

## 基于奈特不确定性随机波动率期权定价

韩立岩, 泮敏

(北京航空航天大学 经济管理学院, 北京 100191)

**摘要** 不同于传统的思路, 本文以奈特不确定的视角处理带有随机波动率的期权定价问题. 首先, 证明随机波动率模型本质上是一个奈特不确定问题; 并且用折现相对熵来度量奈特不确定大小. 然后, 通过一个效用函数来权衡奈特不确定和奈特溢价, 求得个体在奈特不确定下最优概率测度, 导出了含奈特厌恶度  $\gamma$  的欧式看涨期权定价公式. 通过 Monte Carlo 模拟发现个体奈特厌恶度  $\gamma$  和期权的到期日对期权的价格有重要影响, 并使用沪市权证实例给出奈特厌恶度  $\gamma$  的具体估算方法.

**关键词** 随机波动率; 奈特不确定; 奈特溢价; 相对熵; 期权定价

## Knighitian uncertainty based option pricing with stochastic volatility

HAN Li-yan, PAN Min

(School of Economics and Management, Beihang University, Beijing 100191, China)

**Abstract** This paper deals with the stochastic volatility option pricing model in the viewpoint of Knightian uncertainty. First, we prove that the stochastic volatility model is in fact a Knightian uncertainty model; and we use the discounted relative entropy to measure the Knightian uncertainty. Then, having balanced the Knightian uncertainty and Knightian premium through a utility function, we get the optimum probability measure, and we get the price formula of European call option with Knightian aversion degree  $\gamma$ . We find that  $\gamma$  and expiration date have important effect on the price of option by Monte Carlo simulation, and we give an example to show how to estimate the values of  $\gamma$ .

**Keywords** stochastic volatility; Knightian uncertainty; Knightian premium; relative entropy; option pricing

### 1 引言

在不确定条件下进行资产定价是金融中一个重要的问题. 奈特<sup>[1]</sup> 区别了可知的不确定 (风险) 和不可知的不确定 (真正的不确定, 其后的研究者常称之为奈特不确定). 通常, 风险 (risk) 被限定为概率分布唯一存在、并且可知的不确定; 奈特不确定 (Knightian uncertainty) 设定为不具备这个特点, 本质不可知的那种不确定. 在现实世界中, 更常见的是具有奈特不确定的情况. 奈特不确定具有丰富的内涵. 在资产定价中, 奈特不确定更多是指这样的一些情形: 可以知道一些概率测度的信息, 但是并不能精确、或不能完全知道所有必需的信息. 例如, 能知道概率分布的类型, 但是并不知道分布的参数; 或者, 由于信息缺失, 只能得到一个可能的概率测度集. 处理这种类型的奈特不确定, 一般来讲, 有两种途径: 第一种途径, Bewley<sup>[2]</sup> 提出, 用惯性 (inertia) 的假设来代替完备性的假设; 类似的, Epstein 和 Wang<sup>[3]</sup> 基于主观信念的思想, 构造一个测度集来处理概率测度的不唯一. 第二种途径, Gilboa<sup>[4]</sup>, Schmeidler<sup>[5]</sup>, 以及 Gilboa 和 Schmeidler<sup>[6]</sup> 提出基于非可加测度的 Choquet 积分. 此外, Hansen 等<sup>[7]</sup> 指出可以用相对熵来度量奈特不确定的大小; Kogan 和 Wang<sup>[8]</sup> 证明了在市场均衡的情况下, 不但存在风险溢价, 而且还存在奈特不确定溢价 (本文简称奈特溢价). 本文在他们思想的基础之上, 通过一个效用函数权衡奈特不确定和奈特溢价, 并且考虑个体的奈特厌恶度, 从而求出奈特不确定下的最优选择.

收稿日期: 2010-04-22

资助项目: 国家自然科学基金 (70671005, 70831001)

作者简介: 韩立岩 (1955-), 男, 北京人, 教授, 博士生导师; 泮敏 (1980-), 男, 浙江人, 博士研究生.

在期权定价模型的发展历程中,我们可以发现研究的范围,从只有风险的环境,渐渐地延伸到具有奈特不确定的领域.作为期权定价的里程碑,Black 和 Scholes<sup>[9]</sup>的模型几乎是以后其他所有模型的基石.他们的模型设定了一些理想的情况,标的资产价格服从一个参数不变的几何布朗运动.因为参数是不变并且可知的,因此,标的资产未来价格的概率分布是确定的,即服从几何正态分布.在他们的模型中,只有风险,没有奈特不确定.随后 Merton<sup>[10]</sup>文章中,放松 Black 和 Scholes 模型中的假设.在他的文章中,允许 B-S 模型中的扩散系数(即波动率)是非随机、时变的函数.本文下文中的引理可以近似看成是 Merton<sup>[10]</sup>模型的简化,从中也可以看出,标的资产未来价格的概率分布还是确定的.因此,这个模型也没有涉及到奈特不确定,分布的类型也没有变化,但是分布的参数却变得复杂.在之后发展的局部波动率(local volatility)模型中,波动率与标的资产价格相关.其中,著名的是 Cox 和 Ross<sup>[11]</sup>的 CEV(constant elasticity of variance)模型.在他们的模型中,波动率对资产的价格弹性是保持不变的.在局部波动率模型中,因为没有其他的随机源,虽然在理论上还能做一个对冲;但是可以看到,标的资产未来的价格不再是简单地服从几何正态分布.在 Merton<sup>[12]</sup>的模型中,由于标的资产的价格具有服从泊松过程的跳跃;因此,标的资产未来价格的概率分布是依赖跳跃过程的一族分布,而不是服从某个确定的几何正态分布.按前文所定义的,他的模型触及了奈特不确定. Hull 和 White<sup>[13]</sup>, Heston<sup>[14]</sup>等人发展更为复杂的随机波动率(SV)模型.在他们的模型中,波动率服从自己的一个随机过程.由分析可知,每一条可能的波动率路径对应一个可能的标的资产未来价格的概率分布;因此,在随机波动率模型中,标的资产未来价格的概率分布实际上是不可知的.换个角度说,随机波动率导致了概率分布的未知,即存在奈特不确定.从某种意义上看,这类模型实际上是在处理奈特不确定.

因此,对于涉及到奈特不确定的期权定价模型,我们可以从一个新的视角,即奈特不确定的角度来重新研究.如上文所述,在奈特不确定下的决策主要考虑奈特不确定和奈特溢价.事实上,在上文提到的、涉及到奈特不确定的模型中,已经隐含了奈特溢价的思想.在 Merton<sup>[12]</sup>的文章中,假设由于跳跃引起的不确定为非系统风险,因此得不到额外的补偿.用本文的术语来说, Merton 设定奈特溢价为零. Hull 和 White<sup>[13]</sup>沿用 Merton<sup>[12]</sup>的思路,假设随机波动率产生的不确定为非系统风险,因此奈特溢价也同样设定为零. Heston<sup>[14]</sup>假设存在一种和波动率相关的资产,借助 Breeden<sup>[15]</sup>基于消费的模型,设定了随机波动率的价格,即设定了奈特溢价.但是,可以看到,在他们模型中,奈特溢价的选择具有一定的任意性;也没有体现了不同的个体对奈特溢价的选择过程;再者,他们的模型也没有突出强调奈特不确定对个体定价的影响.对于一个充满奈特不确定的现实世界来说,从奈特不确定的角度来研究这些模型,可以更好地了解个体的决策过程,也具有一定现实意义.

本文基于奈特不确定求解带随机波动率的欧式看涨期权模型.本文有如下两点贡献:第一,证明了随机波动率模型可以转换为奈特不确定模型.首先,我们重新整理随机波动率模型,把原来两个独立的随机过程合并成一个新的随机过程.其次,我们指出个体不能彻底识别这个新的过程,个体面临奈特不确定.最后,我们说明,奈特不确定体现为个体不能得到精确的风险中性概率测度,进而建立一个奈特不确定模型.第二个贡献,在假设个体是奈特不确定厌恶的基础之上,本文引入一个基于“奈特溢价 - 奈特不确定”的效用函数来处理奈特不确定.在效用函数中,个体权衡取舍奈特不确定和奈特溢价,做出他的最优选择.在本文的效用函数中,个体的奈特厌恶度  $\gamma$  深刻地影响个体的决策.这也正体现了奈特不确定对个体期权定价的影响.

本文的结构如下:第一部分为引言,主要介绍本文的研究背景和研究思路.第二部分,具体论证我们的思路:通过把随机波动率模型转化为奈特不确定模型,并使用“奈特溢价 - 奈特不确定”的效用函数求解奈特不确定模型,最终得出欧式看涨期权的定价公式.第三部分,通过 Monte Carlo 模拟来考察影响期权奈特溢价的因素.第四部分,使用沪市权证的具体例子给出估算奈特厌恶度的一个方法.第五部分是结论.

## 2 模型

为了使讨论简单,本文假设模型是在一个风险中性的世界.在文章中出现的所有的概率测度都是风险中性的概率测度.假设标的资产服从以下过程:

$$dS(t)/S(t) = rdt + \sigma(t) dB(t) \quad (1)$$

$$d\sigma(t)/\sigma(t) = \alpha dt + \beta dW(t) \quad (2)$$

我们假设  $r$  是在某个风险中性概率测度  $P$  下,固定不变的无风险利率.  $\alpha, \beta$  是常数.我们同时假设维纳过程  $dB(t)$  和  $dW(t)$  是独立的.

(1)、(2) 式构成了一个简单的随机波动率模型. 类似 Hull 和 White<sup>[13]</sup>, 本文使用较为简单形式的随机波动率模型, 可以减少推导的繁琐, 有利于比较清晰地展示我们的转换过程; 同时, 也不失一般性. 关于随机波动率模型, 前人已经做了大量的工作. 他们中大部分都遵从下面的思路: 通过伊藤公式得到一个 PDE, 然后求解这个 PDE 得到期权的价格. 本文使用一种不同的方法. 首先, 我们合并这两个随机过程, 得到一个新的过程; 然后, 我们将说明这个新的过程呈现了奈特不确定性; 最后, 我们使用处理奈特不确定的方式去求解.

由过程 (2), 可以求得瞬时波动率的表达式:

$$\sigma(t) = \sigma(0) \exp \left[ \left( \alpha - \frac{\beta^2}{2} \right) t + \beta W(t) \right] \quad (3)$$

瞬时波动率取决于初始的波动率  $\sigma(0)$ , 参数  $\alpha, \beta$  和维纳过程  $W(t)$ . 把 (3) 式代入 (1) 式, 令  $h(t) \triangleq \exp \left[ \left( \alpha - \frac{\beta^2}{2} \right) t \right]$ ,  $X(t) \triangleq \exp[\beta W(t)]$ , 可以得到一个新的过程:

$$dS(t)/S(t) = rdt + \sigma(0) h(t) X(t) dB(t) \quad (4)$$

考虑如下的一个确定性时变波动率过程: 即波动率具有非随机、确定性的随时间变化的过程,

$$dS(t)/S(t) = rdt + \sigma(0) h(t) dB(t) \quad (5)$$

可以看到, 它们之间的差异在于右边的第二项: 在 (5) 式中, 是在风险中性概率测度  $P$  下一个标准的布朗运动  $dB(t)$ ; 在 (4) 式表示的过程中, 则是  $X(t) dB(t)$ . 容易知道,  $X(t)$  是服从对数正态分布,  $dB(t)$  服从标准正态分布. 但是我们很难得到  $X(t) dB(t)$  的概率分布. 我们不清楚 (4) 式表示的随机过程的具体类型.

因为  $X(t)$  和  $dB(t)$  是独立的, 在任意时刻  $t$ , 我们可以分两步来处理  $X(t) dB(t)$ : 第一, 根据  $X(t)$  的分布, 指定或者随机抽取某个  $x(t)$ . 给定  $x(t)$  后, 就可以得到与 (5) 式相似的, 具有确定性时变波动率的随机过程,

$$dS(t)/S(t) = rdt + \sigma(0) h(t) x(t) dB(t) \quad (6)$$

第二, 这里存在无限个可能性的  $x(t)$  取值. 选取不同的  $x(t)$ , 可以得到不同的确定性时变波动率的随机过程. 这种效应是因为  $X(t)$  的随机性引发的. 当个体面对过程 (4) 时, 实际上是面对一族如同 (6) 式的随机过程. 换一个角度说, 他面对一族的  $S(t)$  可能的概率分布. 个体不能得到一个精确的、唯一的关于  $S(t)$  的概率测度. 他面对着一族的风险中性概率测度. 因此, 个体实际上面临一个奈特不确定问题.

本文遵从以下的规则来建立和求解奈特不确定模型: (a) 根据 Bewley<sup>[2]</sup>, 以及 Wang<sup>[3]</sup> 文中的思想, 个体基于他的“惯性”、“信念”、“现状”来选择他的参考模型: 在本文中, 我们假设他选择了一个基于平均估计、相对保守的参考概率测度  $P$ ; (b) 个体知道他所选择的参考模型并非精确; 通过对概率测度  $P$  的扰动, 他得到概率测度集  $\mathbf{P}$ ; (c) 个体通过效用函数  $V(\tilde{P})$  选择一个最优的测度  $\tilde{P}^*$ ; 我们将在下文中讨论这个效用函数. 要注意的是, 在测度集  $\mathbf{P}$  中的所有概率测度都是风险中性概率测度.

我们选取具有如下特征的  $x(t)$  作为参考模型:

$$D[x(t) dB(t)] = D[X(t) dB(t)].$$

可以求得:  $x(t) = e^{\beta^2 t}$ . 即得到在参考概率测度  $P$  下的参考过程:

$$dS(t)/S(t) = rdt + \sigma(0) h(t) e^{\beta^2 t} dB(t) \quad (7)$$

选择 (7) 式作为参考过程是为了尽量保持 (4) 式的特点. 在任意时刻  $t$ , (4) 式和 (7) 式中,  $dS(t)/S(t)$  具有相同的均值和方差. 因此, 我们可以认为 (7) 式是 (4) 式一个较好的平均估计. 此外, 在 (7) 式中, 漂移系数为  $r$ ; 这意味着在参考模型中, 并没有考虑随机波动率带来的溢价; 因此 (7) 式同时也是一个保守的估计. 现在个体怀疑这个参考模型的精确性, 认为有可能是其他概率测度  $\tilde{P}$ . 定义  $z(t) \triangleq d\tilde{P}/dP$ ,  $z(t)$  是  $\tilde{P}$  对  $P$  的 Radon-Nikodym 导数. 由 Girsanov 定理我们可以得到  $z(t)$  的表达式,

$$z(t) = \exp \left[ \int_0^t \theta(\tau) dB(\tau) - \frac{1}{2} \int_0^t \theta^2(\tau) d\tau \right] \quad (8)$$

其中  $\theta(t)$  要满足 Novikov 条件:

$$E \left[ \exp \left[ \int_0^t \theta^2(\tau) d\tau \right] \right] < \infty \quad (9)$$

为了处理简单, 本文假设  $\theta(t)$  是确定性 (非随机) 过程. 由 Girsanov 定理, 我们有  $dB(t) = \theta(t) dt + d\tilde{B}(t)$ . 其中  $d\tilde{B}(t)$  是在其他可能概率测度  $\tilde{P}$  下的标准布朗运动. 把这个关系代入 (7) 式, 我们得到在概率

测度  $\tilde{P}$  下的过程:

$$dS(t)/S(t) = \left( r + \sigma(0) h(t) \theta(t) e^{\beta^2 t} \right) dt + \sigma(0) h(t) e^{\beta^2 t} d\tilde{B}(t) \quad (10)$$

上式表示一族具有确定性时变漂移系数和扩散系数的伊藤过程, 不同的  $\theta(t)$  表示在不同的风险中性概率测度  $\tilde{P}$  下不同的伊藤过程. 从奈特不确定的角度来看, (10) 式对参考模型 (7) 式的偏离体现模型的奈特不确定; 我们可以用个体对参考模型的偏离程度来衡量个体所承受的奈特不确定. 从 (10) 式中也可以看到, 不同的概率测度  $\tilde{P}$ , 具有不同的无风险利率  $\left( r + \sigma(0) h(t) \theta(t) e^{\beta^2 t} \right)$ . 其中, 溢价  $\pi(t) \triangleq \sigma(0) h(t) \theta(t) e^{\beta^2 t}$  是由于对参考概率测度  $P$  的偏离引发的, 即奈特溢价. 从上面的分析中也可以看到, 奈特溢价  $\pi(t)$  的大小是由个体选择的  $\tilde{P}$  决定的. 个体选择承受某一程度的奈特不确定, 相应的得到某一奈特溢价.

我们引入一个基于“奈特溢价 - 奈特不确定”的效用函数  $V(\tilde{P})$  来求解奈特不确定模型<sup>1</sup>. 对于一个厌恶奈特不确定的个体,  $V(\tilde{P})$  由以下几个因素决定: (a) 个体选择概率测度  $\tilde{P}$  时, 由于偏离参考测度  $P$  所承受的奈特不确定; (b) 个体相应得到的奈特溢价; (c) 个体对奈特不确定的厌恶度, 在下文中我们简称之为奈特厌恶度. 我们使用如下简单的效用函数:

$$V(\tilde{P}) = \tilde{K}(\tilde{P}) - \gamma \tilde{R}(\tilde{P}) \quad (11)$$

其中,  $\tilde{K}(\tilde{P})$  表示在概率测度  $\tilde{P}$  下的奈特溢价;  $\tilde{R}(\tilde{P})$  表示奈特不确定;  $\gamma > 0$  表示奈特厌恶度; 奈特不确定乘以奈特厌恶度是奈特不确定对效用函数产生的总效应. 易知, 在 (11) 式中,  $\tilde{K}(\tilde{P})$  使得  $V(\tilde{P})$  值变大, 而  $\tilde{R}(\tilde{P})$  却使得  $V(\tilde{P})$  值变小. 对于一个喜好奈特溢价, 但是厌恶奈特不确定的个体, 他要选择某个合适的风险中性概率测度  $\tilde{P}$ , 使得效用函数  $V(\tilde{P})$  最大. 这个问题可以表达成  $\max_{\tilde{P}} V(\tilde{P})$ .

由上文可知, 在概率测度  $\tilde{P}$  下, 奈特溢价为  $\pi(t)$ . 假设折现因子为  $e^{-\delta t}$ , 我们定义  $\tilde{K}(\tilde{P})$  为累积折现奈特溢价:

$$\tilde{K}(\tilde{P}) = \int_0^\infty e^{-\delta t} \pi(t) dt = \int_0^\infty e^{-\delta t} \sigma(0) h(t) \theta(t) e^{\beta^2 t} dt \quad (12)$$

我们使用相对熵来度量奈特不确定  $\tilde{R}(\tilde{P})$ . 根据文献 [16], 我们定义累积折现相对熵为:

$$\tilde{R}(\tilde{P}) = \delta \int_0^\infty e^{-\delta t} \left[ \int \ln \left( \frac{d\tilde{P}}{dP} \right) d\tilde{P} \right] dt \quad (13)$$

进一步地, (13) 式可以写成<sup>2</sup>

$$\tilde{R}(\tilde{P}) = \frac{1}{2} \tilde{E} \left[ \int_0^\infty e^{-\delta t} \theta^2(t) dt \right] \quad (14)$$

将 (12), (14) 式代入 (11) 式, 我们得到,

$$V(\tilde{P}) = \tilde{E} \left[ \int_0^\infty \left[ e^{-\delta t} \sigma(0) h(t) \theta(t) e^{\beta^2 t} - \frac{1}{2} \gamma e^{-\delta t} \theta^2(t) \right] dt \right] \quad (15)$$

我们知道不同的  $\theta(t)$  决定了不同的概率测度  $\tilde{P}$ ; 因此, 选最优的  $\tilde{P}$  实际上就等同于选择一个最优的  $\theta(t)$ . 我们有如下的目标函数:

$$\max_{\theta} \tilde{E} \left[ \int_0^\infty \left[ e^{-\delta t} \sigma(0) h(t) \theta(t) e^{\beta^2 t} - \frac{1}{2} \gamma e^{-\delta t} \theta^2(t) \right] dt \right] \quad (16)$$

$\tilde{E}$  表示在概率测度  $\tilde{P}$  下的期望. 从分析中知道,  $\tilde{P}$  由  $\theta(t)$  决定; 由此  $\theta(t)$  决定  $\tilde{E}$ . 在前文中, 我们假设  $\theta(t)$  是一个确定性的过程, 而非随机过程. 因此我们可以把 (16) 式写成:

$$\max_{\theta} \left[ \int_0^\infty \left[ e^{-\delta t} \sigma(0) h(t) \theta(t) e^{\beta^2 t} - \frac{1}{2} \gamma e^{-\delta t} \theta^2(t) \right] dt \right] \quad (17)$$

由欧拉等式, 我们可以得到:

$$\frac{d \left[ e^{-\delta t} \sigma(0) h(t) \theta(t) e^{\beta^2 t} - \frac{1}{2} \gamma e^{-\delta t} \theta^2(t) \right]}{d\theta(t)} = 0 \quad (18)$$

1. 本文的“奈特溢价 - 奈特不确定”模型不同于“均值 - 方差”模型. “均值 - 方差”模型是在指定的均值, 选取具有最小方差的组合; 或者也可以理解成, 指定方差 (风险), 选择组合使得均值 (无风险利率 + 风险溢价) 最大. 而在本文的“奈特溢价 - 奈特不确定”模型中, 选择承受某一大小的“奈特不确定”, 即得到相应的“奈特溢价”. 因此, 本文的模型实际上类似在“劳动 - 闲暇”模型中, 选择一个最优的“劳动时间” (在本文的模型中, 是选择承受最优的“奈特不确定”, 也即选择对相对保守的参考模型的偏离程度).

2. 证明过程可见 Hansen, Sargent, Turmuhambetova 等的文献 [16], P81-83, Claim B.2, B.3. 将他们的结论转换到测度  $\tilde{P}$  下即得到本文的 (14) 式.

代入  $h(t)$ , 可以求得:

$$\theta^*(t) = \frac{\sigma(0)}{\gamma} e^{(\alpha + \frac{1}{2}\beta^2)t} \quad (19)$$

容易验证  $\theta^*(t)$  满足 Novikov 条件. 面对风险中性概率测度不确定的时候, 个体选择  $\theta^*(t)$ , 即选择最优的风险中性概率测度  $\tilde{P}^*$ . 相应的, 我们也得到在最优风险中性测度  $\tilde{P}^*$  时的奈特溢价. 由 (19) 式, 我们可以得到奈特溢价  $\pi^*(t)$  为:

$$\sigma(0)h(t)\theta^*(t)e^{\beta^2 t} = \frac{\sigma^2(0)}{\gamma} e^{(2\alpha + \beta^2)t} \quad (20)$$

从 (20) 式可以知道,  $d\pi^*(t)/dt > 0$ . 这是因为, 面对更长期的决策时, 个体面临着更大的奈特不确定; 因此需要更高的奈特溢价来补偿. 特别的, 如果个体仅仅是做一个即期的决策, 我们可以看到  $\pi^*(0)$  为零. 这表明在我们的模型中, 此时没有奈特不确定性, 也因此没有奈特溢价. 从 (10) 式、(20) 式以及  $h(t)$  的表达式, 我们可以得到在概率测度  $\tilde{P}^*$  下标的资产服从的价格过程:

$$dS(t)/S(t) = \left( r + \frac{\sigma^2(0)}{\gamma} e^{(2\alpha + \beta^2)t} \right) dt + \sigma(0) e^{(\alpha + \frac{1}{2}\beta^2)t} d\tilde{B}^*(t) \quad (21)$$

和 (10) 式不同的是, (21) 式表示一个唯一的最优的过程. 为了得到标的资产服从 (21) 式的欧式期权的价格, 我们先引入一条引理:

**引理** [10,17] 假设在一个风险中性的世界, 标的资产价格  $S(t)$  服从如下具有时变的、非随机的利率和波动率的过程:

$$dS(t) = \tilde{r}(t) S(t) dt + \tilde{\sigma}(t) S(t) d\tilde{B}(t) \quad (22)$$

那么,  $\log\{S(T)/S(t)\}$  的分布为正态分布, 均值为  $\int_t^T [\tilde{r}(\tau) - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2(\tau)] d\tau$ , 方差为  $\int_t^T \tilde{\sigma}^2(\tau) d\tau$ ; 以它为标的欧式看涨期权  $t$  时刻的价格为:

$$C(T, S(t)) = BSM \left( T-t, S(t); K, \frac{1}{T-t} \int_t^T \tilde{r}(\tau) d\tau, \sqrt{\frac{1}{T-t} \int_t^T \tilde{\sigma}^2(\tau) d\tau} \right) \quad (23)$$

其中,  $BSM(\bar{t}, S; K, \bar{r}, \bar{\sigma})$  是 Black-Scholes-Merton 的标准欧式看涨期权的价格, 执行期为  $\bar{t}$ , 初始标的资产价格为  $S$ , 执行价格为  $K$ ;  $\bar{r}$  和  $\bar{\sigma}$  分别为不变的利率和不变的波动率<sup>3</sup>.

**证明** 见附录.

根据这个引理, 我们可以得到标的资产服从 (21) 式的欧式看涨期权的定价公式:

$$C^*(T, S(t)) = BSM(T-t, S(t); K, \bar{r}^*, \bar{\sigma}^*) \quad (24)$$

其中,

$$\bar{r}^* = r + \frac{\sigma^2(0)}{(T-t)\gamma(2\alpha + \beta^2)} \left[ e^{(2\alpha + \beta^2)T} - e^{(2\alpha + \beta^2)t} \right] \quad (25)$$

$$\bar{\sigma}^* = \sqrt{\frac{\sigma^2(0)}{(T-t)(2\alpha + \beta^2)} \left[ e^{(2\alpha + \beta^2)T} - e^{(2\alpha + \beta^2)t} \right]} \quad (26)$$

在这个欧式期权价格公式中, 只要知道参数  $\gamma$ , 就很容易得出期权的价格.  $\gamma$  依赖不同的个体; 不同的个体在不同的市场, 可能也有不同的  $\gamma$ . 在下一部分, 我们通过 Monte Carlo 模拟来考察影响期权价格的因素.

### 3 模拟

本部分我们通过 Monte Carlo 模拟考察不同的  $\gamma$  和不同的到期日对欧式看涨期权价格的影响. 首先, 我们根据 (1) 式和 (2) 式建立 Monte Carlo 模型. 容易知道, 在 Monte Carlo 模拟中, 求得的期权价格与个体的奈特厌恶度无关, 即不考虑奈特溢价, 我们把这个价格看成是某种“奈特中性”的期权价格; 在下文中, 我们简称之为“Monte Carlo 价格”. 其次, 给定  $\gamma$ , 我们按本文公式计算期权价格; 在下文中, 简称之为“新价格”. 我们通过比较这两种价格, 考察不同的奈特厌恶度  $\gamma$  对期权价格的影响.

3. Merton<sup>[10]</sup> 最早讨论了具有时变参数的情况; Hull 和 White<sup>[13]</sup> 有与本文相似的引理; 也可以在 Shreve 的著作 [17], 练习 5.4 看到类似的命题.

为了模型简单, 我们计算期初的期权价格, 即  $T - t = T$ . 与 Hull 和 White<sup>[13]</sup> 文章类似, 在进行 Monte Carlo 模拟的时候, 我们把  $T$  分成  $n$  个相等的子区间. 在风险中性的世界, 通过生成两组变量  $u_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 和  $v_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ), 产生  $t + iT/n$  时刻标的资产价格  $S_i$  以及波动率  $\sigma_i$ .  $S_i$  和  $\sigma_i$  分别服从以下的离散过程:

$$S_i = S_{i-1} \exp \left[ \left( r - \frac{1}{2} \sigma_{i-1}^2 \right) \Delta t + \sigma_{i-1} \sqrt{\Delta t} u_i \right],$$

$$\sigma_i = \sigma_{i-1} \exp \left[ \left( \alpha - \frac{1}{2} \beta^2 \right) \Delta t + \beta \sqrt{\Delta t} v_i \right],$$

其中,  $\Delta t = T/n$ . 对于每一条模拟的路径, 我们得到一个期权价格的“样本值”  $e^{-rT} \max \{S_n - K, 0\}$ . 我们使用对偶变量法 (antithetic variates technique) 来提高 Monte Carlo 模拟的效率<sup>[18]</sup>. 在得到  $u_i$  和  $v_i$  之后, 模拟如下一组组合:  $(u_i, v_i)$ ,  $(u_i, -v_i)$ ,  $(-u_i, v_i)$  和  $(-u_i, -v_i)$ . 每个组合都得到一个“样本值”, 相应的得到四个“样本值”:  $p_1, p_2, p_3$  和  $p_4$ . 对于这一组组合, 我们得到一个平均值  $p = (p_1 + p_2 + p_3 + p_4)/4$ , 它可以看成是这个组的“组样本值”. 通过 1000 组的模拟, 我们得到期权的 Monte Carlo 价格. 模拟中参数的设定见表 1.

表 1 Monte Carlo 模拟中参数的设定

参数名称	参数设定
执行价格 $K$	80, 90, 100, 110, 120
$(T(\text{天}), n)$	(30, 90), (60, 180), (90, 270), (120, 360), (150, 450), (180, 540)
$r, \alpha, \beta, S_0, \sigma_0$	$r = 0.1, \alpha = 0.1, \beta = 0.3; S_0 = 100, \sigma_0 = 0.2$

在 Monte Carlo 模拟中, 对于不同到期日的期权, 我们选定不同的  $n$ , 是为了使所有期权在模拟的时候, 子区间的大小相同. 在按本文导出的公式计算新价格时, 我们分别选择参数  $\gamma = 0.5, 1.5, \infty$ . 当  $\gamma = \infty$  时, 易知  $\bar{r}^* = r$ ; 这表示个体不能承受任何对参考模型的偏离所产生的奈特不确定, 相应的不能得到奈特溢价.

模拟结果, 当  $\gamma = 0.5, \gamma = 1.5$  时, 新价格比 Monte Carlo 价格要大; 在  $\gamma = \infty$  的时候, 这两类价格比较接近. 因为在  $\gamma = \infty$  时个体放弃所有的奈特溢价, 因此, 这是新价格的下限. 在图 1、图 2 中, 我们可以清楚地看到,  $\gamma$  的值越小, 个体愿意承担更多的奈特不确定, 期权的价格就越高. 这表明, 在新价格中包含了奈特溢价的因素, 反映了奈特不确定性对期权价格的影响. (在这里我们仅给出到期日为 60 天和 180 天的图形. 其他的不同到期日也可以得到类似的结果).

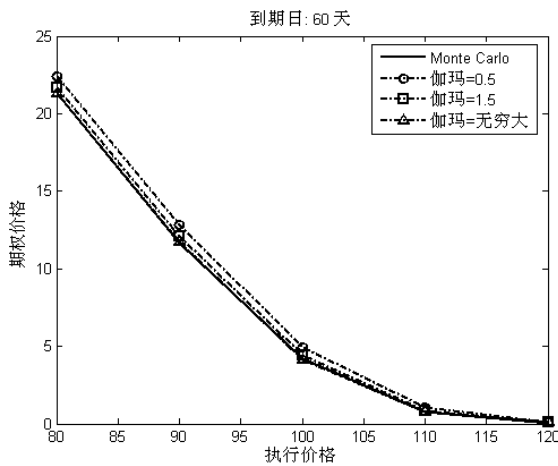


图 1 Monte Carlo 价格和新价格:  $T = 60$  天

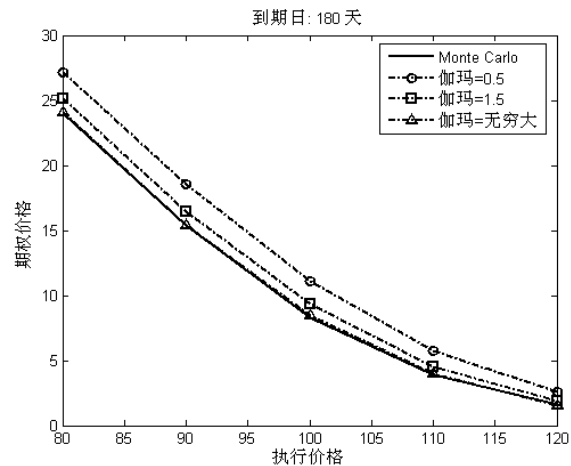


图 2 Monte Carlo 价格和新价格:  $T = 180$  天

比较图 1 和图 2, 也很容易发现, 到期日对新价格和 Monte Carlo 价格的偏离程度有着很明显的的作用. 如图 3、图 4 所示, 在  $\gamma$  保持不变的情况下, 更长远的到期日意味着对 Monte Carlo 价格更大的偏离. 这个结论和我们的直觉是一致的: 当面对一个更长远将来的问题, 就意味着面临着更大的不确定, 也需要更高的奈特溢价来补偿.

通过模拟, 我们看到  $\gamma$  在个体对期权的估值中起了关键的作用.  $\gamma$  表示个体对奈特不确定的厌恶度, 也影响了期权的奈特溢价. 在本文的期权定价公式中, 它深刻地影响了期权最终的价格. 在我们的公式中, 虽然

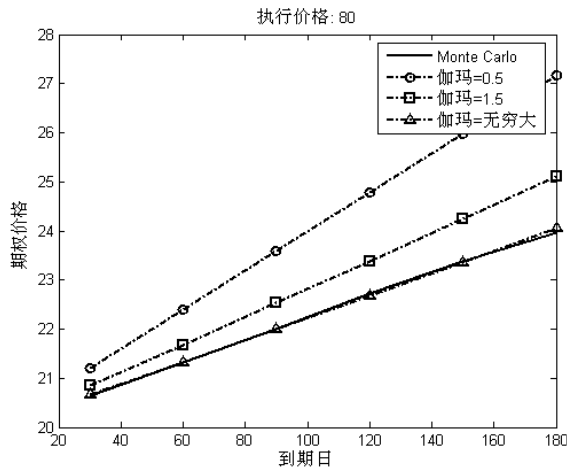


图 3 Monte Carlo 价格和价格:  $K = 80$

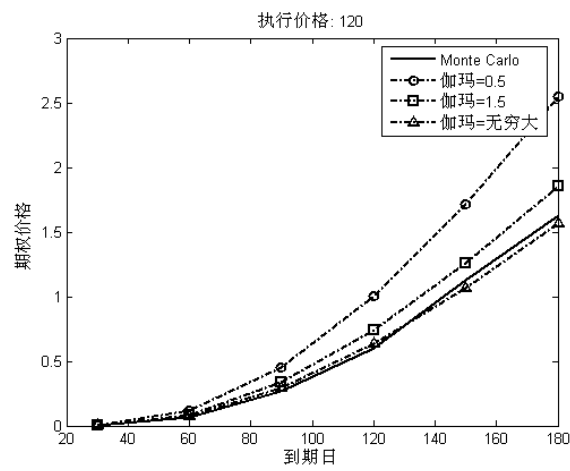


图 4 Monte Carlo 价格和价格:  $K = 120$

$\gamma$  是一个主观量, 但是并不妨碍公式的可用性. 我们可以通过经验数据来获得  $\gamma$  值, 再用这个经验的  $\gamma$  值去为期权定价. 要注意的是, 因为  $\gamma$  是一个主观量, 因此不同类型的个体可能会有不同的  $\gamma$  值; 更进一步, 同一类型的个体在不同类型的市场, 也可能呈现不同的  $\gamma$  值. 因此, 对不同类型的人群, 不同市场下  $\gamma$  值的估计和校正, 在基于奈特不确定的期权定价中, 是一项很重要的工作. 同时, 我们也可以看到, 奈特不确定和未来的时间长度是密切相关的. 未来事件的未知, 深刻地影响了个体的行为.

#### 4 实例: $\gamma$ 的估算

从上文得到的等式 (25)、(26) 可知, 要估算奈特厌恶度  $\gamma$ , 首先需要估计由 (1)、(2) 式组成的随机波动率模型的参数; 再根据本文的公式 (24), 通过拟合真实的权证数据来估计参数  $\gamma$  的值. 本部分沿着这个思路, 以武钢认购权证 (武钢 JTB1, 580001) 为例对奈特厌恶度  $\gamma$  进行估算.

首先, 本文采用 Gallant 和 Tauchen<sup>[19-20]</sup> 提出的有效矩估计 (EMM) 方法来估算随机波动率模型的参数. EMM 可以看成是 GMM 的扩展. 第一阶段, 使用一个与结构模型近似的辅助模型进行最大似然估计; 第二阶段, 产生结构模型的模拟数据, 以辅助模型的刻度向量为矩条件进行模拟矩估计. 本文中的随机波动率模型可以转化为如下结构模型<sup>4</sup>:

$$\begin{cases} y_t = c' + \sigma_t \varepsilon_t, \\ \sigma_t^2 = a' + b' y_{t-1}^2 + s' \sigma_{t-1}^2. \end{cases}$$

根据武钢认购权证的上市日和行权起始日, 选取相应交易日 (2005 年 11 月 23 日至 2006 年 11 月 16 日) 标的证券 (G 武钢, 600005) 的收盘价进行 EMM 估计. 从 EMM 估计的结果可以看到,  $b$  的值很接近 1, 比较符合模型的要求 ( $b = 1$ ). 估计结果如表 2、表 3.

表 2 辅助模型参数估计结果

参数	估计值	近似标准差	$t$	$P$
$a'$	0.00000719	0.00000418	1.72	0.0855
$b'$	0.1932	0.0462	4.18	<.0001
$s'$	0.8343	0.0323	25.84	<.0001

然后, 我们使用最小二乘法拟合武钢认购权证 (武钢 JTB1, 580001) 某一区间的收盘价, 从而估算出奈特厌恶度  $\gamma$ . 权证的行权价格为 2.90 元, 行权比例为 1, 选择拟合的区间为 2006 年 10 月 12 日至 2006 年 11 月 15 日, 共 25 个交易日; 取对应时间区间的 SHIBOR 一年期利率平均值为无风险利率, 得  $r = 0.0296$ ; 设定年交易日为 250 日; 根据辅助模型得到初始波动率为  $\sigma(0) = 0.387^5$ ; 根据 EMM 估计得到的参数值, 取 3

4. 在进行 GARCH(1,1) 估计时, 发现截矩项  $c'$  在 90% 的置信度下不显著, 而且值非常小. 因此, 在实际进行 EMM 估计的时候, 去掉了结构模型和辅助模型的截矩项. 表 2 和表 3 的估计值, 在 90% 的置信度下都显著.

5. EMM 采用 GARCH(1,1) 作为辅助模型时候, 在参数估计过程中会产生协方差矩阵. 因此选取第一个方差值, 年化后开方, 即可以得到初始的波动率.

位小数, 可以求出  $\beta = 0.102$ ,  $\alpha = -0.0283$ . 把这些参数代入公式 (24), 使用最小二乘法拟合权证数据, 估算出奈特厌恶度  $\gamma$  的值为 0.0481.

表 3 EMM 参数估计结果

参数	估计值	近似标准差	$t$	$P$
$a$	-0.06738	0.000412	-163.53	<.0001
$b$	0.990395	0.000053	18536.7	<.0001
$s$	0.203679	0.000343	593.24	<.0001

## 5 结论

奈特区分了风险和奈特不确定. 奈特不确定可以容纳很多类型; 本文处理的奈特不确定是指个体只能得到一个不精确的概率分布的情况. 由于信息的缺失, 信息的模糊性, 甚至不同信息直接的相互冲突, 个体很难得到事件精确的概率分布. 更常见的情况是, 他不得不面对一个概率测度族; 他不得不在奈特不确定下做出决策.

本文证明了随机波动率是奈特不确定的一种表现形式. 我们展示了随机波动率模型转换为奈特不确定模型的过程; 也从奈特不确定的角度对带随机波动率的欧式看涨期权进行定价. 首先, 我们把随机波动率模型转换为奈特不确定问题, 得到了一个具有一族标的资产价格过程的期权问题. 然后, 我们为这族模型选择一个参考模型, 并在此基础上扰动. 个体由于对参考模型的偏离而承受奈特不确定, 同时得到相应的奈特溢价.

本文采用一种新的途径来处理奈特不确定问题. 在假设个体厌恶奈特不确定的基础之上, 本文引入一个基于“奈特溢价 - 奈特不确定”的效用函数, 来反映个体在奈特溢价和奈特不确定之间的权衡取舍. 通过这个效用函数, 本文求解了奈特不确定问题, 得到了奈特溢价表达式.

本文基于奈特不确定思想, 导出了带随机波动率的欧式期权价格公式. 在本文导出的公式中, 奈特厌恶度  $\gamma$  体现奈特不确定对个体定价行为的影响. 本文通过 Monte Carlo 模拟说明了参数  $\gamma$  对期权价格具有重要的影响; 在 Monte Carlo 模拟中, 我们使用了对偶变量法 (antithetic variates technique) 来提高 Monte Carlo 模拟的效率. 本文也发现到期日在奈特不确定的世界中扮演重要角色. 一个更长远的到期日意味着期权有更大奈特溢价. 这些特征表明, 本文的公式很符合奈特不确定的直觉特性.

本文同时也具体给出一种估计参数  $\gamma$  的方法. 可以预见, 不同类型的个体, 在不同类型的市场, 可能有不同的  $\gamma$  值; 由此期权的价格可能不再唯一. 这恰恰是在奈特不确定下很可能出现的结果. 对参数  $\gamma$  的进一步的估计和校正是我们要深入的工作.

## 参考文献

- [1] Knight F H. Risk, Uncertainty and Profit[M]. Boston: Houghton Mifflin, Reprinted, 1985.
- [2] Bewley T. Knightian decision theory: Part I[R]. Cowles Foundation Discussion Paper No. 807, Yale University, 1986.
- [3] Epstein L G, Wang T. Intertemporal asset pricing under Knightian uncertainty[J]. Econometrics, 1994, 62: 283-322.
- [4] Gilboa I. Expected utility theory with purely subjective non-additive probabilities[J]. Journal of Mathematical Economics, 1987, 16: 65-88.
- [5] Schmeidler D. Subjective probability and expected utility without additivity[J]. Econometrica, 1989, 57: 571-587.
- [6] Gilboa I, Schmeidler D. Maxmin expected utility with non-unique prior[J]. Journal of Mathematical Economics, 1989, 18: 141-153.
- [7] Hansen L P, Sargent T J. Robust control and model uncertainty[J]. American Economic Review, 2001, 91: 60-66.
- [8] Kogan L, Wang T. A simple theory of asset pricing under model uncertainty[R]. Working Paper, Massachusetts Institute of Technology, 2003.
- [9] Black F, Scholes M. The valuation of option and corporate liabilities[J]. Journal of Political Economy, 1973, 81: 637-654.
- [10] Merton R C. Theory of rational option pricing[J]. Bell Journal of Economics and Management Science, 1973, 4(1): 141-183.



- [11] Cox J C, Ross S A. The valuation of options for alternative stochastic processes[J]. Journal of Financial Economics, 1976(3): 145–166.
- [12] Merton R C. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous[J]. Journal of Financial Economics, 1976(3): 125–144.
- [13] Hull J, White A. The pricing of options on assets with stochastic volatilities[J]. Journal of Finance, 1987, 42: 281–300.
- [14] Heston S L. A close-form solution for option with stochastic volatility with applications to bond and currency options[J]. The Review of Financial Studies, 1993(6): 327–343.
- [15] Breeden B T. An intertemporal asset pricing model with stochastic consumption and investment opportunities[J]. Journal of Financial Economics, 1979(7): 265–296.
- [16] Hansen L P, Sargent T J, Turmuhambetova G, et al. Robust control and model misspecification[J]. Journal of Economic Theory, 2006, 128(200): 81–83.
- [17] Shreve S E. Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-time Models[M]. New York: Springer Science + Business Media, Inc, 2005.
- [18] Glasserman P. Monte Carlo Methods in Financial Engineering[M]. New York: Springer-Verlag Inc, 2004.
- [19] Gallant A R, Tauchen G. Which moments to match[J]. Econometric Theory, 1996(12): 657–681.
- [20] Gallant A R, Tauchen G. Estimation of continuous time models for stock returns and interest rates[J]. Macroeconomic Dynamics, 1997(1): 135–168.

## 附录: 引理的证明

**证明** 由 (22) 和伊藤公式, 我们可以知道

$$d[\log S(t)] = \tilde{r}(t) dt + \tilde{\sigma}(t) d\tilde{B}(t) - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2(t) dt = \left[ \tilde{r}(t) - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2(t) \right] dt + \tilde{\sigma}(t) d\tilde{B}(t),$$

因为  $\tilde{r}(t)$  和  $\tilde{\sigma}(t)$  是确定性的过程, 我们可以做如下的积分:

$$\int_t^T d(\log S(\tau)) = \int_t^T \left( \tilde{r}(\tau) - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2(\tau) \right) d\tau + \int_t^T \tilde{\sigma}(\tau) d\tilde{B}(\tau).$$

我们很容易知道:

$$S(T) = S(t) \exp \left\{ \int_t^T \left( \tilde{r}(\tau) - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2(\tau) \right) d\tau + \int_t^T \tilde{\sigma}(\tau) d\tilde{B}(\tau) \right\}.$$

定义

$$\tilde{Y} = \int_t^T \left( \tilde{r}(\tau) - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2(\tau) \right) d\tau + \int_t^T \tilde{\sigma}(\tau) d\tilde{B}(\tau),$$

我们有:  $S(T) = S(t) e^{\tilde{Y}}$ , 其中,

$$\tilde{Y} \sim N \left( \int_t^T \left( \tilde{r}(\tau) - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2(\tau) \right) d\tau, \int_t^T \tilde{\sigma}^2(\tau) d\tau \right).$$

然后, 考虑具有不变波动率  $\bar{\sigma}$  和利率  $\bar{r}$  的标准 BSM 模型. 在风险中性概率测度下, 我们有:  $S(T) = S(t) e^{\tilde{Y}}$ , 其中,  $\tilde{Y} \sim N \left( (\bar{r} - \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2)(T-t), \bar{\sigma}^2(T-t) \right)$ ; 我们可以得出欧式看涨期权的价格为:

$$BSM(T-t, S(t); K, \bar{r}, \bar{\sigma}) = S(t) N(d_1) - e^{-\bar{r}(T-t)} KN(d_2),$$

其中,

$$d_1 = \frac{\log(S(t)/K) + (\bar{r} + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2)(T-t)}{\bar{\sigma}\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \bar{\sigma}\sqrt{T-t}.$$

令  $\bar{r} = \frac{1}{T-t} \int_t^T \tilde{r}(t) dt$ ,  $\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{T-t} \int_t^T \tilde{\sigma}^2(t) dt$ , 我们得到结论:

$$C(T, S(t)) = BSM \left( T-t, S(t); K, \frac{1}{T-t} \int_t^T \tilde{r}(\tau) d\tau, \frac{1}{T-t} \int_t^T \tilde{\sigma}^2(\tau) d\tau \right).$$