上半连续集值优化解在图像逼近意义下的稳定性 *

夏顺友 [1,2†] 胥德平 [3]

摘要 给出上半连续集值映射优化问题在图像拓扑逼近意义下的本质弱有效解和本质有效解的概念. 利用通有稳定性研究的 usco 方法，证明了上半连续集值映射优化问题. 在图像拓扑逼近意义下，弱有效解映射在定义域和映射同时扰动下是紧值上半连续的，从而是通有下半连续的，即在 Baire 纲意义下，绝大多数上半连续集值映射优化问题，在图像逼近意义下其弱有效解是稳定的，或者说是本质的. 证明了上半连续集值映射优化问题在图像逼近意义下有效解映射上半连续的一个充要条件，也即是有效解通有稳定的一个重要条件.

关键词 上 (下) 半连续，(弱) 有效解，本质 (弱) 有效解，通有连续
中图分类号 O224
数学分类号 74Pxx

The Stability of the Solutions of Optimization Problem for Set-Valued Maps with Upper Semi-continuity Under Graphic Approximate

XIA Shunyou[1,2†] XU Deping[3]

Abstract In this paper, we first introduce the essential efficient solutions and the weakly essential efficient solutions of the optimization problem for upper semi-continuity maps with set-value under the approximate condition of graphic topology. Second, by using the *usco* researching approach of generic stability, the upper semi-continuity and compact properties of the weakly efficient solutions maps of this optimization problem are proved with the trembles of domain and map. Under the approximate condition of graphic topology, then it is generic lower semi-continuous. That is to say, in the sense of *Baire Category,* weakly efficient solutions maps of *"most"* this optimization problems are generic stability(i.e. essential) under the approximate condition of graphic topology. Last, we prove a necessary and sufficient condition of upper semi-continuity of the efficient solutions maps of this optimization problem.

Keywords upper(lower)-semi-continuity, (weakly) efficient solution, essential (weakly) efficient solution, generic continuity

---

收稿日期： 2011 年 6 月 8 日.
* 国家自然科学基金 (NO:70661001)
1. 贵州大学计算机科学与信息学院，贵阳，550025; College of Computer Science and Information, Guizhou University, Guiyang 550025, China
2. 贵州师范学院数学与计算机科学学院，贵阳， 550018; Department of Mathematics and Computer, Guizhou Normal College, Guiyang 550018, China
3. 成都理工大学数学地质四川省重点实验室，成都，610059; Key Laboratory of Geomathematics of Sichuan Province, Chengdu University of Technology, Chengdu 610059, China
† 通讯作者 Corresponding author

Chinese Library Classification O224
2010 Mathematics Subject Classification 74Pxx

0 引 言

文 [1] 研究了有限维向量值优化问题有效解映射的通有连续性. 但有效解映射未必总是上半连续的 (见文 ([2] 中例 2.1). 文 [2] 给出了有限维向量优化问题有效解映射上半连续的一个充分必要条件等，这些结果都是在一致拓扑意义下的，而且是关于有限维空间上的向量单值函数的优化问题.

1 预备知识

例设 $X=[-1,1]$, 在 X 上定义集值映射如下：

$$F(x)=\begin{cases}-1, & x\in[-1,0];\\ [-1,1], & x=0;\\ 1, & x\in(0,-1];\end{cases}\qquad F_n(x)=\begin{cases}-1, & x\in\Big[-1,-\dfrac{1}{n}\Big];\\ \sin\dfrac{n\pi x}{2}, & x\in\Big[-\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\Big];\\ 1, & x\in\Big(\dfrac{1}{n},1\Big].\end{cases}$$

当 $n\to\infty$ 时，关于一致度量

$$\rho_X(F,G)=\sup_{x\in X}H_d(F(x),G(x)),$$

F_n 不可能收敛到 F.

事实上 F 和 F_n 不仅不能按一致度量 ρ_X 逼近，连逐点逼近也是不能满足的，因为在 $x=0$ 处， $F_n(0)=0$, 而 $F(0)=[-1,1]$. 但是， F_n 关于 F 具有某种收敛性，若从图像上看就一目了然. 这种逼近有比较普遍意义，如上半连续集值映射的逼近连续选择就只被证明有这种情形的逼近连续选择，而不可能像下半连续映射那样具有度量 ρ_X 意义下的逼近连续选择.

对于上半连续集值优化映射所构成的集合，引入图像收敛性作为该空间的拓扑结构，进而研究映射与定义域同时变化时的稳定性.

设 2^X 是紧度量空间 X 的所有非空紧子集构成的集族， 2^X 中赋予了 Hausdorff 度量诱导的拓扑， Y 是紧致度量线性空间， K 是 Y 中内部非空的尖闭凸锥. $K_0(Y)$ 是 Y 的所有非空闭子集构成的集族. $P_0(Y)$ 是 Y 的所有非空子集构成的集族.

定义 1.1[3] 称集值映射 $F:X\to P_0(Y)$ 在点 $x_0\in X$ 处上半连续 ($u.s.c.$), 若对 Y 中包含 $F(x_0)$ 的每个开集 U, 即 $F(x_0)\subset U$, 存在 x_0 的邻域 V, 使得

$$F(x)\subset U,\forall x\in V\quad(\text{或}F(V)\subset U).$$

若 F 在任意一点 $x_0\in X$ 处 $u.s.c.$, 则称 F 在 X 上上半连续 ($u.s.c.$).

称集值映射 $F:X\to P_0(Y)$ 在点 $x_0\in X$ 处下半连续 ($l.s.c.$), 若对 Y 中与 $F(x_0)$ 交非空的每个开集 U, 即 $F(x_0)\cap U\neq\phi$, 存在 x_0 的邻域 V, 使得

$$F(x) \cap U \neq \phi, \forall x \in V$$

若 F 在任意一点 $x_0 \in X$ 处 $l.s.c.$, 则称 F 在 X 上下半连续 $(l.s.c.)$.

若 F 在任意一点 $x_0 \in X$ 处 $u.s.c.$ 且 $l.s.c.$, 则称 F 在 X 上连续.

记 M 是上半连续集值映射 $F : A \to K_0(B), B \in P_0(Y)$ 构成的集合，其中 $A \in 2^X$. 则对任意 F 考虑关于锥 K 的一个优化问题： $\min\limits_{x \in A} F(x)$

定义 M 上的度量为

$$\rho(F_1, F_2) = H_d(Gr(F_1), Gr(F_2)), \forall (F_1, F_2) \in M$$

其中 d 为 Y 上的度量， $Gr(F_1), Gr(F_2)$ 分别表示 F_1, F_2 的图像， H_d 是由 d 诱导的 Hausdorff 度量. M 中的拓扑由度量 ρ 产生.

定义 1.2[5] 如果存在 $y_0 \in F(x_0)$, 使得

$$(F(x) - y_0) \cap (-K \backslash \{0\}) = \phi, \forall x \in A.$$

则称 $x_0 \in A$ 是 F 的有效解， F 的所有有效解构成的集合记为 $S(F)$. 其中 y_0 称为 F 在集合 $F(A) = \bigcup\limits_{x \in A} F(x)$ 上的有效点，集合 $F(A)$ 的所有有效点构成的集合记为 $E_0(F(A))$.

如果存在 $y_0 \in F(x_0)$, 使得 $(F(x) - y_0) \cap (-intK) = \phi, \forall x \in A$, 则称 $x_0 \in A$ 是 F 的弱有效解， F 的所有弱有效解构成的集合记为 $S_W(F)$. 其中 y_0 称为 F 在集合 $F(A) = \bigcup\limits_{x \in A} F(x)$ 上的弱有效点，集合 $F(A)$ 的所有弱有效点构成的集合记为 $WE_0(F(A))$.

注 $S(F) \subset S_W(F)$, $E_0(F(A)) \subset WE_0(F(A))$.

定义 1.3 称 $x \in S(F)$ 是 $F \in M$ 的一个本质有效解，如果对 x 的任意邻域 U, 存在 M 中一个邻域 V, 使得 $U \cap S(F') \neq \phi, \forall F' \in V$. 若 F 的所有有效解都是本质的，则称 F 是 $E-$ 本质的或 $E-$ 稳定的.

称 $x \in S_W(F)$ 是 $F \in M$ 的一个本质弱有效解，如果对 x 的任意邻域 U, 存在 M 中的一个邻域 V, 使得 $U \cap S_W(F') \neq \phi, \forall F' \in V$. 若 F 的所有弱有效解都是本质的，则称 F 是 $WE-$ 本质的或 $WE-$ 稳定的.

用 $E(F)$ 、 $E_W(F)$ 分别表示 F 的本质有效解集、本质弱有效解集.

注 $E(F) \subset S(F)$, $E_W(F) \subset S_W(F), E(F) \subset E_W(F)$.

引理 1.4[4] 度量空间 (Y, d) 完备当且仅当其闭集族空间 $(K_0(Y), H_d)$ 完备；紧集族 2^Y 在空间 $(K_0(Y), H_d)$ 中为闭集族，故完备.

引理 1.5[5] 集值映射 $F : A \to K_0(Y)$ 是上半连续的，当且仅当 F 闭，即 $Gr(F)$ 为闭集.

从而 $S(F)$, $S_W(F)$ 都非空.

引理 1.6[6] X 是 Hausdorff 拓扑空间， Y 是度量空间，则从 X 到 Y 的紧值上半连续集值映射 F 的连续点构成 X 的剩余集 Q. 进一步，若 X 为完备度量空间或 Baire 空间，则 Q 还是稠密的. 此时称 F 是通有连续的.

引理 1.7[1] S (S_W) 在 M 上是下半连续的，当且仅当对每一个 $F \in M$, F 都是 $E-(WE-)$ 本质的. 若 $S(S_W)$ 在 M 上是上半连续的，则 $S(S_W)$ 在 M 上是连续的当且仅当对每一个 $F \in M$, F 是 $E-(WE-)$ 本质的.

引理 1.8[1] 设 $A_n \in 2^X(n=1,2,...)$, $A \in 2^X$, $A_n \to A$, 则

①若开集 $G \supset A$, 则 $\exists N$, 使得 $\forall n \geqslant N$, $G \supset A_n$;

②若 $x_n \in A_n(n=1,2,...), x_n \to x$, 则 $x \in A$;

③若 $x' \in A$, 则对 x' 的任意开邻域 G', 存在 N', 使得 $\forall n \geqslant N'$, $G' \cap A_n \neq \phi$;

④ $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \cup A \in 2^X$.

2 主要结果

引理 2.1 (M,ρ) 是完备的度量空间.

证明 设 $\{F_n\}, n=1,2,...$ 是 M 中的柯西列，其中 $F_n: A_n \to 2^{B_n}$,$\{A_n\}$, $\{B_n\}$ 分别是 X 中紧子集列. 由 $\{F_n\}$ 为 M 中的柯西列，得知其图像 $Gr(F_n)$ 成为 $2^{X\times Y}$ 中一柯西列. 由引理 1.4 得知，存在紧集 $D^2 \in 2^{X\times Y}$ 使得

$$Gr(F_n) \xrightarrow{H_d} D^2.$$

设 A 为 D^2 在 X 上的投影集合， B 是 D^2 在 Y 上的投影集合，如下定义映射 $F: A \to 2^B$:

$$F(x) = \{y \in B | (x,y) \in D^2\}, \forall x \in A$$

则 $Gr(F) = D^2$ 且 $F_n \xrightarrow{\rho} F$. 由于 $Gr(F) = D^2$ 紧，得知 $Gr(F) = D^2$ 闭，由引理 1.5 得 F 是上半连续且是闭值的. 即 $F \in M$, 从而 (M,ρ) 是完备的.

引理 2.2 $F \in M$,S_W 在 F 处是紧值上半连续的.

证明 先证 S_W 是紧值的.

对任意 $F \in M$,$\{x_n\}, n=1,2,...$ 是 $S_W(F)$ 中任意点列，由于 A 是紧集，则有 A 中子列收敛，不妨设 $x_n \to x \in A$, 由弱有效解定义，可取 $y_n \in f(x_n)$ 满足

$$(F(A) - y_n) \cap (-intK) = \phi. \tag{2.1}$$

由于 $F(A)$ 是紧集，从而 $\{y_n\}$ 在其中有收敛子列，不妨设 $y_n \to y$. 由于 F 在 x 处是上半连续的，从而 $y \in F(x)$. 若 $x \notin S_W(F)$, 则有

$$(F(A) - y) \cap (-intK) \neq \phi,$$

于是存在 $y' \in F(A)$, 使得

$$y' - y \in -intK,$$

即

$$y - y' \in intK,$$

即

$$y \in y' + intK.$$

注意到 $y'+intK$ 是开集，因此存在 N, 当 $n>N$ 时，

$$y_n \in y'+intK,$$

即

$$y'-y_n \in -intK,$$

与 (2.1) 矛盾. 所以 $x\in S_W(F)$. 从而 $S_W(F)$ 闭. 又由于 A 是紧的，故 $S_W(F)$ 紧.

再证 S_W 是上半连续的. 假设 S_W 不是上半连续的, 则存在 $F\in M$ 及开集 $U\supset S_W(F)$, 对任意 M 中的 $F_n\to F$, 都存在 $x_n\in S_W(F_n)$ 使得 $x_n\notin U$, 从而 $x_n\in S_W(F)$.

由于 $x_n\in S_W(F_n)$, 故存在 $y_n\in F_n(x_n)$, 使得

$$(F_n(A_n)-y_n)\cap(-intK)=\phi.$$

从而 $(x_n,y_n)\in Gr(F_n)$. 再由 $F_n\xrightarrow{\rho}F$ 知，$Gr(F_n)\xrightarrow{H_d}Gr(F)$. 由引理 1.8 知，$\{(x_n,y_n)\}$ 存在聚点 $(x,y)\in Gr(F)$, 于是 $x\in S_W(F)$. 但是由 $x_n\notin U, n=1,2,...$ 得 $x\notin U$. 产生矛盾，因此 S_W 是上半连续的.

推论 2.3 $S_W(F),\forall F\in M$ 都是闭的.

证明 由引理 2.2 证明过程立得.

定理 2.4 存在 M 的一个稠密剩余集 Q, 使得 S_W 在 Q 上下半连续，即 S_W 是通有连续的，或者说对每一个 $F\in Q$ 都是 $WE-$ 本质的. 即在 Baire 纲意义下绝大多数上半连续集值优化问题的弱有效解是 $WE-$ 稳定的. 也即在 Baire 纲意义下绝大多数上半连续集值优化问题的弱有效解都是 $WE-$ 本质的.

证明 由引理 2.1 、引理 2.2 、引理 1.6 、引理 1.7 立得.

定理 2.5 S 在 $F\in M$ 处上半连续，当且仅当 $S(F)=S_W(F)$.

证明 必要性，假设 $S(F)\neq S_W(F)$, 由于 $S(F)\subset S_W(F)$, 则存在 $x^*\in S_W(F)$, 但 $x^*\notin S(F)$. $y^*\in F(x^*)$, $y^*\in WE_0(F(X))$, 则对任意 $y'\in F(x^*), y'\in E_0(F(X))$.

设 $\beta(y)=\frac{1}{1+d(y,y*)},\forall y\in Y$, 则 β 在 Y 上连续，且当 $y=y^*$ 时， $\beta(y)=\beta(y^*)=1$, 当 $y\neq y^*$ 时， $\beta(y)<1$. 取定某个向量 $\in intK$, 对每个 $n\in N$ 定义 $F_n\in M$ 为

$$F_n(x)=\Big\{y_n\in Y:\ y_n=y-\frac{1}{n}\beta(y), y\in F(x)\Big\},\quad \forall x\in X.$$

下证 $x^*\in S(F_n)$.

事实上，若 $x^*\notin S(F_n)$, 则 $\forall y_n^*\in F_n(x^*),\exists x_0\in X$ 及 $y_0\in F_n(x_0)$, 使得

$$y_0-y_n^*\in(-K/\{0\}),$$

且

$$y_0=y-\frac{1}{n}\beta(y), y\in F(x_0)\quad 和\quad y_n^*=y*-\frac{1}{n}\beta(y*).$$

又因为 $\frac{1}{n}\beta(y^*)-\frac{1}{n}\beta(y)\in intK$, 故有

$$y_0-y^*=\Big(y-\frac{1}{n}\beta(y)\Big)-\Big(y^*-\frac{1}{n}\beta(y^*)\Big)$$

$$= (y_0 - y^*) + \left(\frac{1}{n}\beta(y^*) - \frac{1}{n}\beta(y)\right)$$
$$\in (-intK),$$

即

$$(y_0 - y^*) \in (-intK).$$

这与 $y^* \in WE_0(F(X))$, 即 $x^* \in S_W(F)$ 矛盾.

由 $x^* \notin S(F)$, 有开邻域 $U \supset S(F)$, 从而 $x^* \notin U$, 又 $x^* \in S(F_n)$ 及 $F_n \to F$, 这与 S 在 F 处上半连续矛盾.

充分性，由 $S(F) = S_W(F), \forall F \in M$ 及 S_W 在 M 上上半连续立即得 S 在 M 上上半连续.

推论 2.6 对任意 $F \in M$,S 在 F 处上半连续，则 $S(F)$ 闭.

证明 由定理 2.5, 及 S 在 M 上上半连续有

$$S(F) = S_W(F), \quad \forall F \in M,$$

再由推论 2.3 知 $S(F)$ 闭.

评注 本文得出优化问题在图像逼近意义下弱有效解映射的稳定性，不需要像一致拓扑逼近那样要求每个优化问题映射都定义在同一空间上，这里只要定义在同一空间的紧子集上即可，真正反应映射和定义域双重扰动下的稳定性结果．有效解映射上半连续的充要条件是个很深刻的结果，也是有效解稳定的重要条件．但是因为图像拓扑弱于一致拓扑，所以对优化映射要求上半连续却强于锥上半连续.

参 考 文 献

[1] Yu J. Essential weak efficient solution in multiobjective optimization problems [J]. *J Math Ana Appl*, 1992, **166**: 211-214.

[2] Xiang S W, Zhou Y H. Continuity properties of solutions of vector optimization [J]. *Nonlinear Analysis*, 2006, **64**: 2496-2506.

[3] Aubin J P, Ekeland I. Applied Nonlinear An alysis [M]. Berlin: Sprngger-Verlag, 1989.

[4] Klein E, Thompson A C. Theory of correspondences [M]. New York: John Wiley and Sons, 1984.

[5] Luc D T. Theory of Vector Optimization [M]. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems.

[6] Fort M K JR. Poits of Continuity of Semi-continuous Functions [M]. Publ Math Debrecen, 1951, 2: 100-102.

[7] Durea M, Strugariu R. Necessary optimality conditions for weak sharp minima in set-valued optimization [J]. *Nonlinear Analysis*, 2010, **73**: 2148-2157.

[8] Huang N J, Li J, S Y Wu. Optimality Conditions for Vector Optimization Problems [J]. *J Optim Theory Appl*, 2009, **142**: 323-342.

[9] Fort M K J R. Essential and Nonessential Fixed Points [J]. *Amer J Math,* 1950, **72**: 315-322.

[10] Fang Y P, Huang N J. Increasing-along-rays property, vector optimization and well-posedness [J]. *Math Meth Oper Res*, 2007, **65**: 99-114.