示。

对于弹性变形体，外力所作的虚功$Wext$与内力所作的虚功$Wint$是相等的，即有

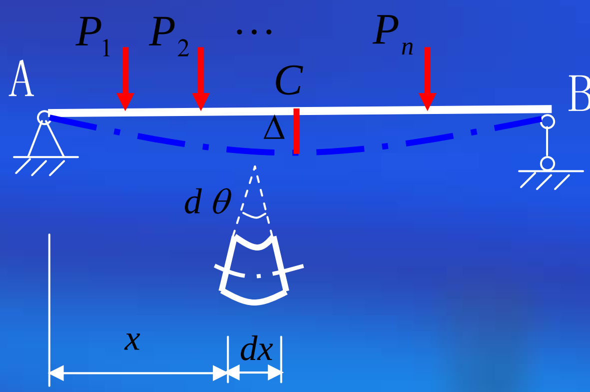
$$W_{ext}=W_{int} \quad (8.8)$$

这一原理称之为虚功原理.

二、莫尔定理

外力的虚功 $W_{ext} = \overline{P}\Delta = 1\cdot\Delta$

全梁的内虚功 $W_{int} = \int_l \overline{M}(x)d\theta$

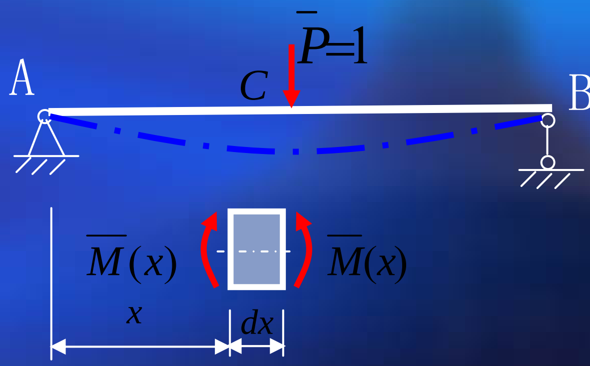


$$1\cdot\Delta = \int_l \overline{M}(x)d\theta$$

$$\Delta = \int_l \overline{M}(x)d\theta$$

利用梁的挠曲线近似微分方程

$$y'' = \frac{d\theta}{dx} = \frac{M(x)}{EI} \qquad d\theta = \frac{M(x)}{EI}dx$$

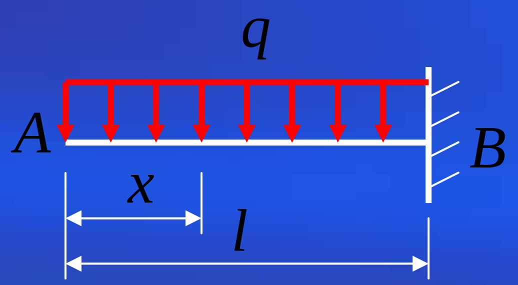


$$\boxed{\Delta = \int_l \frac{M(x)\overline{M}(x)}{EI}dx}$$

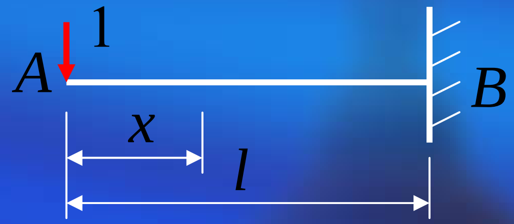
为计算梁的弯曲变形的莫尔积分公式，亦称为莫尔定理。

计算出的△值为正，△的方向与单位力的方向相同，反之则△的方向相反.

例题： 均布载荷作用下的悬臂梁，其EI为常数。试用莫尔定理计算梁端点A的挠度y_A。



解：为了计算悬臂梁A点的挠度，需要在A点作用一铅垂向下的单位集中力。



计算悬臂梁的弯矩 $M(x)$ 和 $\overline{M}(x)$

$$M(x) = -\frac{1}{2}qx^2$$

$$\overline{M}(x) = -1 \cdot x = -x$$

利用莫尔定理

$$\Delta = \int_l \frac{\overline{M}(x)M(x)dx}{EI} = \frac{1}{EI}\int_0^l (-\frac{1}{2}qx^2)(-x)dx = \frac{ql^4}{8EI}$$

计算结果为正值，表明A端挠度与所加单位力的方向相同，即向下。

$$y_A = -\Delta = -\frac{ql^4}{8EI}$$

三、图形互乘法

$$\Delta = \int_l \frac{\overline{M}(x)M(x)dx}{EI}$$

$$\int_l \overline{M}(x)M(x)dx \qquad \overline{M}(x) = kx + b$$

$$\int_l \overline{M}(x)M(x)d\chi = k\int_l xM(x) + b\int_l M(x)dx$$

$$= k\int_l xd\omega + b\int_l d\omega = k\int_l xd\omega + b\omega$$

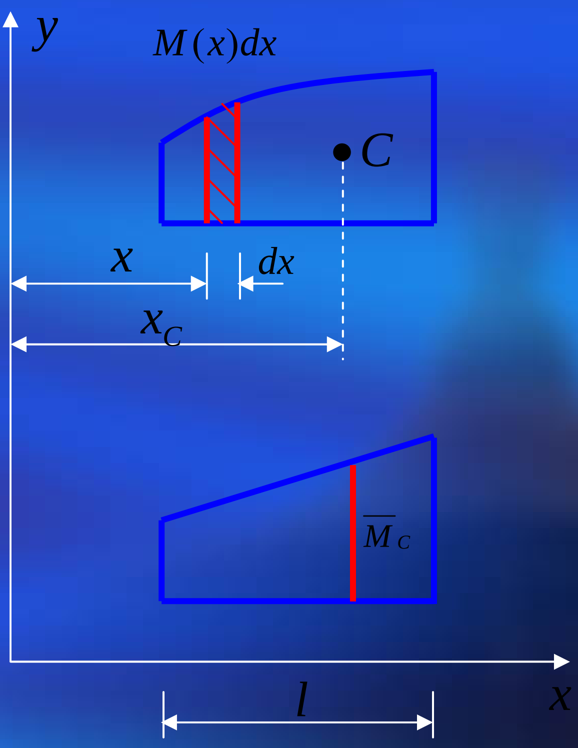
$$d\omega = M(x)dx$$

$$\int_l xd\omega = \omega x_c$$

$$\Delta = \int_l \overline{M}(x)M(x)dx = \omega(kx_c + b) = \omega\overline{M}_c$$

$$\Delta = \int_l \frac{\overline{M}(x)M(x)dx}{EI} = \frac{\omega\overline{M}_c}{EI}$$

$$\boxed{\Delta = \frac{\omega\overline{M}_c}{EI}}$$



例题：均布载荷作用下的简支梁图示，其EI为常量。试求梁中点的挠度。

解： 简支梁在均布载荷 作用下的弯矩图为二次抛物线

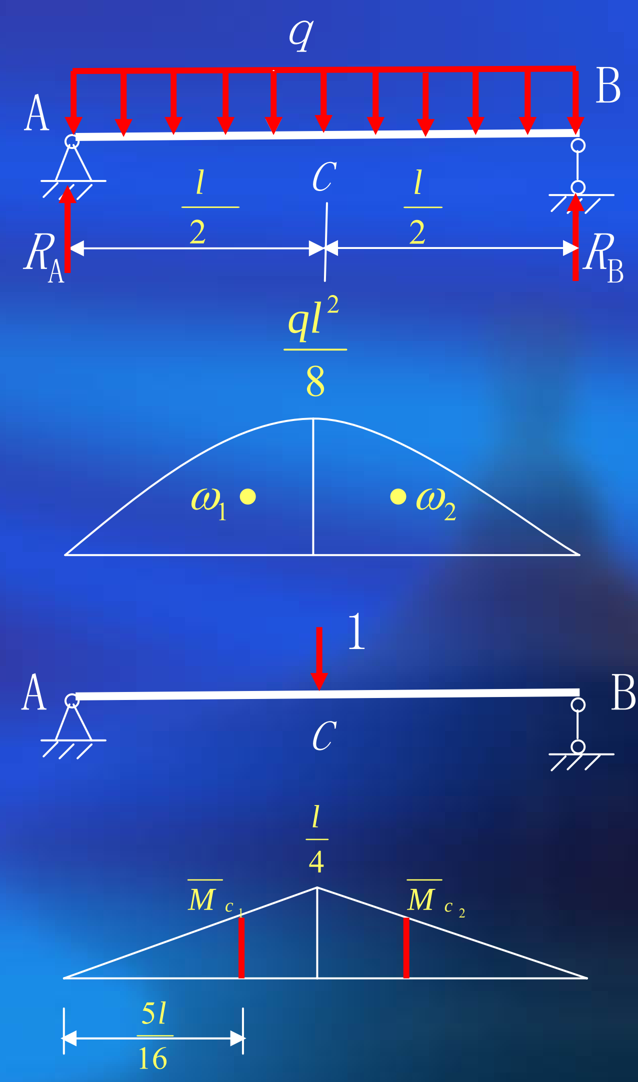
$$\omega_1=\omega_2=\frac{2}{3}\cdot\frac{ql^2}{8}\cdot\frac{l}{2}=\frac{ql^3}{24}$$

单位力作用下的图为两段直线

$$\overline{M}_{c_1}=\overline{M}_{c_2}=\frac{5}{8}\cdot\frac{l}{4}=\frac{5l}{32}$$

可求得中点C的挠度

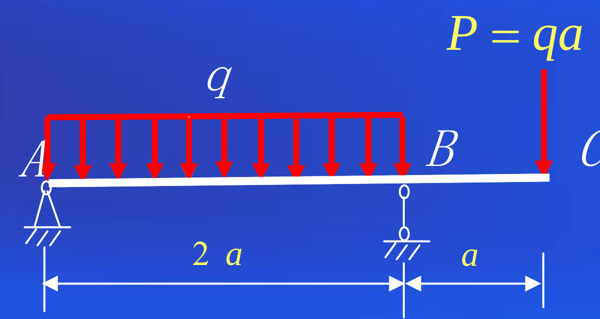
$$y_c=\frac{1}{EI}\left(\omega_1\overline{M}_{c_1}+\omega_2\overline{M}_{c_2}\right)=\frac{2}{EI}\cdot\frac{ql^3}{24}\cdot\frac{5l}{32}=\frac{5ql^4}{384EI}$$



已知： q， a, EI.

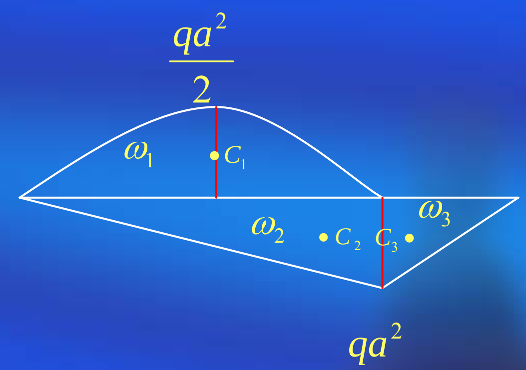
求： θ_C

解： 1 作外伸梁在载荷q作用下的弯矩图.



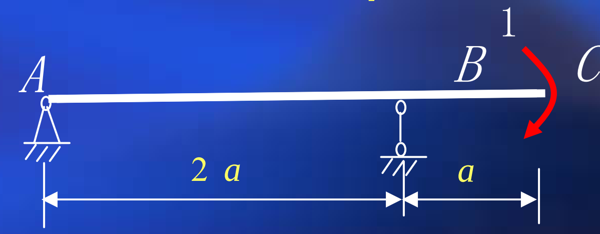
$$\omega_1 = \frac{2}{3}\cdot 2a \cdot \frac{qa^2}{2} = \frac{2qa^3}{12} \qquad \omega_2 = \frac{1}{2}\cdot 2a \cdot qa^2 = qa^3$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2}\cdot a \cdot qa^2 = \frac{qa^3}{2}$$

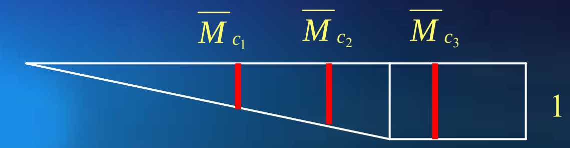


2 作外伸梁在单位载荷作用下的弯矩图.

在截面C上作用一单位力偶



$$\overline{M}_{c_1} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2} \qquad \overline{M}_{c_2} = \frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{2}{3} \qquad \overline{M}_{c_3} = 1$$



3 求 θ_C

$$\theta_c = \frac{1}{EI}\left(-\omega_1\overline{M}_{c1} + \omega_2\overline{M}_{c2} + \omega_3\overline{M}_{c3}\right)$$

$$= \frac{1}{EI}\left(-\frac{2}{3}qa^3\cdot\frac{1}{2} + qa^3\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{2}qa^3\cdot 1\right) = \frac{5qa^3}{6EI}$$