第六章　弯曲内力

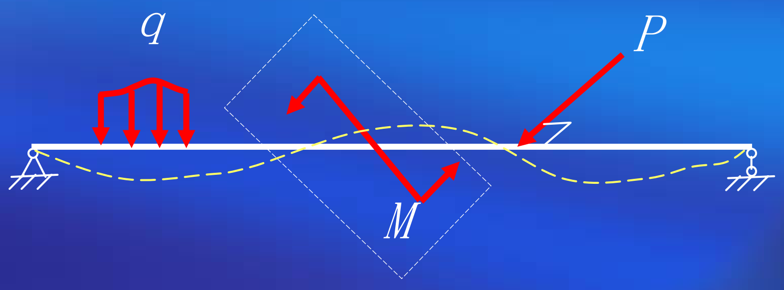
第六章　弯曲内力

§6.1 平面弯曲的概念及实例

1 工程中的弯曲问题

起重机大梁

车轴



2 弯曲的特点

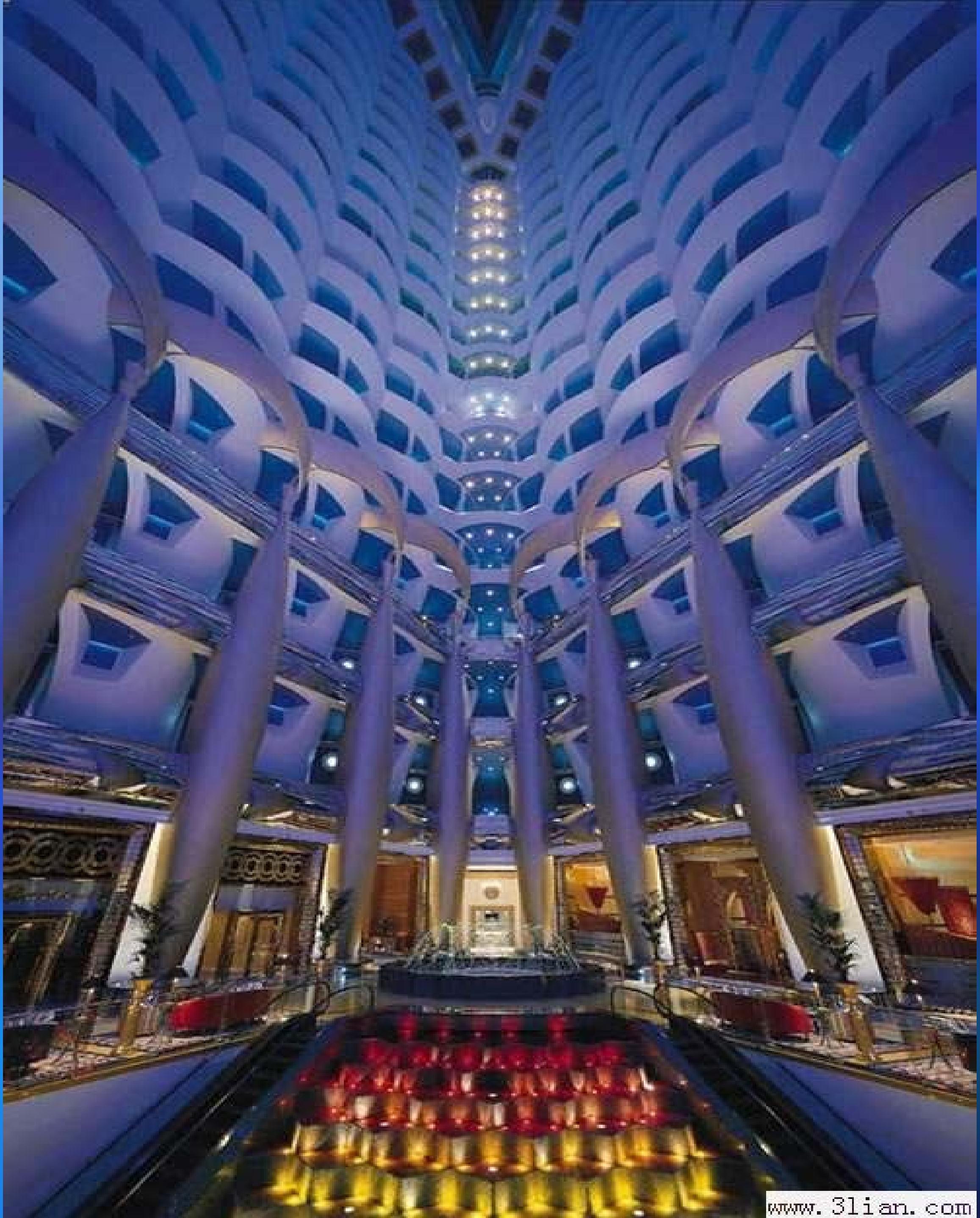
受力特点：

变形特点：

梁：以弯曲变形为主的杆件。

美国旧金山金门大桥


www.3lian.com




www.3lian.com

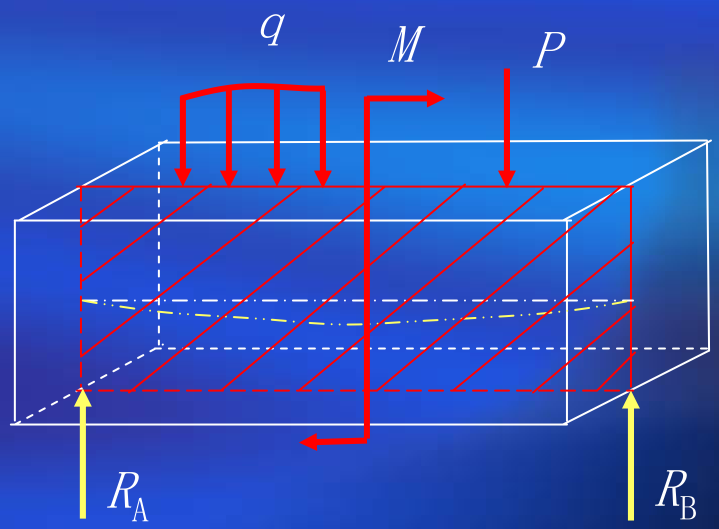
3 平面弯曲

（1）梁有一个纵向对称面；

（2）外力作用在纵向对称面内；

（3）梁的轴线在纵向对称面内

弯曲成一条平面曲线。



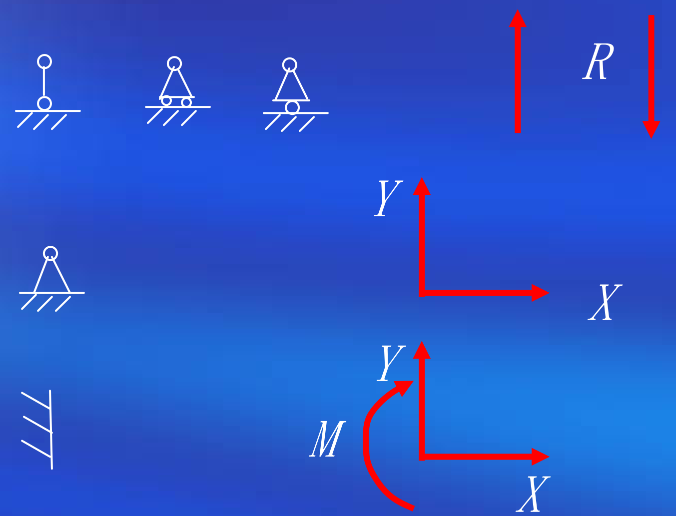
§6.2 梁的简化

一 三种约束

1 可动铰

2 固定铰

3 固定端



二 三种载荷

1 分布载荷 q

2 集中载荷 P

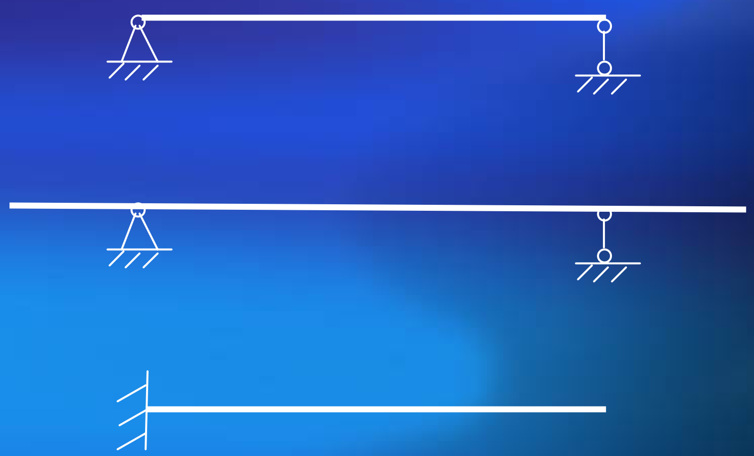
3 集中力偶 M

三 三种静定梁

1 简支梁

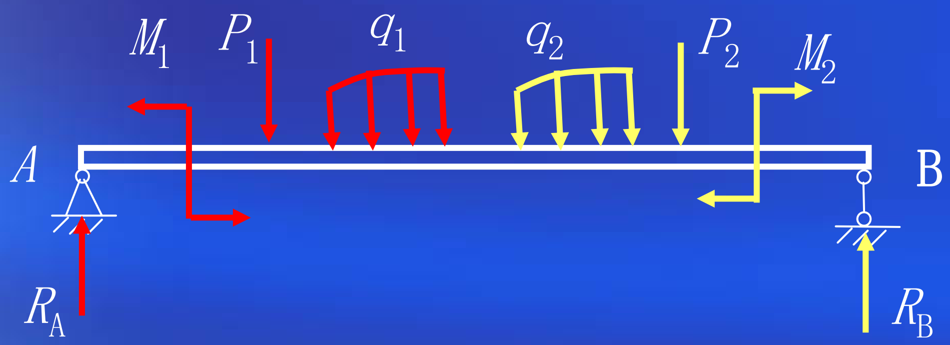
2 外伸梁

3 悬臂梁



§6.3 剪力和弯矩

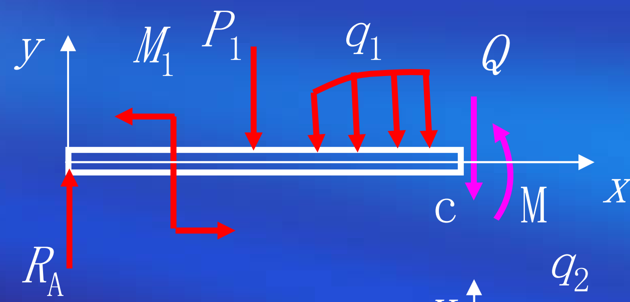
1剪力



$$\sum Y=0,\quad -Q+R_A-P_1-P_{q_1}=0$$

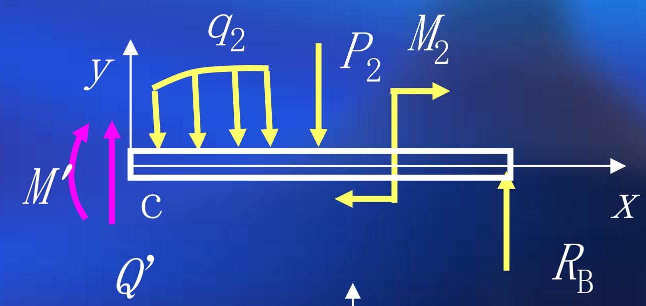
$$Q=R_A-P_1-P_{q_1}$$

$$Q=\int_A \tau dA$$ （实质上）



$$\sum Y=0,\quad Q'=-R_B+P_2+P_{q_2}$$

2 弯矩

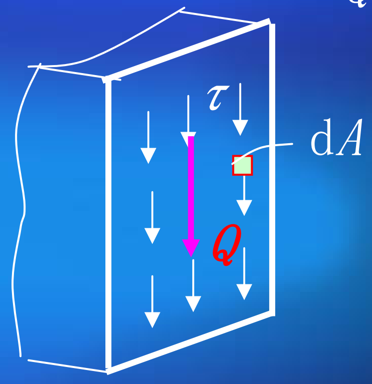


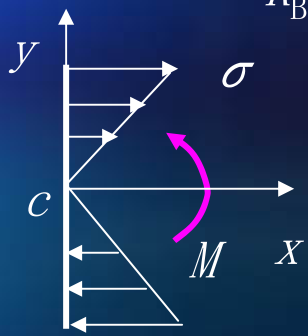
$$\sum m_c=0,\quad M-M_{R_A}+M_{P_1}+M_{q_1}+M_1=0$$

$$M=M_{R_A}-M_{P_1}-M_{q_1}-M_1$$

$$M=\int_A y\sigma dA$$ （实质上）

$$\sum m_c=0,\quad M'=M_{R_B}-M_{q_2}-M_{P_2}-M_2$$





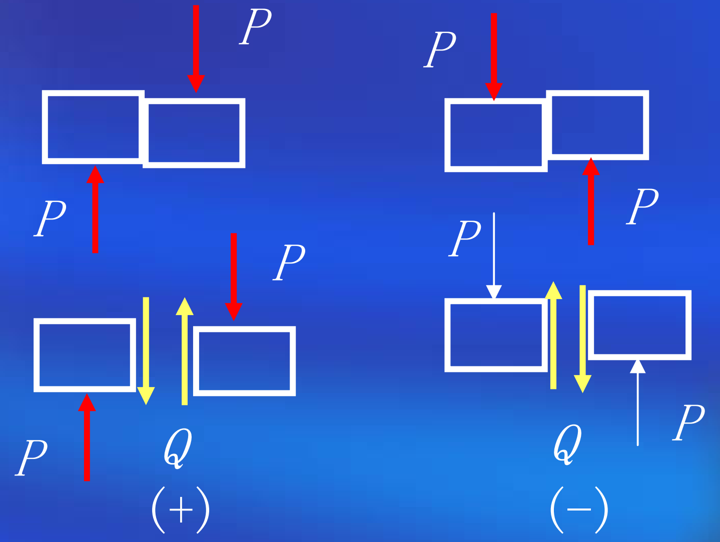
3 剪力和弯矩的符号规则

(!) 剪力的符号规则

‘左上右下，剪力为正’

左，右—外力的作用点相对于截面的位置.

上，下—外力的方向.

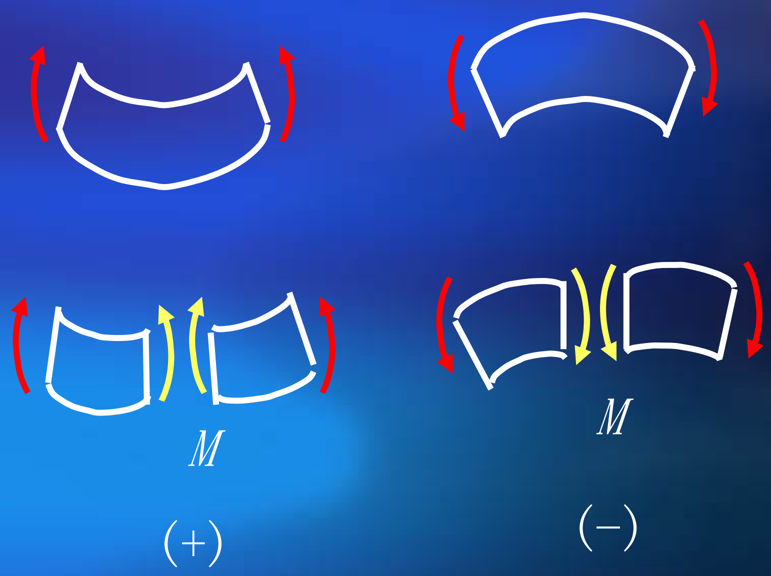


(2) 弯矩的符号规则

‘左顺右逆，弯矩为正’

左，右—外力的作用点相对于截面的位置.

顺，逆--外力对截面形心取矩的转向.



§6.4剪力方程和弯矩方程 剪力图和弯矩图

剪力方程 $Q = Q(x)$

弯矩方程 $M = M(x)$

已知：P, l

求：Q_{max}和 M_{max}

解：1 剪力方程和弯矩方程

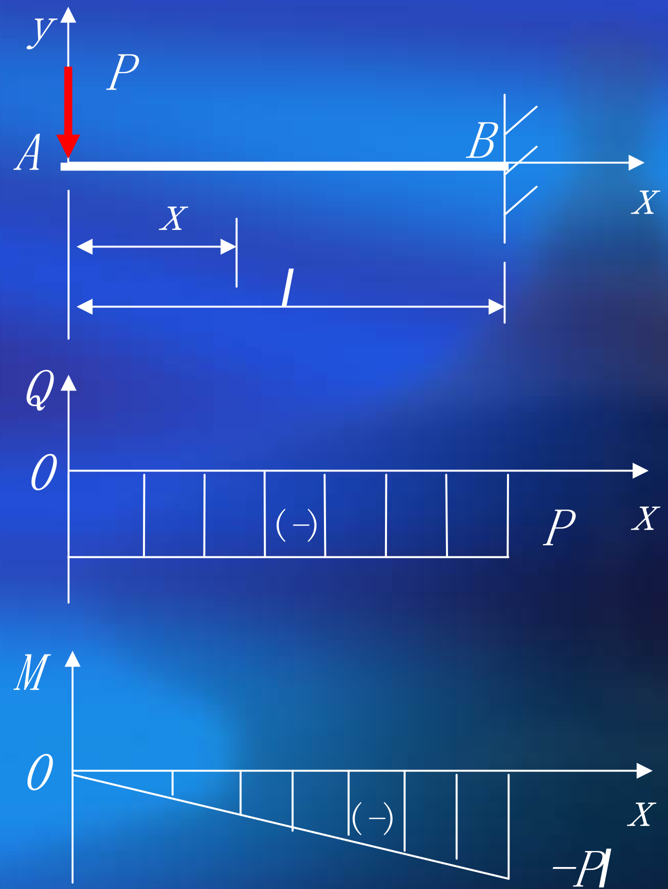
$Q(x) = -P \quad (0<x<l)$

$M(x) = -Px \quad (0<x<l)$

2 作剪力图和弯矩图

$Q_{max} = P$

$M_{max} = Pl$



已知： q ， l

求： Q_{max} 和 M_{max}

解：1 支反力

由对称性 $R_A = R_B = \frac{ql}{2}$

2 剪力方程和弯矩方程

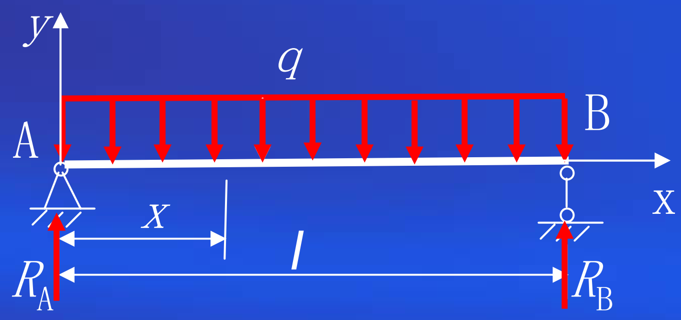
$$Q(x) = R_A - qx = \frac{ql}{2} - qx$$

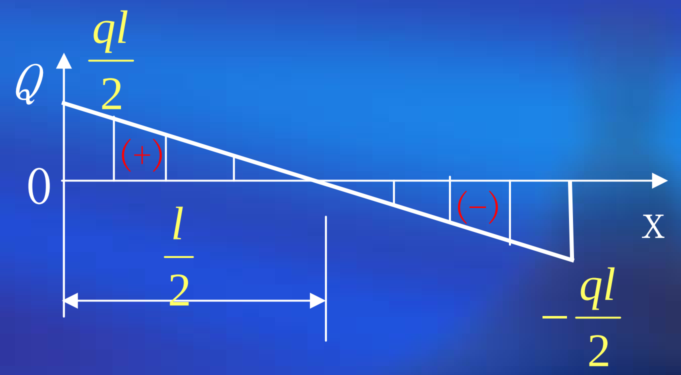
$$M(x) = R_A x - \frac{qx^2}{2} = \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2}$$

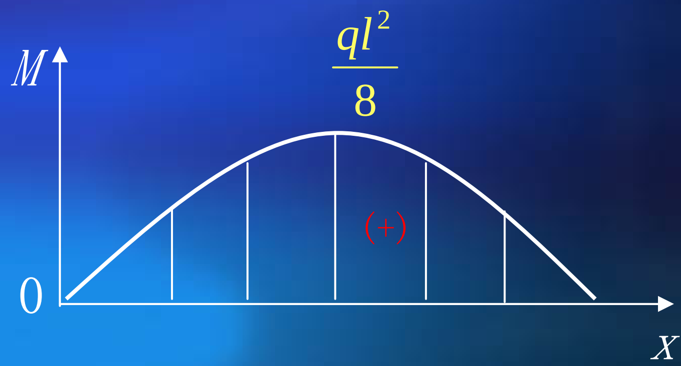
3 作剪力图和弯矩图

x	0	$\frac{l}{2}$	l
Q	$\frac{ql}{2}$	0	$-\frac{ql}{2}$
M	0	$\frac{ql^2}{8}$	0

$$Q_{max} = \frac{ql}{2} \qquad M_{max} = \frac{ql^2}{8}$$







已知： $P, l, a < b$

求： Q_{max} 和 M_{max}

解：1 支反力

$$R_A = \frac{Pb}{l} \qquad R_B = \frac{Pa}{l}$$

2 剪力方程和弯矩方程

$AC \ (0 < x_1 < a)$

$$Q(x_1) = R_A = \frac{Pb}{l} \qquad M(x_1) = R_A x_1 = \frac{Pbx_1}{l}$$

$CB \ (a < x_2 < l)$

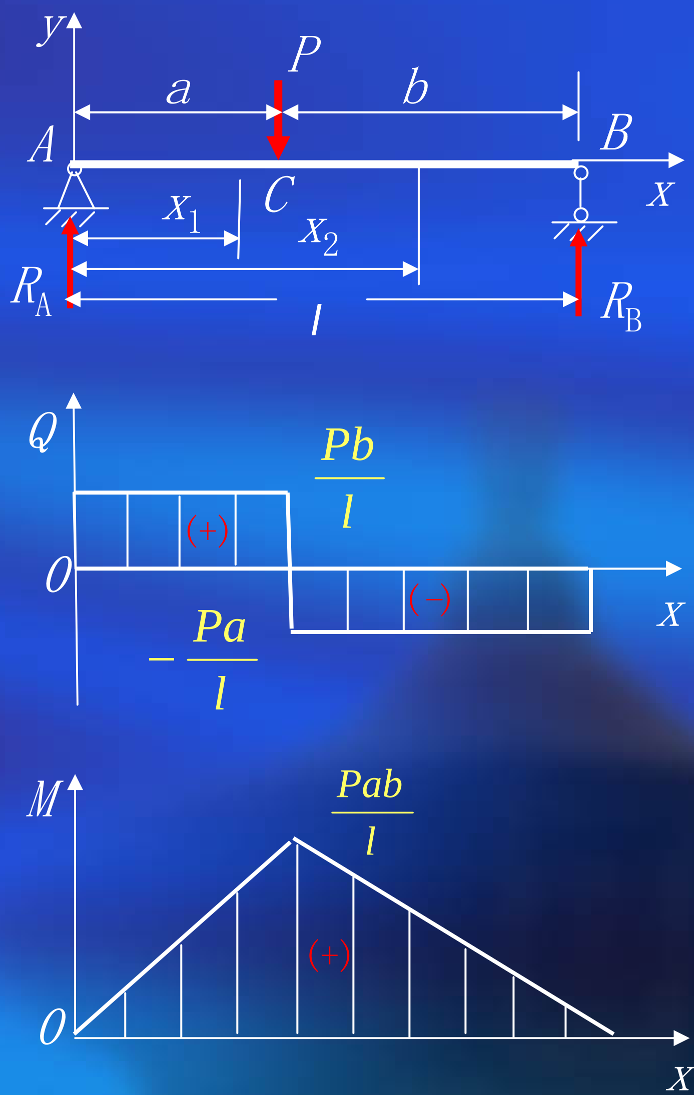
$$Q(x_2) = -R_B = -\frac{Pa}{l}$$

$$M(x_2) = R_B(l - x_2) = \frac{Pa(l - x_2)}{l}$$

3 作剪力图和弯矩图

$$Q_{max} = \frac{Pb}{l}$$

$$M_{max} = \frac{Pab}{l}$$



已知： $m, l, a<b$

求： Q_{max} 和 M_{max}

解：1 支反力

$$R_A = \frac{m}{l} \qquad R_B = -\frac{m}{l}$$

2 剪力方程和弯矩方程

$AC \ (0 < x_1 < a)$

$$Q(x_1) = R_A = \frac{m}{l} \qquad M(x_1) = R_A x_1 = \frac{m x_1}{l}$$

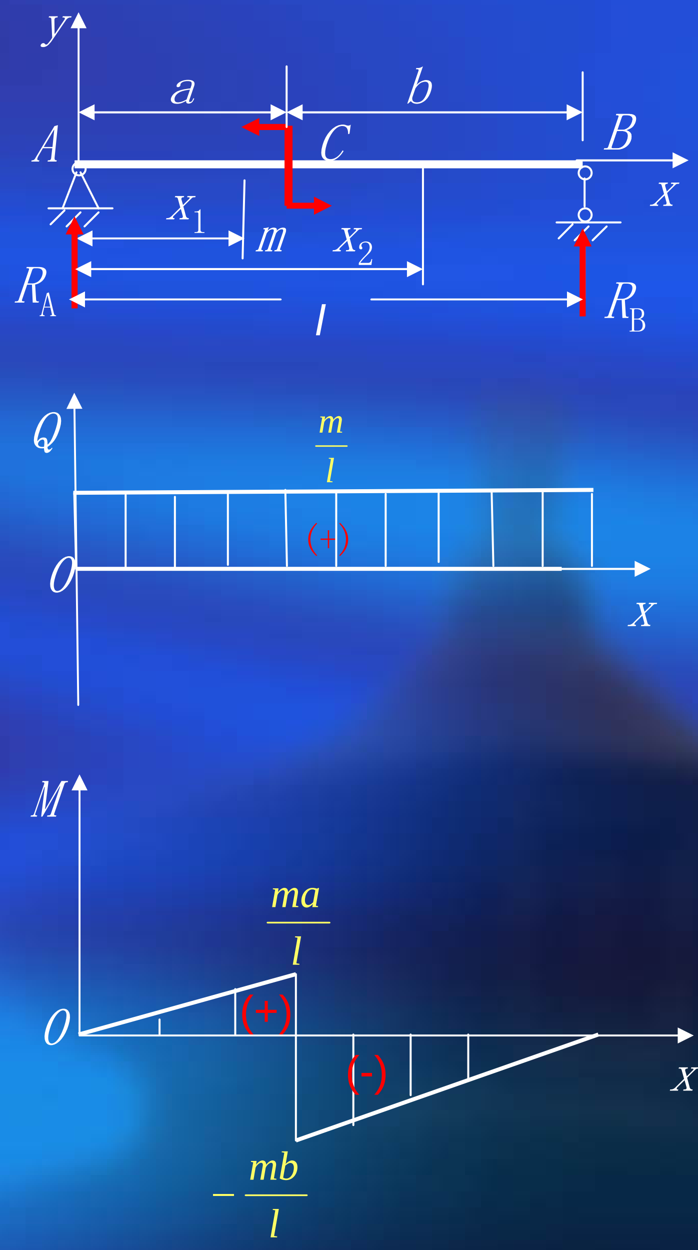
$CB \ (a < x_2 < l)$

$$Q(x_2) = -R_B = \frac{m}{l}$$

$$M(x_2) = R_B(l - x_2) = -\frac{m(l - x_2)}{l}$$

3 作剪力图和弯矩图

$$Q_{max} = \frac{m}{l} \qquad M_{max} = \frac{mb}{l}$$



已知： q , l

求： 内力图

解： 刚架：有刚节点的框架.

刚节点：具有力和力矩的约束的连接.

1 求支反力

$\Sigma X = 0 \quad ql - H_A = 0$

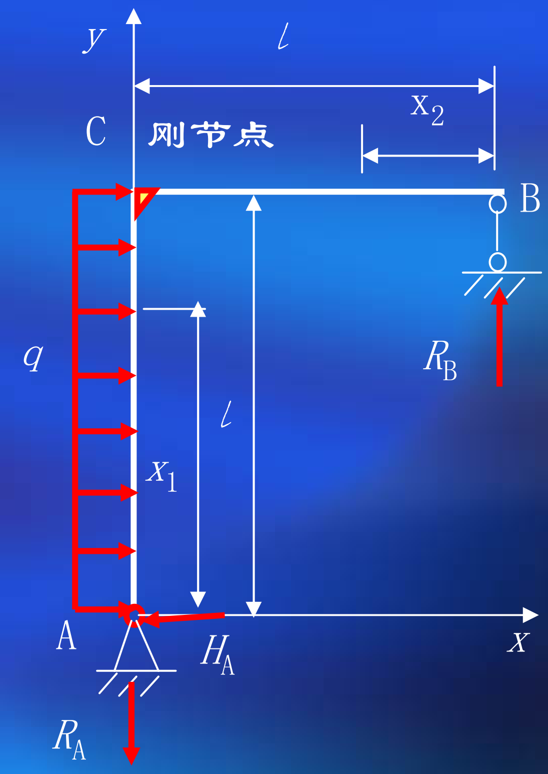
$H_A = ql$

$$\Sigma m_A = 0 \quad R_B l - \frac{ql^2}{2} = 0$$

$$R_B = \frac{ql}{2}$$

$\Sigma Y = 0 \quad R_B - R_A = 0$

$$R_A = R_B = \frac{ql}{2}$$



2 内力方程

AC段（ $0<x_1<l$ ）

$$N(x_1) = R_A = \frac{ql}{2}$$

$$Q(x_1) = H_A - qx_1 = ql - qx_1$$

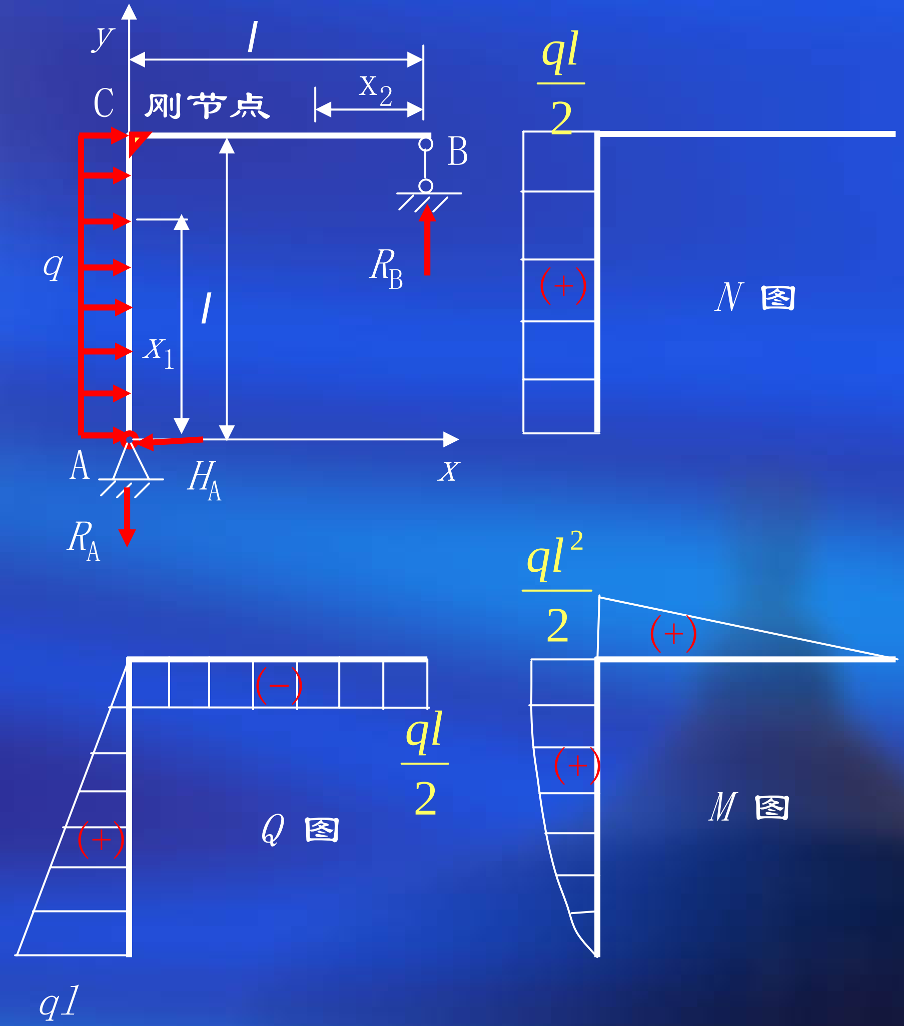
$$M(x_1) = H_A x_1 - \frac{qx_1^2}{2} = qlx_1 - \frac{qx_1^2}{2}$$

CB段（ $0<x_2<l$ ）

$$N(x_2) = 0$$

$$Q(x_2) = -R_B = -\frac{ql}{2}$$

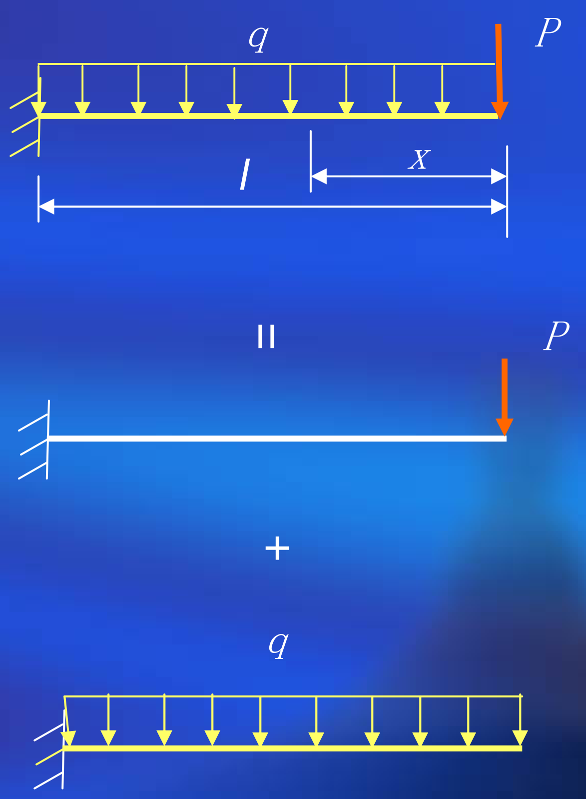
$$M(x_2) = R_B x_2 = \frac{qlx_2}{2}$$



3 内力图

$$N_{max} = \frac{ql}{2} \qquad Q_{max} = ql \qquad M_{max} = \frac{ql^2}{2}$$

§6.5用叠加法作弯矩图



叠加原理：

$$M = M_1 + M_2 + \cdots + M_n = \sum M_i$$

例如图示悬臂梁总弯矩

P单独作用 $M_1 = -Px$

q单独作用 $M_2 = -\frac{q}{2}x^2$

总弯矩 $M = M_1 + M_2 = -Px - \frac{q}{2}x^2$

已知：$P,\ q,$ l,C为中点

求：M_C

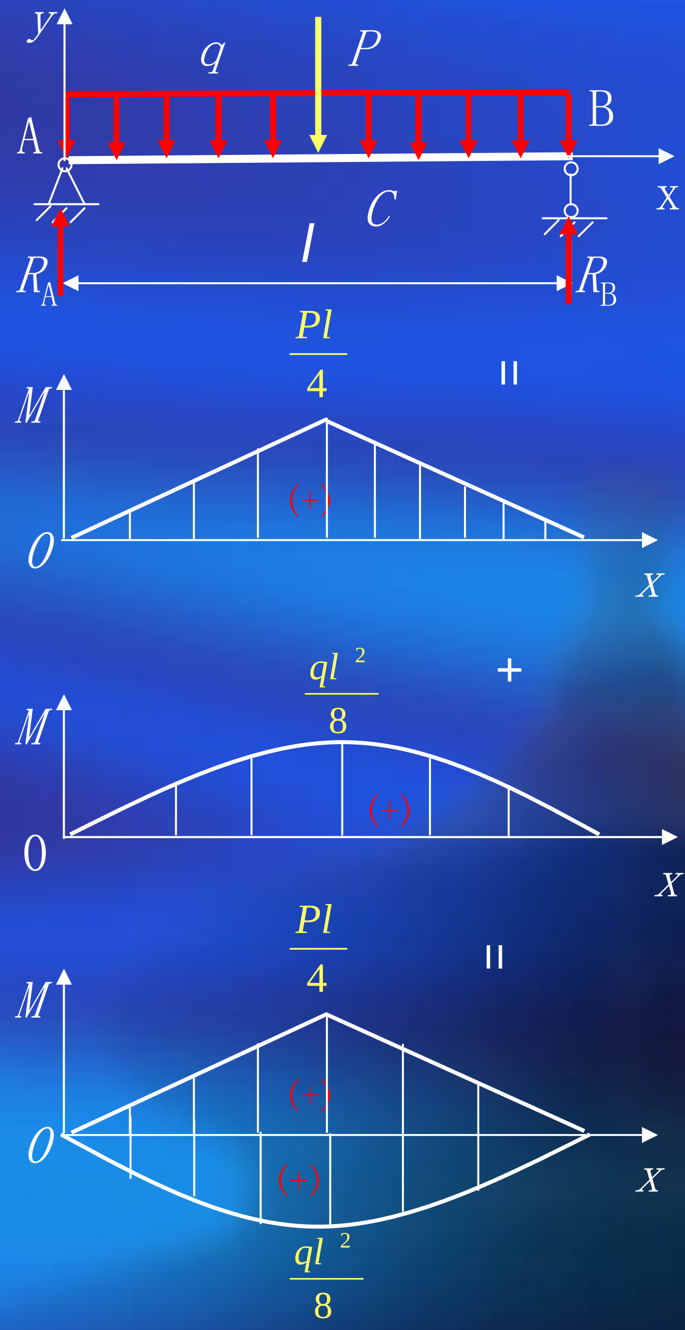
解：

P单独作用 $M_{cP}=\dfrac{Pl}{4}$

q单独作用 $M_{cq}=\dfrac{ql^2}{8}$

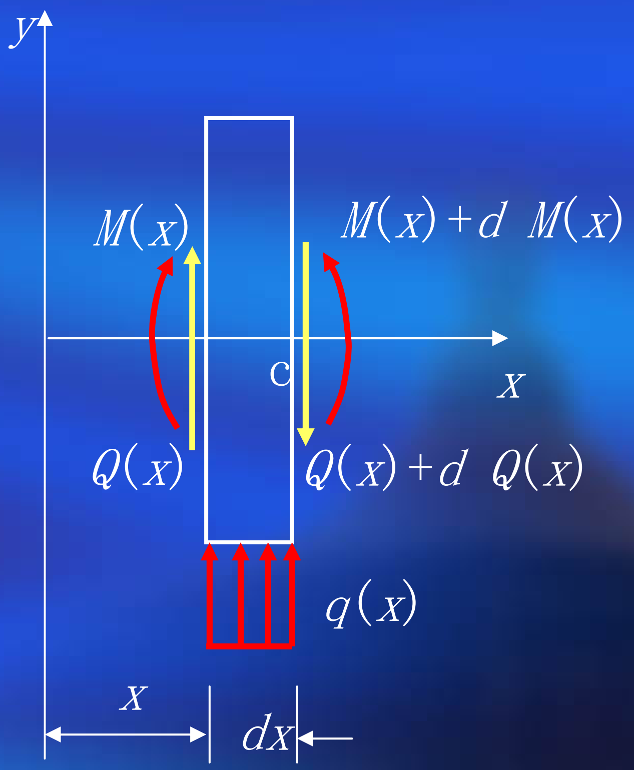
$P,\ q$共同作用

$$M_C=M_{cP}+M_{cq}=\frac{Pl}{4}+\frac{ql^2}{8}$$



§6.6载荷集度、 剪力和弯矩之间的微分关系

1 q，Q和M之间的微分关系



$\Sigma Y=0$,

$$Q(x)-[Q(x)+\mathrm{d}Q(x)]+q(x)\,\mathrm{d}x=0$$

$$\frac{dQ(x)}{dx}=q(x)$$

$\Sigma m_c=0$,

$$-M(x)+[M(x)+dM(x)]-Q(x)dx-\frac{q(x)(dx)^2}{2}=0$$

$$\frac{q(x)(dx)^2}{2}\to 0$$

$$\frac{dM(x)}{dx}=Q(x) \qquad \frac{d^2M(x)}{dx^2}=q(x)$$

2 利用q、Q和M之间的微分关系绘制和校核剪力图和弯矩图

(1) $q(x)=0$

$$\frac{dQ(x)}{dx}=q(x)=0 \qquad Q(x)=c$$

水平线或与x轴重合

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2}=q(x)=0 \qquad M(x)=ax+b$$

斜直线$Q>0$ /，$Q<0$ \

(2) $q(x)=c$

$$\frac{dQ(x)}{dx}=q(x)=q$$

$$Q(x)=ax+b$$

斜直线$q>0$ /，$q<0$ \

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2}=q(x)=q$$

$$M(x)=ax^2+bx+c$$

抛物线$q>0$ $\cup$，$q<0$ $\cap$

(3) Q=0（或Q图变号）处

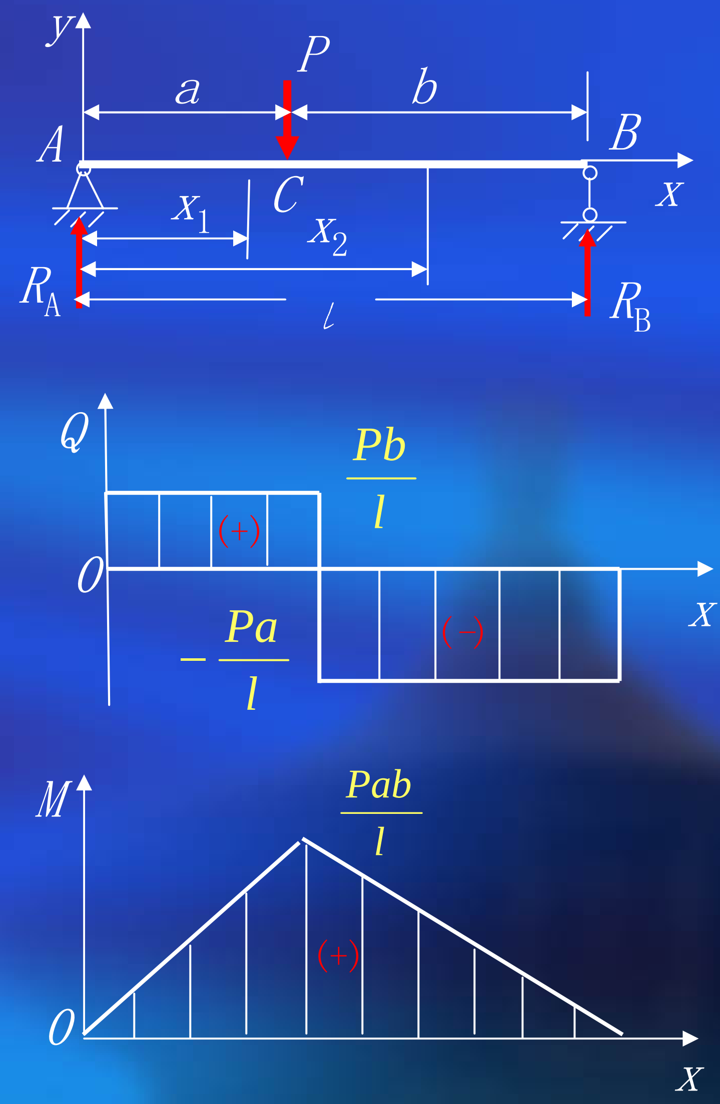
$M'(x)$=0处弯矩M取得极值

(4) 在集中力作用处，剪力图有突变，变化数值等于集中力，弯矩图突变成尖点。

在集中力偶作用处，弯矩图有突变，变化数值等于集中力偶。

(5) M_{max}可能发生处：Q=0、集中力或集中力偶作用处。

(6) M=0处：无集中力偶作用的端面铰或自由端。



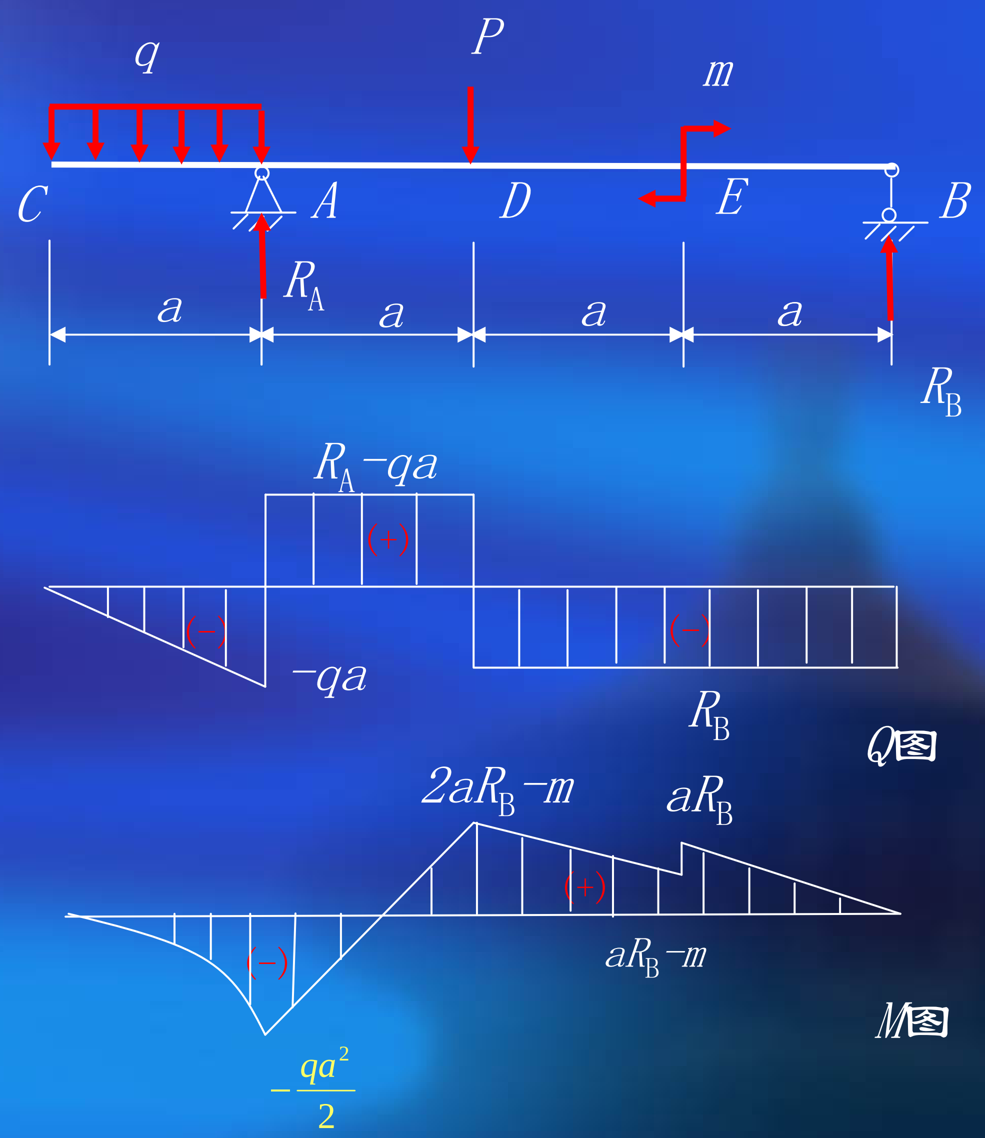
已知： q P m a

求：剪力图和弯矩图

解：1 求反力

R_A R_B

2 利用微分关系作图



作业

- 6.6(b)(f)
- 6.9
- 6.10 (b)(f)
- 6.11(e)
- 6.12(b)
- 6.13(b)