



# 第十章 组合变形



# 第十章 组合变形

## § 10.1 组合变形和叠加原理

### 一 组合变形

构件在载荷作用下所发生的变形，包括两种以上的基本变形形式，有时几种基本变形形式对应的应力（变形），属于同数量级而不能忽略其中任何一种。称为组合变形。

### 二 叠加原理的叠加条件

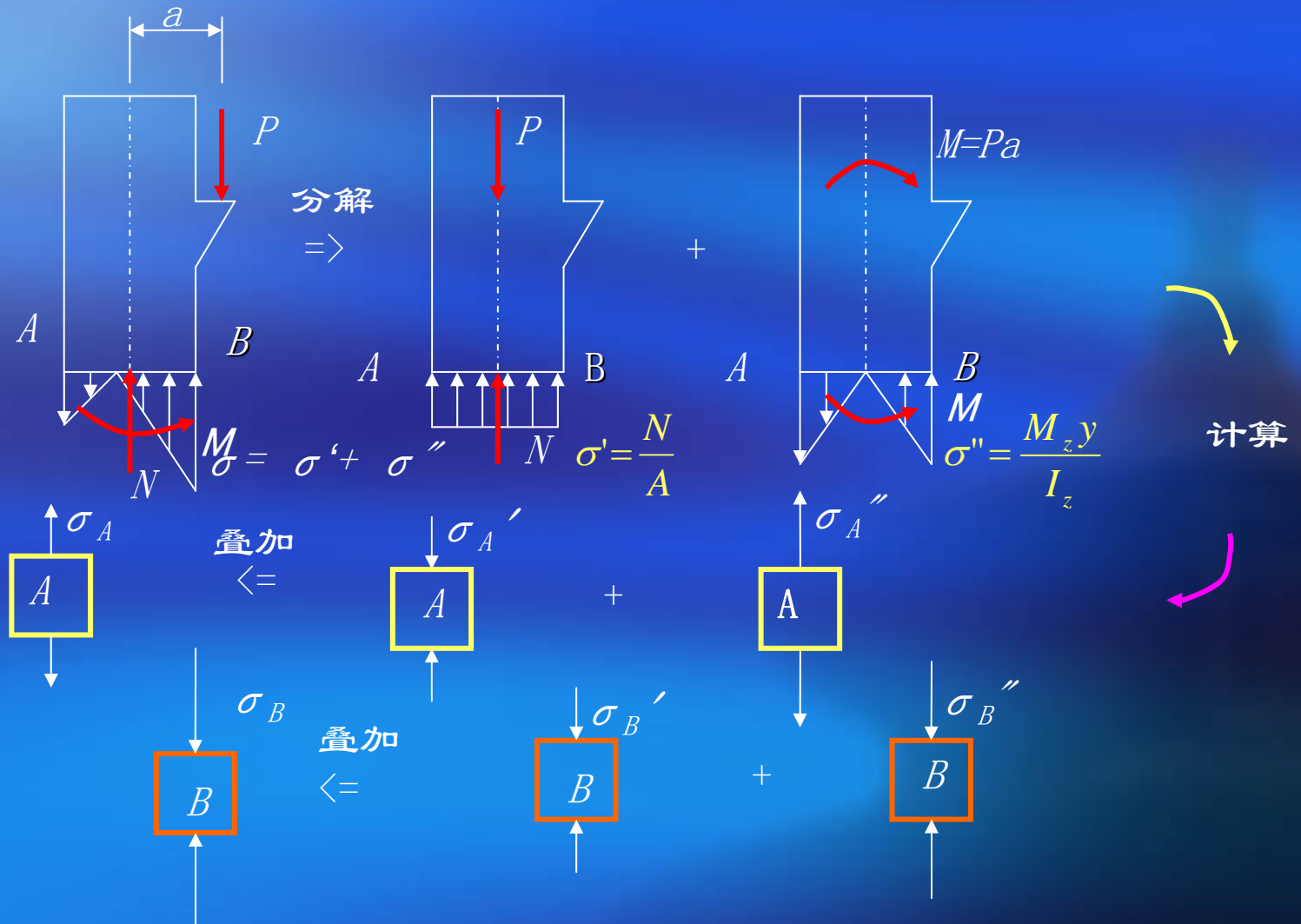
- 1 位移、应力、应变、内力与外力成齐次线性系。
- 2 材料服从胡克定律。
- 3 保证小变形条件。

# 三 组合变形时的应力叠加法

1 分解

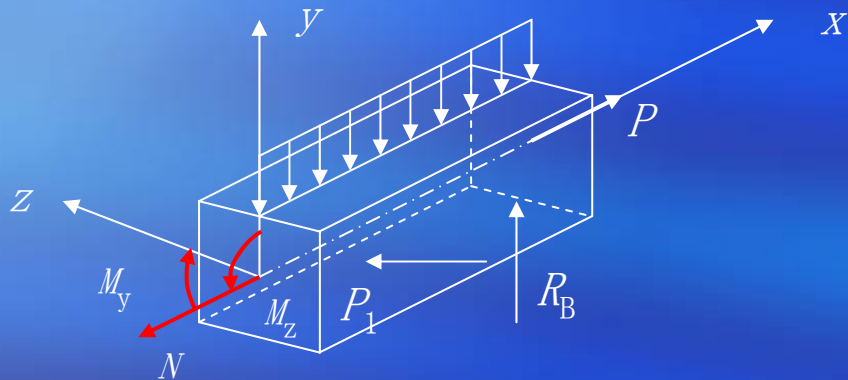
2 计算

3 叠加

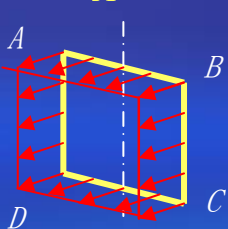


## § 10.2 拉伸和压缩与弯曲的组合

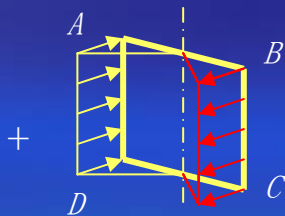
六个内力分量  $N$ 、 $M_y$ 、 $M_z$ 、 $Q_y$ 、 $Q_z$ 、 $T$ 。当  $T=0$ ， $Q_y$ 、 $Q_z$  不属于同数量级时成为  $N$ 、 $M_y$ 、 $M_z$  的组合。



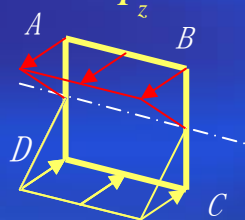
$$\sigma' = \frac{N}{A}$$



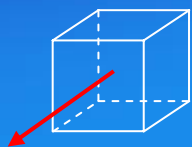
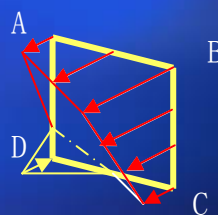
$$\sigma'' = \frac{M_y z}{I_y}$$



$$\sigma''' = \frac{M_z y}{I_z}$$

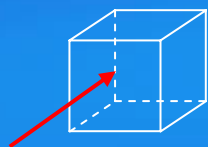


$$\sigma = \sigma' + \sigma'' + \sigma'''$$



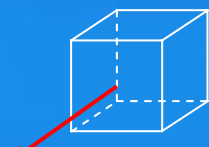
$$\sigma'_A$$

+



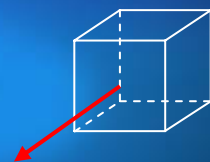
$$\sigma''_A$$

+



$$\sigma'''_A$$

=



$$\sigma_A = \sigma'_A + \sigma''_A + \sigma'''_A$$

## 组合应力

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_t \\ \sigma_c \end{array} \right\} = \frac{N}{A} \pm \frac{M_y z}{I_y} \pm \frac{M_z y}{I_z}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{t \max} \\ \sigma_{c \max} \end{array} \right\} = \frac{N}{A} \pm \frac{M_y}{W_y} \pm \frac{M_z}{W_z}$$

## 强度条件

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]$$

或者

$$\sigma_{t \max} \leq [\sigma_t]$$

$$\sigma_{c \max} \leq [\sigma_c]$$

注：1 对于只在一个平面内发生弯曲（如XY平面）

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_t \\ \sigma_c \end{array} \right\} = \frac{N}{A} \pm \frac{M_z y}{I_z}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{t \max} \\ \sigma_{c \min} \end{array} \right\} = \frac{N}{A} \pm \frac{M_z}{W_z} \begin{cases} \leq [\sigma_t] \\ \leq [\sigma_c] \end{cases}$$

2 若无N, 则成为斜弯曲

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_t \\ \sigma_c \end{array} \right\} = \pm \frac{M_y z}{I_y} \pm \frac{M_z y}{I_z}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{t \max} \\ \sigma_{c \min} \end{array} \right\} = \pm \frac{M_y}{W_y} \pm \frac{M_z}{W_z} \begin{cases} \leq [\sigma_t] \\ \leq [\sigma_c] \end{cases}$$

已知：钢槽板  $b=8\text{cm}$ ,  $\delta=1\text{cm}$ ,  $r=1\text{cm}$ ,  $P=80\text{kN}$ ,  $[\sigma]=140\text{MPa}$ 。

求：校核钢板的强度。

解：
$$e = \frac{b}{2} - \frac{b-\delta}{2} = 0.5\text{cm}$$

$$N = P = 80\text{kN}$$

$$M = Pe = 400\text{Nm}$$

$$\sigma' = \frac{P}{A} \quad \sigma'' = \frac{My}{I_z} = \frac{Pe y}{I_z}$$

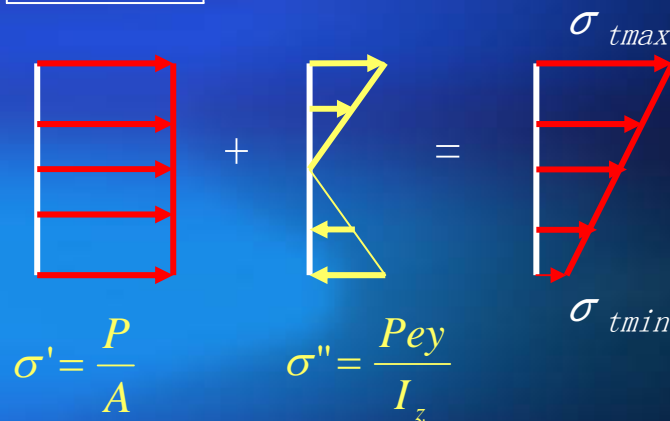
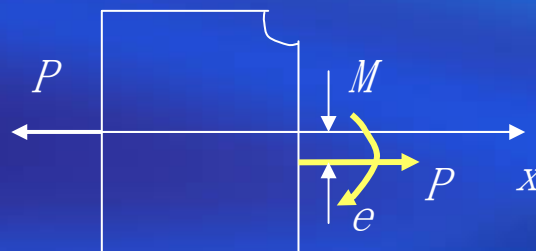
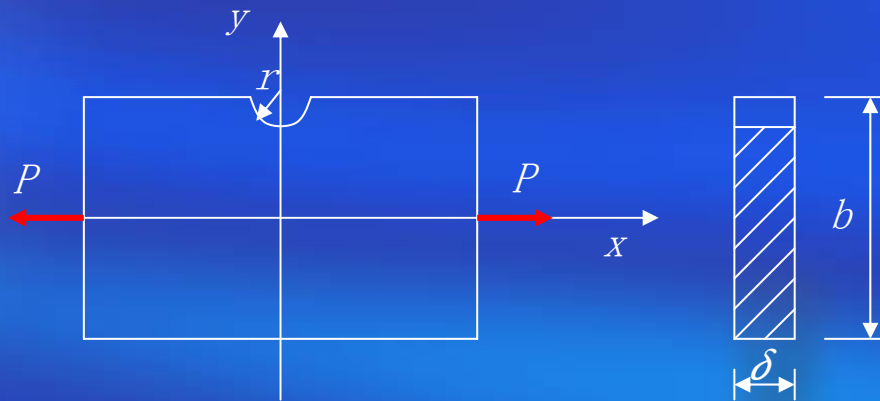
$$\sigma_{t\max} = \frac{P}{A} + \frac{My}{I_z} = \frac{P}{A} + \frac{M}{W_z}$$

$$= \frac{P}{\delta(b-r)} + \frac{6Pe}{\delta(b-r)^2}$$

$$= 114.3 + 49$$

$$= 163.3\text{MPa} > [\sigma]$$

强度不够



讨论：

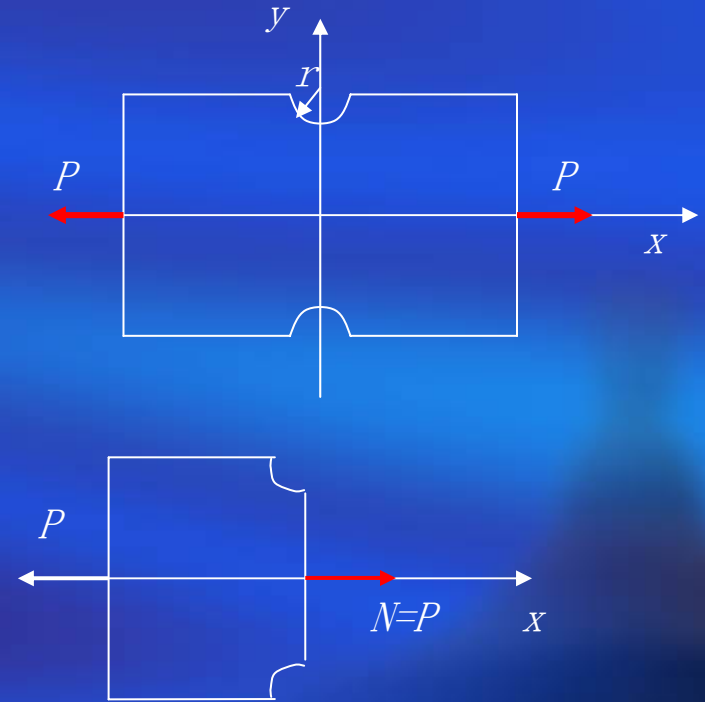
若在对称位置开  $r=1\text{cm}$  缺口

$$P = N$$

$$\sigma = \frac{P}{A_1} = \frac{P}{\delta(b-2r)}$$

$$= 133.3\text{MPa}$$

强度够了。



## § 10.3 扭转与弯曲的组合

六个内力分量  $N$ 、 $M_y$ 、 $M_z$ 、 $Q_y$ 、 $Q_z$ 、 $T$ 。当  $N=0$ ， $Q_z$ 、 $Q_y$  不属于同数量级时，成为  $T$ 、 $M_y$ 、 $M_z$  的组合。

### 一 内力的计算

$$\sum m = 0, \quad m = \frac{P_t D}{2} = T$$

在  $XZ$  平面

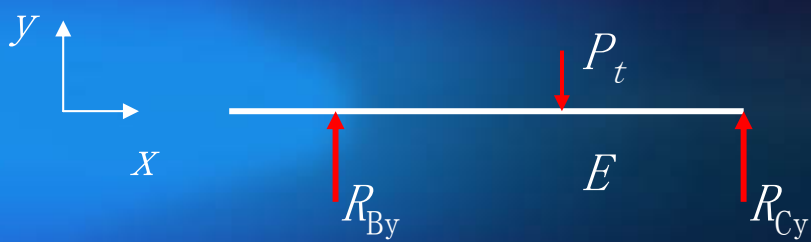
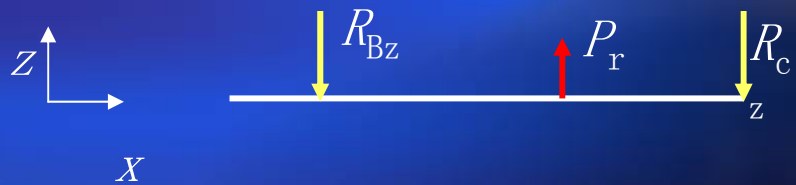
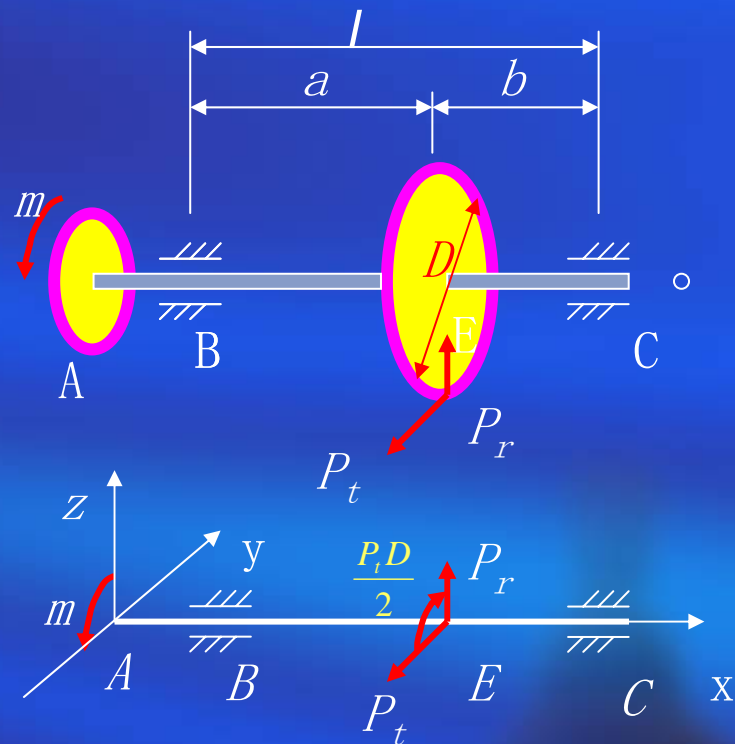
$$\sum m_C = 0, \quad R_{Bz} l - P_r b = 0 \quad R_{Bz} = \frac{P_r b}{l}$$

$$\sum m_B = 0, \quad R_{Cz} l - P_r a = 0 \quad R_{Cz} = \frac{P_r a}{l}$$

在  $XY$  平面

$$\sum m_C = 0, \quad R_{By} l - P_t b = 0 \quad R_{By} = \frac{P_t b}{l}$$

$$\sum m_B = 0, \quad R_{Cy} l - P_t a = 0 \quad R_{Cy} = \frac{P_t a}{l}$$



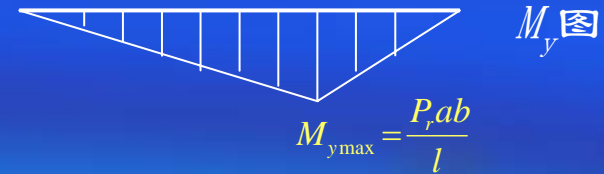
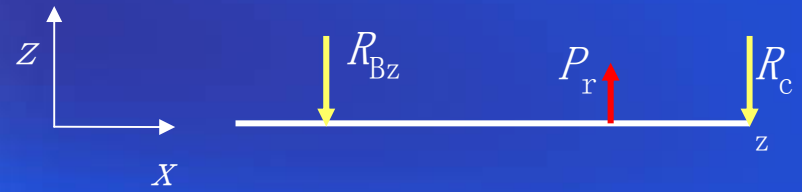


## 二 作内力图

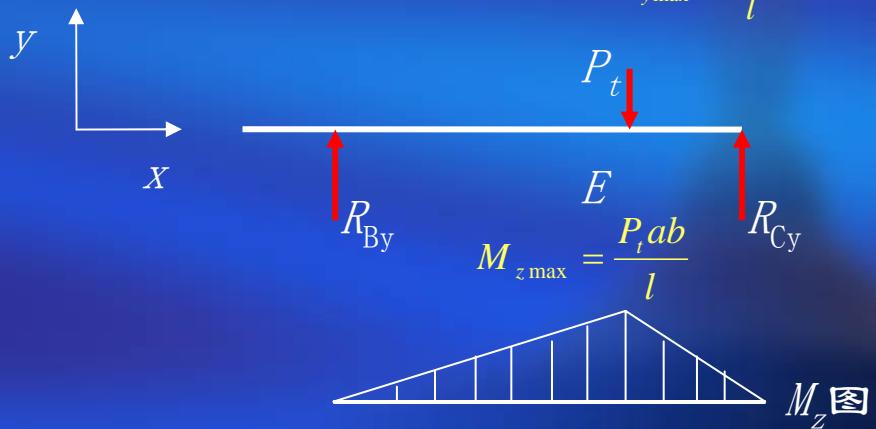
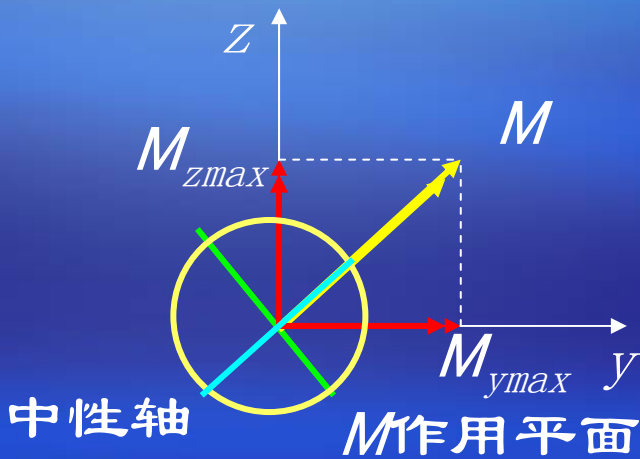
$$M_{y \max} = \frac{P_r ab}{l}$$

$$M_{z \max} = \frac{P_t ab}{l}$$

$$T = \frac{P_t D}{2}$$

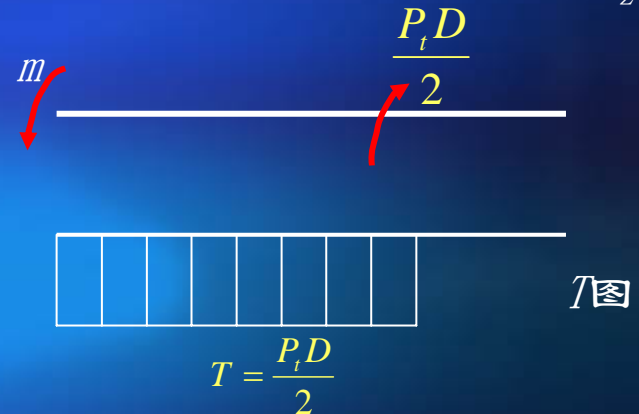


## 三 合成弯矩, 确定危险截面



$$M = \sqrt{M_{y \max}^2 + M_{z \max}^2} = \frac{ab}{l} \sqrt{P_r^2 + P_t^2}$$

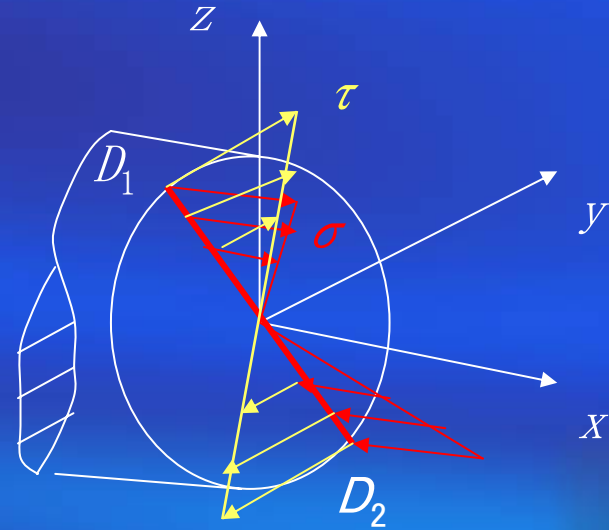
判定E为危险截面



#### 四 计算应力, 确定危险点.

$$\tau = \frac{T}{W_t}$$

$$\sigma = \frac{M}{W}$$

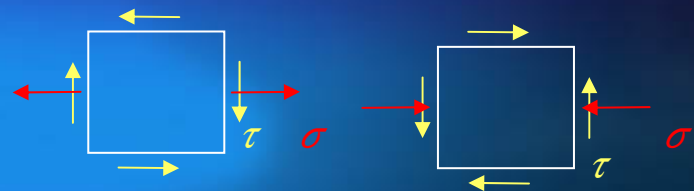
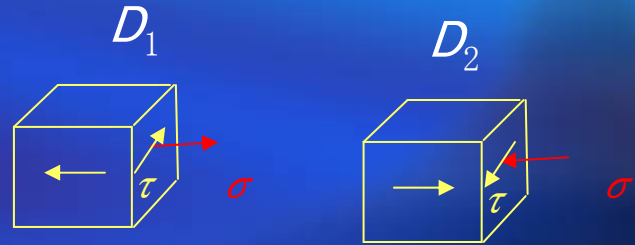


$D_1, D_2$  两点为危险点

$D_1$  点主应力为

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1 \\ \sigma_3 \end{array} \right\} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$= \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$



## 五 建立强度条件

$$(1) \quad \sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma]$$

把主应力代入

$$(2) \quad \sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$$

对圆形截面

$$W_t = 2W$$

$$\sigma = \frac{M}{W}$$

$$\tau = \frac{T}{W_t} = \frac{T}{2W}$$

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\left(\frac{M}{W}\right)^2 + 4\left(\frac{T}{2W}\right)^2} \leq [\sigma]$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\left(\frac{M}{W}\right)^2 + 3\left(\frac{T}{2W}\right)^2} \leq [\sigma]$$

$$(3) \quad \sigma_{r3} = \frac{1}{W} \sqrt{M^2 + T^2} \leq [\sigma]$$

$$\sigma_{r4} = \frac{1}{W} \sqrt{M^2 + 0.75T^2} \leq [\sigma]$$

适用范围：

- 1 公式(1)适用于任何应力状态,任何截面.
- 2 公式(2)适用于平面应力状态,任何截面.
- 3 公式(3)适用于平面应力状态,圆形截面.

## 六 非圆截面弯扭组合

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$$

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$$

已知：A, B两轮有相同直径 $D=1m$ 及重量 $P=5kN$ . 圆轴直径 $d=75mm$ , 许用应力 $[\sigma]=70MPa$ .

求：校核轴的强度.

解： 1 作内力图

$$M_{yC}=2.1kNm \quad M_{zC}=1.5kNm$$

$$M_{yB}=1.05kNm \quad M_{zB}=2.25kNm$$

$$T=1.5kNm$$

2 合成弯矩, 确定危险截面.

$$M_c = \sqrt{2.1^2 + 1.5^2} = 2.58kNm$$

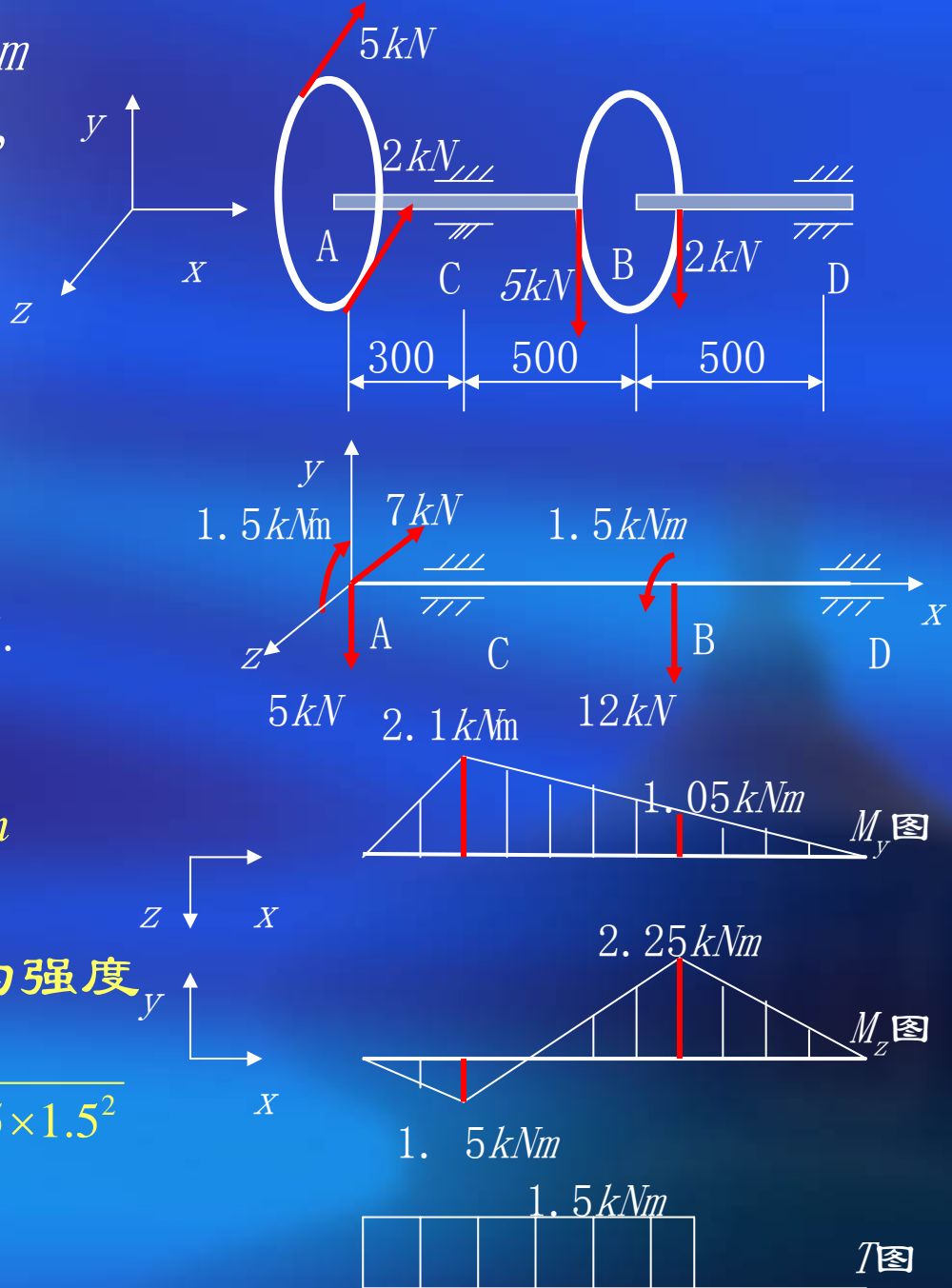
$$M_B = \sqrt{1.05^2 + 2.25^2} = 2.48kNm$$

C截面为危险截面.

3 按第四强度理论校核轴的强度

$$\begin{aligned} \sigma_{r4} &= \frac{1}{W} \sqrt{M_c^2 + 0.75T^2} \\ &= \frac{1}{\pi \times 0.075^3 \times 10^{-9}} \sqrt{2.58^2 + 0.75 \times 1.5^2} \\ &= 69.7MPa < [\sigma] \end{aligned}$$

轴强度满足要求.



- 作业
- 10.9
- 10.10
- 10.16
- 10.20