文章编号：0258-8013 (2008) 19-0056-09　**中图分类号**：TM 71　**文献标识码**：A　**学科分类号**：470·40

求解最优潮流问题的内点半定规划法

白晓清[1]，韦　化[1]，Katsuki Fujisawa[2]

(1. 广西大学电气工程学院，广西壮族自治区 南宁市 530004；2. 东京电机大学数学科学系，日本 崎玉)

Solution of Optimal Power Flow Problems by Semi-definite Programming

BAI Xiao-qing[1], WEI Hua[1], Katsuki Fujisawa[2]

(1. College of Electrical Engineering, Guangxi University, Nanning 530004, Guangxi Zhuang Autonomous Region, China;
2. Department of Mathematical Sciences, Tokyo Denki University, Saitama, Japan)

ABSTRACT：A new method using semi-definite programming (SDP) to solve optimal power flow (OPF) problems was presented. Named as SDP-OPF, the proposed method involves reformulating the OPF problem into a SDP model, which is a convex problem, and developing an interior point method (IPM) for SDP. Furthermore, the SDP sparsity technique can greatly improve the efficiency of storage and computing. A simple 4-bus power system was employed to explain the implementation process, which includes converting the OPF problem to the SDP model and mapping the results of SDP's to the OPF solutions. Extensive numerical simulations show that the results by SDP-OPF are the same as by NLP-OPF. SDP-OPF has the super-linear convergence, and it can guarantee the global optimal solutions within the polynomial times. Therefore, the study for SDP-OPF offers a good prospect.

KEY WORDS: optimal power flow；semidefinite programming；interior point method；sparsity technique

摘要：基于内点半定规划(semi-definite programming，SDP)，提出一种求解最优潮流(optimal power flow，OPF)的新方法——SDP-OPF 法。该方法将非凸 OPF 问题等价转换为半定规划问题，然后应用原始–对偶内点法求解。根据 OPF 半定规划模型的特点，采用基于半定规划的稀疏技术，使存储效率和计算性能得以大幅度提高。以 4 节点的简单电力系统为例，展示模型等价转换的过程及如何获取原 OPF 问题的解。IEEE-300 节点等 6 个标准系统的仿真计算表明：所提算法具有超线性收敛性，其计算结果与内点非线性规划的结果一致，且能保证解的全局最优性，可在多项式时间内完成，是一种应用前景广阔的方法。

关键词：最优潮流；半定规划；内点法；稀疏技术

0　引言

20 世纪 60 年代以来，最优潮流作为电力系统运行和分析的强有力工具，一直倍受关注。经过近 50 年的发展，众多最优化方法[1]被相继引入该领域，如：线性规划、二次规划、非线性规划以及牛顿法[2]和解耦法等。近年来，基于内点非线性规划的方法已被成功应用于最优潮流问题研究中[3-5]，计算速度和解的质量令人满意。随着电力系统的发展，最优潮流模型变得日趋复杂，求解也颇为困难。虽然应用内点非线性规划法求解OPF问题已取得了成功，但在数学模型和算法之间还有许多地方值得深入探讨。如OPF非线性规划模型具有非凸性[6]，因此理论上用内点法求解易陷入局部最优。

SDP[7-8]属于凸规划问题。经过最近 10 年的快速发展，目前已成为数值最优化领域的研究热点。其理论研究已逐渐成熟，被成功应用于系统控制理论[9-10]、信号处理和通讯[11-12]、组合优化[13]等领域。文献[14-15]首次将半定规划应用于求解电力系统经济调度问题，进行了有益的尝试。但他们的研究并没有涉及潮流方程和节点电压约束，不能完全满足电力系统安全稳定运行的要求。因此，将半定规划方法引入OPF问题求解中具有重要意义。

将内点半定规划法应用于求解 OPF 问题，出于以下 2 个方面考虑：

（1）理论上非凸规划问题在求解过程中有可能陷入局部最优，而凸规划问题能保证解的全局最优性。鉴于此，将OPF 问题转换成凸的半定规划问题具有重要的意义。另一方面，由于SDP可看成半正定矩阵集上的线性规划[8]，原始–对偶内点法等许

基金项目：国家自然科学基金项目(50467001)；国家高校博士学科点专项科研基金项目(20060593002)；广西教育厅科研项目(桂教科研[2004]20)。

Project Supported by National Natural Science Foundation of China (50467001).

多用于解线性规划的成熟算法可推广到解SDP，理论上其与解线性规划问题具有相同的效率[16]。因此，应用原始–对偶内点法求解OPF的SDP模型，能充分利用半定规划的凸性[17]和原始–对偶内点法的稳定性，保证最优解的质量。

（2）采用内点非线性规划法求解OPF问题需推导其雅可比矩阵和海森矩阵。因此，开发具有统一框架结构的软件包必须解决公式推导复杂、程序编写烦琐等困难。而半定规划模型则简单得多，且一些优秀的算法已被开发成具有统一构架的计算软件包[18]，便于调用。这样求解OPF问题，只需将其转换为SDP模型，直接调用半定规划计算软件包即可。

本文提出一种基于内点半定规划求解 OPF 问题的新方法——SDP-OPF 法。对 IEEE-300 节点等 6 个标准系统的仿真计算表明：所提方法收敛性好，其计算结果与内点非线性规划法的结果一致，是一种应用前景广阔的方法。

1　半定规划问题的定义及算法

1.1　半定规划的定义

半定规划是指线性函数在对称矩阵的仿射组合半正定约束下的极值问题，是特殊的锥优化问题，可视为线性规划的推广[8]。

半定规划与线性规划有着紧密的联系。半定规划与线性规划在形式上类似，都是凸优化问题；线性规划与半定规划相比，变量 $x \in R_+^n$ ($x \ge 0$)用矩阵变量 $\boldsymbol{X} \in R^{n\times n}$ ($\boldsymbol{X} \succeq 0$ ，即 $\boldsymbol{X}$ 为正定矩阵)代替，向量的非负性以矩阵的非负定性取代。半定规划的理论与线性规划的理论非常相似，许多用于求解线性规划的算法可扩展到求解半定规划[7-8]。

半定规划与线性规划也有重大区别：①线性规划具有强对偶性，而半定规划具有弱对偶性，即具有非负的对偶间隙；②线性规划的向量分量不等式约束是线性和光滑的，而半定规划的线性矩阵不等式约束可以是非线性和非光滑的，但却是凸的。因此，某些非线性规划问题能等价地转换成半定规划问题。

半定规划问题有多种表达方式[8]。其中半定规划的原问题(primal)标准形式为

$$\begin{cases}\min\ \boldsymbol{A}_0 \bullet \boldsymbol{X} \\ \text{s.t.}\ \ \boldsymbol{A}_i \bullet \boldsymbol{X} = \boldsymbol{b}_i,\ i=1,\cdots,m \\ \qquad \boldsymbol{X} \succeq 0\end{cases} \tag{1}$$

式中：“ $\bullet$ ”是矩阵的迹； $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{X} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{A}_{ij}\boldsymbol{X}_{ij}$ ； $\{\boldsymbol{A}_0, \boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_m\} \in R^{n\times n}$ 。

对偶问题(dual)标准形式为

$$\begin{cases}\max\ \ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\ \text{s.t.}\ \ \ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A}_0 \\ \qquad \boldsymbol{Y} \succeq 0\end{cases} \tag{2}$$

式中： $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = \sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{y}_k\boldsymbol{A}_k$ ； $\boldsymbol{b} \in R^m$ 。

1.2　原始–对偶内点法解半定规划

解半定规划模型有原始–对偶内点法、原始变尺度法和对偶变尺度法[19]等多种方法。相比之下，原始–对偶内点法[17,20]具有良好的收敛性，能保证达到精确最优解，更适合求解OPF问题。

解半定规划问题(1)~(2)等价于求解其原问题的对数障碍函数问题[7]：

$$\begin{cases}\min \boldsymbol{A}_0 \bullet \boldsymbol{X} - \mu \ln\det \boldsymbol{X} \\ \text{s.t.}\ \ \boldsymbol{A}_i \bullet \boldsymbol{X} = \boldsymbol{b}_i,\ i=1,\ldots,m\end{cases} \tag{3}$$

式中 μ>0 为单调递减的障碍因子，其拉格朗日函数为 $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{y}) \equiv \boldsymbol{A}_0 \bullet \boldsymbol{X} - \mu\ln\det\boldsymbol{X} - \sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{y}_i(\boldsymbol{b}_i - \boldsymbol{A}_i \bullet \boldsymbol{X})$ 。

可导出其 1 阶最优性条件：

$$\begin{cases}\nabla \boldsymbol{L}_X^{\mu} = \boldsymbol{A}_0 - \sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{y}_i(\mu) - \mu\boldsymbol{X}(\mu)^{-1} = 0 \\ \nabla \boldsymbol{L}_{yi}^{\mu} = \boldsymbol{b}_i - \boldsymbol{A}_i \bullet \boldsymbol{X}(\mu) = 0,\quad i=1,\cdots,m\end{cases} \tag{4}$$

引入对称矩阵 $\boldsymbol{Y}$，可获得如下非线性系统：

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}_i \bullet \boldsymbol{X}(\mu) = \boldsymbol{b}_i, \qquad i=1,\cdots,m \\ \sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{y}_i(\mu) + \boldsymbol{Y}(\mu) = \boldsymbol{A}_0 \\ \boldsymbol{Y}(\mu) = \mu\boldsymbol{X}(\mu)^{-1}\end{cases} \tag{5}$$

对系统(5)可导出其修正方程：

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}_i \bullet (\boldsymbol{X} + \Delta\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{b}_i, \qquad i=1,\cdots,m \\ \sum_{i=1}^{m}(\boldsymbol{y}_i + \Delta\boldsymbol{y})\boldsymbol{A}_i + (\boldsymbol{Y} + \Delta\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{A}_0 \\ \boldsymbol{XY} + \Delta\boldsymbol{XY} + \Delta\boldsymbol{XY} + \Delta\boldsymbol{X}\,\Delta\boldsymbol{Y} = \mu\boldsymbol{I}\end{cases} \tag{6}$$

这时，系统(6)中除了最后一个方程中的 $\Delta\boldsymbol{X}\Delta\boldsymbol{Y}$ 为非线性项外，其余部分是线性的。忽略该非线性项并引入辅助矩阵 $\Delta\tilde{\boldsymbol{Y}}$ ，则求解搜索方向 $(\Delta\boldsymbol{X}, \Delta\boldsymbol{y}, \Delta\boldsymbol{Y})$ 的线性系统为

$$\begin{cases}\boldsymbol{B}\Delta\boldsymbol{y} = \boldsymbol{r} \\ \Delta\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P} + \sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{A}_i\Delta\boldsymbol{y}_i \\ \Delta\tilde{\boldsymbol{Y}} = (\boldsymbol{X})^{-1}(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{Y}\Delta\boldsymbol{X}) \\ \Delta\boldsymbol{Y} = (\Delta\tilde{\boldsymbol{Y}} + \Delta\tilde{\boldsymbol{Y}}^{\mathrm{T}})/2\end{cases} \tag{7}$$

式中： $\boldsymbol{B}_{ij} = (\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{Y}) \bullet \boldsymbol{A}_j,\quad i,j=1,\cdots,m$ ； $\boldsymbol{r}_i = -\boldsymbol{d}_i + \boldsymbol{A}_i \bullet [\boldsymbol{X}^{-1}(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{PY})],\quad i=1,\cdots,m$ ； $\boldsymbol{P} = \sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{y}_i -$

$\boldsymbol{A}_0-\boldsymbol{X}$；$\boldsymbol{d}_i=\boldsymbol{b}_i-\boldsymbol{A}_i\bullet\boldsymbol{Y}$，$i=1,\cdots,m$；$\boldsymbol{R}=\mu\boldsymbol{I}-\boldsymbol{XY}$。

修正当前点为$(\boldsymbol{X}+\alpha_p\Delta\boldsymbol{X},\boldsymbol{y}+\alpha_d\Delta\boldsymbol{y},\boldsymbol{Y}+\alpha_d\Delta\boldsymbol{Y})$，其中$\alpha_p$和$\alpha_d$是步长因子，以保证更新后的$\boldsymbol{X}+\alpha_p\Delta\boldsymbol{X}$和$\boldsymbol{Y}+\alpha_d\Delta\boldsymbol{Y}$仍在正定锥中。如此反复迭代，直到互补间隙$\mu=\boldsymbol{X}\bullet\boldsymbol{Y}/n$足够小。

当$\mu\to 0$时，$(\boldsymbol{X}(\mu),\boldsymbol{y}(\mu),\boldsymbol{Y}(\mu))$将沿着中心路径$\gamma(\mu)\equiv\{\boldsymbol{X}(\mu),\boldsymbol{y}(\mu),\boldsymbol{Y}(\mu)\in R^{n\times n}\times R^m\times R^{n\times n}:\mu>0\}$精确收敛到最优解$(\boldsymbol{X}^*,\boldsymbol{y}^*,\boldsymbol{Y}^*)$。

1.3　原始–对偶内点法算法基本流程

原始–对偶内点法解SDP算法流程[20]如下：

（1）初始化计算参数。选择初值$(\boldsymbol{X}^0,\boldsymbol{y}^0,\boldsymbol{Y}^0)$，其中$\boldsymbol{X}^0\succeq 0,\ \boldsymbol{Y}^0\succeq 0$,。令迭代计数器$k=0$，迭代最大次数$k_{\max}=50$，允许误差$\varepsilon=10^{-5}$，设中心参数$0<\sigma<1$，防粘因子$0<\delta<1$。

（2）判断迭代次数k是否已达到$k_{\max}$。是则计算结束，计算不收敛，否则转下一步。

（3）计算互补间隙$\mu^k=\dfrac{\boldsymbol{X}^k\bullet\boldsymbol{Y}^k}{n}$。如果$\mu^k<\varepsilon$，且$(\boldsymbol{X}^k,\boldsymbol{y}^k,\boldsymbol{Y}^k)$接近可行，则输出最优解，计算结束。否则转下一步。

（4）利用目标点$(\boldsymbol{X}(\mu^k),\boldsymbol{y}(\mu^k),\boldsymbol{Y}(\mu^k))$，根据式(7)计算搜索方向$(\Delta\boldsymbol{X},\Delta\boldsymbol{y},\Delta\boldsymbol{Y})$。其中$\mu^{k+1}=\sigma\mu^k$。

（5）计算步长因子α_p和α_d。使$\boldsymbol{X}^k+\alpha_p\Delta\boldsymbol{X}$和$\boldsymbol{Y}^k+\alpha_d\Delta\boldsymbol{Y}$保持正定。对$\alpha_p$，利用对$\boldsymbol{X}^k$的Cholesky分解，计算满足$\boldsymbol{X}^k+\alpha_p\Delta\boldsymbol{X}\succeq 0$中能取到的步长最大值$\bar{\alpha}_p$。设$\boldsymbol{L}$是$\boldsymbol{X}^k$的Cholesky分解的下三角矩阵，即$\boldsymbol{X}^k=\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}$，并设$\boldsymbol{P}\Lambda\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$是$\boldsymbol{L}^{-1}\Delta\boldsymbol{X}\boldsymbol{L}^{-\mathrm{T}}$的特征值分解，$\lambda_{\min}$是$\Lambda$中对角元的最小值。这时，可得到$\bar{\alpha}_p=\begin{cases}-1/\lambda_{\min}, & \lambda_{\min}<0\\ +\infty, & \lambda_{\min}\ge 0\end{cases}$。

选取$\alpha_p=\delta\min\{1,\bar{\alpha}_p\}$，其中防粘因子$\delta$的作用是防止迭代后的解粘滞在边界上，造成收敛困难。

同样，对α_d可按上述方法求出。

（6）更新当前点为：$\boldsymbol{X}^{k+1}=\boldsymbol{X}^k+\alpha_p\Delta\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{y}^{k+1}=\boldsymbol{y}^k+\alpha_p\Delta\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{Y}^{k+1}=\boldsymbol{Y}^k+\alpha_d\Delta\boldsymbol{Y}$。

（7）$k=k+1$，转步骤（2）。

1.4　初值的选取

所提算法对初值的选取不敏感。经验表明，采用文献[21]中的方法选取初值与简单选取与最优解相同数量级的数值作为初值，对SDP-OPF的计算结果和计算效率均无明显影响。因此，为方便起见，各变量初值可按如下策略选取：

（1）原变量矩阵$\boldsymbol{X}^0=\tau\times\boldsymbol{I}$与松弛变量矩阵$\boldsymbol{Y}^0=\tau\times\boldsymbol{I}$，其中$\tau$为与最优解$(\boldsymbol{X}^*,\boldsymbol{y}^*,\boldsymbol{Y}^*)$相同数量级的常数系数，$\boldsymbol{I}$是单位矩阵。

（2）对偶变量y^0=**0**。其中 **0** 表示一个与式(2)中$\boldsymbol{b}$同维的全0矢量。

2　拟求解的最优潮流问题

为便于把OPF转换为半定规划模型，本文采用直角坐标数学模型表示OPF问题[22]：

$$\begin{cases}\min\ \ P_{\text{Loss1}}=\sum\limits_{i\in S_G}P_{Gi}\\ \min\ \ F_{\text{Cost}}=\sum\limits_{i\in S_G}(a_{fi}+a_{li}P_{Gi}+a_{qi}P_{Gi}^2)\\ \min\ \ P_{\text{Loss2}}=-\sum\limits_{i\in S_B}\sum\limits_{j\in S_B}G_{ij}[(f_i-f_j)^2+(e_i-e_j)^2]\\ \min\ \ Q_{\text{Loss}}=\sum\limits_{i\in S_B}\sum\limits_{j\in S_B}B_{ij}[(f_i-f_j)^2+(e_i-e_j)^2]\end{cases}\tag{8}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}P_{Gi}-\sum\limits_{j\in S_B}[e_i(e_jG_{ij}-f_jB_{ij})+\\ \qquad f_i(f_jG_{ij}+e_jB_{ij})]=P_{Di},i\in S_B\\ Q_{Ri}-\sum\limits_{j\in S_B}[f_i(e_jG_{ij}-f_jB_{ij})-\\ \qquad e_i(f_jG_{ij}+e_jB_{ij})]=Q_{Di},i\in S_B\\ e_s=1.05\\ f_s=0\end{cases}\tag{9}$$

$$\begin{cases}\underline{P}_{Gi}\le P_{Gi}\le\bar{P}_{Gi}, & i\in S_G\\ \underline{Q}_{Ri}\le Q_{Ri}\le\bar{Q}_{Ri}, & i\in S_R\\ \underline{U}_i^2\le e_i^2+f_i^2\le\bar{U}_i^2, & i\in S_B\end{cases}\tag{10}$$

式中：P_{LOSS1}为发电机有功输出；F_{Cost}为煤耗；P_{LOSS2}为系统有功传输损耗；Q_{LOSS}为系统无功传输损耗；a_{fi}、a_{li}、a_{qi}为发电机经济参数；s为参考节点编号；$\dot{U}_i$为节点i的复电压；P_{Gi}、P_{Ri}分别为节点i的有功和无功电源；P_{Di}、P_{Di}分别为节点i的有功和无功负荷；S_B、S_G、S_R分别为节点、发电机和无功电源集合；n_B、n_G、n_R分别为S_B、S_G、S_R中元素个数；“$\bar{\bullet}$”、“$\underline{\bullet}$”分别为指定变量或函数的上下限。

3　最优潮流问题的半定规划解法

3.1　OPF的半定规划模型

对OPF问题(8)~(10)，为使不等式约束(10)转换成等式约束，引入松弛变量$[\boldsymbol{u_G},\boldsymbol{l_G}]\in R^{2n_G}$,$[\boldsymbol{u_R},\boldsymbol{l_R}]\in R^{2n_R}$和$[\boldsymbol{u_B},\boldsymbol{l_B}]\in R^{2n_B}$，另引入常数$d$=1。

令矢量$\boldsymbol{x}$=[$\boldsymbol{x}_1$,$\boldsymbol{x}_2$,$\boldsymbol{x}_3$,$\boldsymbol{d}$]，其中：有功变量组为$\boldsymbol{x}_1=[\cdots\ \ \boldsymbol{P}_{Gi}\ \ \boldsymbol{u}_{Gi}\ \ \boldsymbol{l}_{Gi}\ \ \cdots],i\in S_G$；无功变量组为

$\boldsymbol{x}_2=[\cdots\ \ \boldsymbol{Q}_{Ri}\ \ \boldsymbol{u}_{Ri}\ \ \boldsymbol{l}_{Ri}\ \ \cdots], i\in S_{\boldsymbol{R}}$；节点电压组为 $\boldsymbol{x}_3=[\cdots\ \ \boldsymbol{e}_i\ \ \boldsymbol{f}_i\ \ \boldsymbol{u}_{Bi}\ \ \boldsymbol{l}_{Bi}\ \ \cdots], i\in S_{\boldsymbol{B}}$；$d$=1。

定义矩阵变量：

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\left[\begin{array}{c:c:c:c} \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_3 & \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}d \\ \hdashline \boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_3 & \boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}d \\ \hdashline \boldsymbol{x}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_3 & \boldsymbol{x}_3^{\mathrm{T}}d \\ \hdashline d\boldsymbol{x}_1 & d\boldsymbol{x}_2 & d\boldsymbol{x}_3 & d^2 \end{array}\right] \tag{11}$$

可证明该矩阵是对称正定或半正定的[23]，即 $\boldsymbol{X}\succeq 0$，且维数是 $n\times n$, 其中 $n=3n_{\boldsymbol{G}}+3n_{\boldsymbol{R}}+4n_{\boldsymbol{B}}+1$。由于常数$d$=1的引入，矩阵变量$\boldsymbol{X}$中各元素可表示一次或二次项。其中，除右边最后1列和底部最后1行中各元素是一次项，右下角是d^2=1，其余元素均是二次项。

由于在变量矩阵$\boldsymbol{X}$的形成中引入了常数d=1，必须同时增加1个等式约束d^2=1。此时，根据矩阵迹运算和式(11)中变量矩阵$\boldsymbol{X}$的定义，目标函数和约束中各系数可形成系数矩阵$\boldsymbol{A}$和常数向量$\boldsymbol{b}$。这时，OPF问题(8)~(10)可表示为半定规划的原问题形式(1)。

3.2　内点半定规划法求解OPF问题的一般过程

建立OPF问题半定规划模型后，按如下过程求解：

（1）利用OPF问题中各系数，形成OPF半定规划模型中系数矩阵$\boldsymbol{A}$和常数向量b。

（2）根据1.4节的策略选取初值(X^0,y^0,Y^0)。

（3）直接调用内点法解半定规划模型的计算软件包计算，输出结果。

由以上过程可看出，对不同的OPF问题用内点半定规划法求解，仅需按一定格式形成系数矩阵$\boldsymbol{A}$和常数向量b，直接调用软件包计算，不必重新推导公式和重新遍写程序。

但该方法中矩阵变量是满阵，直接求解的计算和存储效率均不高。考虑到OPF半定规划模型的系数矩阵具有很高的稀疏度，采用基于准对角矩阵的内点半定规划稀疏技术[24]，能大幅度地提高算法的计算性能和存储效率。

4　SDP-OPF 的实现

4.1　OPF的Pre-SDP形式

为便于说明建立 OPF 半定规划模型并用稀疏技术求解的过程，引入了易于转换成 SDP 模型的一种 OPF 格式，称之为 OPF 问题的 Pre-SDP 形式。

OPF 问题的目标函数和约束中各项均为线性或二次的，直接转换成 SDP 模型时，如前所述，其变量矩阵 $\boldsymbol{X}$ 是满阵。为采用内点半定规划稀疏技术求解，必须尽可能使变量矩阵$\boldsymbol{X}$成为准对角矩阵。因此，对本文第 3 节中形成变量矩阵$\boldsymbol{X}$的方法稍作修改，即对每个有功和无功变量分别引入常数d_{Gi}=1和d_{Ri}=1。这时，必须增加$n_{\boldsymbol{G}}$+$n_{\boldsymbol{R}}$个常数项 1 的等式约束。为转换方便，将采用其等价式 $d_{Gi}^2=1$ 和 $d_{Ri}^2=1$。同样，引入松弛变量$[u_{\boldsymbol{G}}, l_{\boldsymbol{G}}, u_{\boldsymbol{R}}, l_{\boldsymbol{R}}, u_{\boldsymbol{B}}, l_{\boldsymbol{B}}]\in R^{2n_{\boldsymbol{G}}+2n_{\boldsymbol{R}}+2n_{\boldsymbol{B}}}$，使不等式约束转换成等式约束。OPF 问题的 Pre-SDP 形式为

$$\begin{cases} \min\ P_{\mathrm{Loss1}}=\sum\limits_{i\in S_G} P_{Gi}d_{Gi} \\ \min\ F_{\mathrm{Cost}}=\sum\limits_{i\in S_G}(a_{fi}d_{Gi}^2+a_{li}P_{Gi}d_{Gi}+a_{qi}{P_{Gi}}^2) \\ \min\ P_{\mathrm{Loss2}}=-\sum_{i=1}^{n_B}[2({f_i}^2+e_i^2)\sum_{j=1}^{n_B}(G_{ij}-G_{ii})+ \\ \qquad 4\sum_{j=i+1}^{n_B}(f_i f_j+e_ie_j)G_{ij}] \\ \min\ Q_{\mathrm{Loss}}=\sum_{i=1}^{n_B}[2({f_i}^2+e_i^2)\sum_{j=1}^{n_B}(B_{ij}-B_{ii})- \\ \qquad 4\sum_{j=i+1}^{n_B}(f_i f_j+e_ie_j))B_{ij}] \end{cases} \tag{12}$$

式中系统有功传输损耗 P_{Loss2} 和系统无功传输损耗 Q_{Loss} 被整理为纯二次多项式形式，目的是使后续的 SDP 模型转换过程更为清晰。

满足以下约束：

（1）潮流方程。整理成纯二次多项式形式，常数项移至等式右边。

$$\sum_{j=1}^{n_B}(-e_ie_jG_{ij}+e_if_jB_{ij}-f_if_jG_{ij}-f_ie_jB_{ij})=P_{Di},\quad i\in S_{\boldsymbol{B}}/S_{\boldsymbol{G}} \tag{13}$$

$$\sum_{j=1}^{n_B}(-f_ie_jG_{ij}+f_if_jB_{ij}+e_if_jG_{ij}+e_ie_jB_{ij})=Q_{Di},\quad i\in S_{\boldsymbol{B}}/S_{\boldsymbol{R}} \tag{14}$$

$$P_{Gi}d_{Gi}+\sum_{j=1}^{n_B}(-e_ie_jG_{ij}+e_if_jB_{ij}-f_if_jG_{ij}-f_ie_jB_{ij})=P_{Di},\ \ i\in S_{\boldsymbol{G}} \tag{15}$$

$$Q_{Ri}d_{Ri}+\sum_{j=1}^{n_B}(-f_ie_jG_{ij}+f_if_jB_{ij}+e_if_jG_{ij}+e_ie_jB_{ij})=Q_{Di},\ \ i\in S_{\boldsymbol{R}} \tag{16}$$

（2）参考节点约束。

$$f_s^2=0 \tag{17}$$

$$e_s^2=1.05^2 \tag{18}$$

（3）有功和无功限制约束。

$$P_{Gi}d_{Gi}+u_{Gi}^2=\overline{P}_{Gi},\ \ i\in S_{\boldsymbol{G}} \tag{19}$$

$$P_{Gi}d_{Gi}-l_{Gi}^2=\underline{P}_{Gi},\ \ i\in S_{\boldsymbol{G}} \tag{20}$$

$$Q_{Ri}d_{Ri}+u_{Ri}^2=\overline{Q}_{Ri},\ \ i\in S_{\boldsymbol{R}} \tag{21}$$

$$Q_{Ri}d_{Ri}-l_{Ri}^2=\underline{Q}_{Ri},\quad i\in S_{\boldsymbol{R}} \tag{22}$$

（4）各节点电压幅值限制。

$$e_i^2+f_i^2+u_{Bi}^2=\bar{U}_i^2,\quad i\in S_{\boldsymbol{B}} \tag{23}$$

$$e_i^2+f_i^2-l_{Bi}^2=\underline{U}_i^2,\quad i\in S_{\boldsymbol{B}} \tag{24}$$

（5）常数 1 约束。

$$d_{Gi}^2=d_{Ri}^2=1,\qquad i\in S_{\boldsymbol{G}} \tag{25}$$

4.2 OPF 的 SDP 模型

形成 Pre-OPF 形式后，可按照一定关系直接写成 SDP 模型的形式。用一个如图 1 所示的简单 4 节点系统说明该过程。

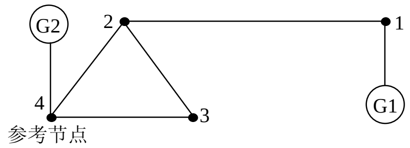

图 1　4 节点电力系统(test-4)

Fig. 1　A simple power system (test-4)

先将test-4系统以式(12)~(25)表示。为使矩阵分块清晰整齐，方便应用稀疏技术，对第3节中的矢量分组方式稍加改动如下，各变量构成矢量$\boldsymbol{x}=[x_1,\cdots,x_{21}]$，其中：①有功变量组：$\boldsymbol{x}_1=[P_{G1}\ \ d_{G1}]$，$\boldsymbol{x}_1=[P_{G2}\ \ d_{G2}]$；②有功辅助松弛变量组：$\boldsymbol{x}_3=[u_{G1}]$，$\boldsymbol{x}_4=[l_{G1}]$，$\boldsymbol{x}_5=[u_{G2}]$，$\boldsymbol{x}_6=[l_{G2}]$；③无功变量组：$\boldsymbol{x}_7=[Q_{R1}\ d_{R1}]$，$\boldsymbol{x}_2=[Q_{R2}\ d_{R2}]$；④无功辅助松弛变量组：$\boldsymbol{x}_9=[u_{R1}]$，$\boldsymbol{x}_{10}=[l_{R1}]$，$\boldsymbol{x}_{11}=[u_{R2}]$，$\boldsymbol{x}_{12}=[l_{R2}]$；⑤节点电压组：$\boldsymbol{x}_{13}=[e_1\ \ f_1\ \ e_2\ \ f_2\ \ e_3\ \ f_3\ \ e_4\ \ f_4]$；⑥节点电压辅助松弛变量组：$\boldsymbol{x}_{14}=[u_{B1}]$，$\boldsymbol{x}_{15}=[l_{B1}]$，$\boldsymbol{x}_{16}=[u_{B2}]$，$\boldsymbol{x}_{17}=[l_{B2}]$，$\boldsymbol{x}_{18}=[u_{B3}]$，$\boldsymbol{x}_{19}=[l_{B3}]$，$\boldsymbol{x}_{20}=[u_{B4}]$，$\boldsymbol{x}_{21}=[l_{B14}]$。

定义半定规划模型原问题的矩阵变量为

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_{1,1} & \cdots & \boldsymbol{X}_{1,21}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{X}_{21,1} & \cdots & \boldsymbol{X}_{21,21}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_1 & \cdots & \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{21}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{x}_{21}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_1 & \cdots & \boldsymbol{x}_{21}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{21}\end{bmatrix} \tag{26}$$

$\boldsymbol{X}$是$n\times n$维的正定或半正定矩阵，即：$\boldsymbol{X}\succeq 0$，其中$n=4n_{\boldsymbol{G}}+4n_{\boldsymbol{R}}+4n_{\boldsymbol{B}}$。在本例中，$n$=32。根据以上$\boldsymbol{X}$的定义，式(12)~(25)形式的OPF问题可很容易地直接写为SDP原问题形式：

$$\begin{cases}\min\ \ \boldsymbol{F}=\boldsymbol{A}_0\bullet\boldsymbol{X}\\ \text{s.t.}\ \ \ \boldsymbol{A}_k\bullet\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}_k,\qquad k=1,\dots,30\\ \qquad\ \boldsymbol{X}\succeq 0\end{cases} \tag{27}$$

其中系数矩阵与式(12)~(25)中各系数对应关系为：$\boldsymbol{A}_0$对应目标函数中的系数；$\boldsymbol{A}_1$、$\boldsymbol{A}_2$对应约束(13)；$\boldsymbol{A}_3$、$\boldsymbol{A}_4$对应约束(14)；$\boldsymbol{A}_5$、$\boldsymbol{A}_6$对应约束(15)。以此类推，最后$\boldsymbol{A}_{27}$、$\boldsymbol{A}_{28}$、$\boldsymbol{A}_{29}$、$\boldsymbol{A}_{30}$对应约束(25)。矢量$\boldsymbol{b}$由约束(13)~(25)右边常数项构成，维数为$2n_{\boldsymbol{B}}+2+2n_{\boldsymbol{G}}+2n_{\boldsymbol{R}}+2n_{\boldsymbol{B}}+n_{\boldsymbol{G}}+n_{\boldsymbol{R}}=30$。

经过以上变换，原OPF中所有线性项和二次项变量已被SDP模型中变量矩阵$\boldsymbol{X}$中对应元素完全表示，即，OPF问题被转换成SDP模型，可直接调用半定规划计算软件包求解。

4.3 半定规划的稀疏技术

如果采用原始–对偶内点法直接求解式(27)，由于变量矩阵$\boldsymbol{X}$是满阵，计算和存储效率都不高。考虑采用矩阵分块技术对矩阵变量$\boldsymbol{X}$进行分块，导出与之等价的准对角块矩阵，再变换成标准的SDP模型，以便直接调用支持分块矩阵运算的内点法解半定规划模型的计算软件包计算。

根据矩阵迹的定义及式(26)中$\boldsymbol{X}$的矩阵分块排列方式，式(27)的等价形式为

$$\begin{cases}\min\ \ F=\sum\limits_{i=1}^{21}\sum\limits_{j=1}^{21}[\boldsymbol{A}_0]_{ij}\bullet\boldsymbol{X}_{ij}\\ \text{s.t.}\ \ \ \sum\limits_{i=1}^{21}\sum\limits_{j=1}^{21}[\boldsymbol{A}_k]_{ij}\bullet\boldsymbol{X}_{ij}=\boldsymbol{b}_k,\qquad k=1,\dots,30\\ \qquad\ \boldsymbol{X}_{ij}\succeq 0\end{cases} \tag{28}$$

由于式(28)中的系数矩阵仅有对角块部分有非零元，其余部分全为0。因此，式(28)的等价形式为

$$\begin{cases}\min\ \ F=\sum\limits_{i=1}^{21}[\boldsymbol{A}_0]_{ii}\bullet\boldsymbol{X}_{ii}\\ \text{s.t.}\ \ \ \sum\limits_{i=1}^{21}[\boldsymbol{A}_k]_{ii}\bullet\boldsymbol{X}_{ii}=\boldsymbol{b}_k,\qquad k=1,\dots,30\\ \qquad\ \boldsymbol{X}_{ii}\succeq 0\end{cases} \tag{29}$$

式(29)是SDP的非标准形式，为能直接调用半定规划计算软件包计算，考虑将其转换为标准的SDP原问题样式。为此，定义对角块之外的部分全为0的矩阵变量$\tilde{\boldsymbol{X}}$为

$$\tilde{\boldsymbol{X}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_{1,1} & & \ddots & & \\ & \ddots & 0 & & \ddots\\ \ddots & 0 & \boldsymbol{X}_{20,20} & & \\ & \ddots & & & \boldsymbol{X}_{21,21}\end{bmatrix}_{(32\times 32)} \tag{30}$$

式中：

$\boldsymbol{X}_{1,1}=\begin{bmatrix}P_{G1}^2 & P_{G1}d_{G1}\\ P_{G1}d_{G1} & d_{G1}^2\end{bmatrix}_{(2\times 2)}$；$\boldsymbol{X}_{2,2}=\begin{bmatrix}P_{G2}^2 & P_{G2}d_{G2}\\ P_{G2}d_{G2} & d_{G2}^2\end{bmatrix}_{(2\times 2)}$；

$\boldsymbol{X}_{3,3}=[u_{G1}^2]$；$X_{4,4}=[l_{G1}^2]$；$\boldsymbol{X}_{5,5}=[u_{G2}^2]$；$\boldsymbol{X}_{6,6}=[l_{G2}^2]$；

$\boldsymbol{X}_{7,7}=\begin{bmatrix} Q_{R1}^2 & Q_{R1}d_{R1} \\ Q_{R1}d_{R1} & d_{R1}^2 \end{bmatrix}_{(2\times2)}$；$\boldsymbol{X}_{8,8}=\begin{bmatrix} Q_{R2}^2 & Q_{R2}d_{R2} \\ Q_{R2}d_{R2} & d_{R2}^2 \end{bmatrix}_{(2\times2)}$；

$\boldsymbol{X}_{9,9}=[u_{R1}^2]$；$\boldsymbol{X}_{10,10}=[l_{R1}^2]$；$\boldsymbol{X}_{11,11}=[u_{R2}^2]$；$\boldsymbol{X}_{12,12}=[l_{R2}^2]$；

$\boldsymbol{X}_{13,13}=$

$$\begin{bmatrix}
e_1^2 & e_1f_1 & e_2e_1 & f_2e_1 & e_3e_1 & f_3e_1 & e_4e_1 & f_4e_1 \\
e_1f_1 & f_1^2 & e_2f_1 & f_2f_1 & e_3f_1 & f_3f_1 & e_4f_1 & f_4f_1 \\
e_1e_2 & f_1e_2 & e_2^2 & f_2e_2 & e_3e_2 & f_3e_2 & e_4e_2 & f_4e_2 \\
e_1f_2 & f_1f_2 & e_2f_2 & f_2^2 & e_3f_2 & f_3f_2 & e_4f_2 & f_4f_2 \\
e_1e_3 & f_1e_3 & e_2e_3 & f_2e_3 & e_3^2 & f_3e_3 & e_4e_3 & f_4e_3 \\
e_1f_3 & f_1f_3 & e_2f_3 & f_2f_3 & e_3f_3 & f_3^2 & e_4f_3 & f_4f_3 \\
e_1e_4 & f_1e_4 & e_2e_4 & f_2e_4 & e_3e_4 & f_3e_4 & e_4^2 & f_4e_4 \\
e_1f_4 & f_1f_4 & e_2f_4 & f_2f_4 & e_3f_4 & f_3f_4 & e_4f_4 & f_4^2
\end{bmatrix}_{(8\times8)};$$

$\boldsymbol{X}_{14,14}=[u_{B1}^2]$；$\boldsymbol{X}_{15,15}=[l_{B1}^2]$；$\boldsymbol{X}_{16,16}=[u_{B2}^2]$；$\boldsymbol{X}_{17,17}=[l_{B2}^2]$；

$\boldsymbol{X}_{18,18}=[u_{B3}^2]$；$\boldsymbol{X}_{19,19}=[l_{B3}^2]$；$\boldsymbol{X}_{20,20}=[u_{B4}^2]$；$\boldsymbol{X}_{21,21}=[l_{B4}^2]$。

以上各块中的各元素能表示式(12)~(25)中相应变量项。由此，式(29)可直接写成如下半定规划的原问题标准形式：

$$\begin{cases} \min\ \ \boldsymbol{F}=\boldsymbol{A}_0\bullet\tilde{\boldsymbol{X}} \\ \text{s.t.}\ \ \boldsymbol{A}_k\bullet\tilde{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{b}_k, \quad k=1,\dots,30 \\ \qquad \tilde{\boldsymbol{X}}\succeq 0 \end{cases} \tag{31}$$

式(31)与式(27)等价，其中 $\tilde{\boldsymbol{X}}$ 是准对角矩阵，并与$\boldsymbol{X}$同维，且 $\tilde{\boldsymbol{X}}\succeq 0$ 。与满阵$\boldsymbol{X}$相比，$\tilde{\boldsymbol{X}}$ 中有大量零元素不参与运算，使计算和存储效率得到提高。

4.4　SDP模型中的系数矩阵

由分析可见，式(31)中系数矩阵$\boldsymbol{A}_k(k=0,\dots,30)$与矩阵变量 $\tilde{\boldsymbol{X}}$ 同维，且具有相同的稀疏模式，即：矩阵变量 $\tilde{\boldsymbol{X}}$ 中为0的位置，$\boldsymbol{A}_k$中对应位置的元素一定为0。$\boldsymbol{A}_k$如下式：

$$\boldsymbol{A}_{k(32\times32)}=\begin{bmatrix}
\boldsymbol{W}_{G1,k} & & & & & & & \\
 & \ddots & & & \ddots & & & \\
 & & \boldsymbol{W}_{SG1,k} & & & \boldsymbol{0} & & \\
 & & & \ddots & & & \ddots & \\
 & & & & \boldsymbol{W}_{R1,k} & & & \\
 & & & & & \ddots & & \\
 & & & & & & \boldsymbol{W}_{SR1,k} & \\
 & \ddots & & & & & & \ddots \\
 & & \boldsymbol{0} & & & & \boldsymbol{W}_{Bk} & \\
 & & & \ddots & & & & \boldsymbol{W}_{SB1,k} \\
 & & & & & & & & \ddots
\end{bmatrix} \tag{32}$$

式中$i=0,\dots,30$。

由此，可推出式(31)中系数矩阵$\boldsymbol{A}_k$与OPF问题(12)~(25)中各系数对应关系：

（1）$\boldsymbol{A}_0$与目标函数系数的关系。

本研究涉及4种常用目标函数，这里仅说明煤耗目标函数F_{Cost}的系数与$\boldsymbol{A}_0$的关系：

$$\boldsymbol{A}_0=\begin{bmatrix}
\boldsymbol{W}_{G1,0} & & & & \boldsymbol{0} \\
 & \boldsymbol{W}_{G2,0} & & \ddots & \\
 & & \boldsymbol{0} & & \\
 & \ddots & & \ddots & \\
\boldsymbol{0} & & & & \boldsymbol{0}
\end{bmatrix}_{(32\times32)} \tag{33}$$

式中：

$\boldsymbol{W}_{G1,0}=\begin{bmatrix} a_{q1} & \frac{1}{2}a_{l1} \\ \frac{1}{2}a_{l1} & a_{f1} \end{bmatrix}_{(2\times2)}$；$\boldsymbol{W}_{G2,0}=\begin{bmatrix} a_{q2} & \frac{1}{2}a_{l2} \\ \frac{1}{2}a_{l2} & a_{f2} \end{bmatrix}_{(2\times2)}$。

（2）$\boldsymbol{A}_5$与约束(15)中系数的关系。

约束(15)是发电机节点有功潮流方程，$\boldsymbol{A}_5$对应发电机G_1，相应的方程为$\boldsymbol{A}_5\bullet\boldsymbol{X}=P_{G1}d+\sum_{j=1}^{4}(-e_1e_jG_{1j}+e_1f_jB_{1j}-f_1f_jG_{1j}-f_1e_jB_{1j}=P_{D1}$ 因此，$\boldsymbol{A}_5$的结构为

$$\boldsymbol{A}_5=\begin{bmatrix}
\boldsymbol{W}_{G1,5} & & & \ddots & & \\
 & \boldsymbol{0} & & & \boldsymbol{0} & \\
 & & \ddots & & & \ddots \\
 & & & \boldsymbol{0} & & \\
 & \ddots & & & \boldsymbol{W}_{\boldsymbol{B},5} & \\
 & & \boldsymbol{0} & & \boldsymbol{0} & \\
 & & & \ddots & & \ddots
\end{bmatrix}_{(32\times32)} \tag{34}$$

式中：$\boldsymbol{W}_{G1,5}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{(2\times2)}$；$\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{B},5}=-\frac{1}{2}\times$

$$\begin{bmatrix}
2G_{11} & 0 & G_{12} & B_{12} & G_{13} & B_{13} & G_{14} & B_{14} \\
0 & 2G_{11} & -B_{12} & G_{12} & -B_{13} & G_{13} & -B_{14} & G_{14} \\
G_{12} & -B_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
B_{12} & G_{12} & 0 & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\
G_{13} & -B_{13} & 0 & \vdots & \ddots & & & \vdots \\
B_{13} & G_{13} & 0 & \vdots & & \ddots & & \vdots \\
G_{14} & -B_{14} & 0 & \vdots & & & \ddots & \vdots \\
B_{14} & G_{14} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0
\end{bmatrix}_{(8\times8)}。$$

（3）$\boldsymbol{A}_{27}$与约束(25)中系数的关系。

约束(25)是常数1约束。$\boldsymbol{A}_{27}$在test-4中对应发电机G_1的常数约束 $d_{G1}^2=1$。$\boldsymbol{A}_{27}$为

$$\boldsymbol{A}_{27}=\begin{bmatrix}
\boldsymbol{W}_{G1,27} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\
\boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\boldsymbol{0} & \cdots & \cdots & \boldsymbol{0}
\end{bmatrix}_{(32\times32)} \tag{35}$$

式中 $\boldsymbol{W}_{G1,27}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}_{(2\times 2)}$。

式(31)中的矢量$\boldsymbol{b}$由约束(13)~(25)右边的常数组成：$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}=[P_{D2}\ \ P_{D3}\ \ Q_{D2}\ \ Q_{D3}\ \ P_{D1}\ \ P_{D4}\ \ Q_{D1}\ \ Q_{D4}\ \ 0\ \cdots\ 1.05^2$ $P_{G1}\ \ P_{G2}\ \ \underline{P}_{G1}\ \ \underline{P}_{G2}\ \ \bar{Q}_{R1}\ \ \bar{Q}_{R2}\ \ \underline{Q}_{R1}\ \ \underline{Q}_{R2}\ \ \cdots\ \bar{U}_1^2\ \ \bar{U}_2^2\ \ \bar{U}_3^2$ $\bar{U}_4^2\ \ \underline{U}_1^2\ \ \underline{U}_2^2\ \ \underline{U}_3^2\ \ \underline{U}_4^2\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1]$。

其他关系可用同样方法得出。至此，OPF问题的半定规划模型已被建立，直接调用支持分块矩阵运算的内点法解半定规划模型的计算软件包计算即可。

4.5　获取OPF的解

求出 OPF 问题的 SDP 模型最优解后，还需将其映射回原 OPF 问题的解空间。该过程直接，计算耗时少。获取 OPF 解的基本流程如下：

（1）由于d_{Gi}=1 和d_{Ri}=1，有功 $P_{Gi}(i\in S_{\boldsymbol{G}})$ 和无功 $Q_{Ri}(i\in S_{\boldsymbol{R}})$ 分别等于形如式(30)的最优解 $\tilde{\boldsymbol{X}}^*$ 中块 $\boldsymbol{X}_{1,1}$、$\boldsymbol{X}_{2,2}$、$\boldsymbol{X}_{7,7}$ 和 $\boldsymbol{X}_{8,8}$ 的 $P_{Gi}d_{Gi}$ 及 $Q_{Ri}d_{Ri}$ 的值。

（2）节点电压实部 $e_i(i\in S_{\boldsymbol{B}})$ 等于形如式(30)的最优解 $\tilde{\boldsymbol{X}}^*$ 中块 $\boldsymbol{X}_{13,13}$ 对角元 e_i^2 的平方根；节点电压虚部 $f_i(i\in S_{\boldsymbol{B}})$ 由 $f_i=e_i f_i/e_i$ 求出，其中 $e_i f_i$ 是块 $\boldsymbol{X}_{13,13}$ 中对角元 e_i^2 右边相邻第 1 个元素。

5　SDP-OPF 仿真结果及讨论

5.1　SDP-OPF解的质量

所提算法在Dell(2.8 GHz，512 MB)/PC上用Matlab7.0 编程实现，采用SDPA-M[25]计算软件包求解半定规划模型。该软件包支持分块矩阵运算，接口清晰，易于调用。IEEE-300 节点等 6 个测试系统用于测试算法性能。测试系统的基本特性见表 1。

OPF 问题既能由内点非线性规划求出最优解，也能用内点半定规划的方法求解。由于半定规划是凸问题，其最优解能保证全局最优性，即，用 SDP-OPF 计算出的结果是全局最优解。表 2 仅列出对 test-4 分别用上述两种方法计算获得的结果，表明两种方法的解是一致的。由此可推论，OPF的非线性规划模型虽然是非凸的，却具有隐凸性[26]，用内点法求解也能保证全局最优性。

表 1　测试系统规模、变量数及不等式约束
Tab. 1　Test systems size，variables and constraints

系统名称	节点数	线路数	变量数				松弛变量数	约束个数
			P_{Gi}	Q_{Ri}	e_i	f_i		
test-4	4	4	1	2	4	4	14	27
IEEE-14	14	20	5	3	14	14	44	75
IEEE-30	30	45	6	6	30	30	84	147
IEEE-57	57	78	4	7	57	57	136	253
IEEE-118	118	179	16	54	118	118	376	615
IEEE-300	300	409	21	69	300	300	780	1 383

表 3 给出 6 个测试系统 4 种目标函数仿真计算的 CPU 时间和迭代次数，说明基于内点半定规划法在保证解质量的同时，具有良好的收敛性。

表 2　SDP 和 NLP 下的计算结果
Tab. 2　Solutions by SDP and NLP

模型	节点	有功/pu	无功/pu	电压/pu	煤耗/$
SDP	1	0.568 18	0.100 48	0.985 13+0.012 57i	421.774 1
	2	-	-	0.959 76–0.098 46i	
	3	-	-	1.086 60+0.171 77i	
	4	0.300 00	0.276 13	1.05+0i	
NLP	1	0.568 18	0.100 48	0.985 13+0.012 57i	421.774 1
	2	-	-	0.959 76–0.098 46i	
	3	-	-	1.086 60+0.171 77i	
	4	0.300 00	0.276 13	1.05+0i	

表 3　SDP-OPF 计算的 CPU 时间和迭代次数
Tab. 3　CPU time and iterations of SDP-OPF

测试系统	CPU 时间/s				迭代次数			
	P_{Loss1}	F_{Cost}	P_{Loss2}	Q_{Loss}	P_{Loss1}	F_{Cost}	P_{Loss2}	Q_{Loss}
test-4	0.015 6	0.015 6	0.015 6	0.015 6	10	9	9	11
IEEE-14	0.093 8	0.078 1	0.078 1	0.078 1	14	9	15	14
IEEE-30	0.359 4	0.312 5	0.390 6	0.343 8	15	12	17	15
IEEE-57	1.218 8	1.640 6	2.281 3	1.765 6	17	19	24	18
IEEE-118	6.921 9	9.093 8	12.72	12.781	21	22	24	25
IEEE-300	70.23	90.04	121.38	122.90	25	27	29	27

5.2　SDP-OPF 的收敛性

互补间隙为判断是否达到最优解的一个重要标准，它的变化趋势能反映算法特点。IEEE-300系统4个目标函数随迭代变化的互补间隙对数曲线如图2所示，可见SDP-OPF用内点法求解，具有超线性收敛性。

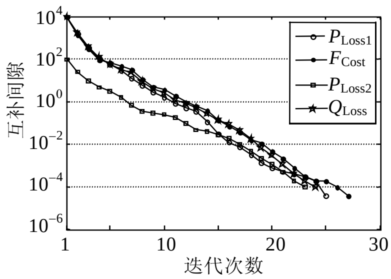

图 2　IEEE-300 系统互补间隙收敛曲线
Fig. 2　Complementary gaps with iterations for IEEE-300

一般来说，判断一个算法优秀与否的标准是其互补间隙能否快速地单调递减至 0。图 2 表明，基于 SDP 的原始–对偶内点法求解 OPF 问题在给定误差范围内，其互补间隙在有限次迭代步内能快速单调地收敛趋于 0。

图3为IEEE-300节点系统4种不同目标函数下

最大不平衡量随迭代次数变化的对数曲线。由图可见，原始–对偶内点法求解基于半定规划的OPF问题具有良好的收敛性。

图 4 展示了 IEEE-300 节点系统采用 SDP-OPF 计算的 4 种目标函数值与牛顿–拉夫逊法计算潮流所得函数值的比值随迭代过程收敛至最优解的情况，说明 SDP-OPF 是单调收敛的。

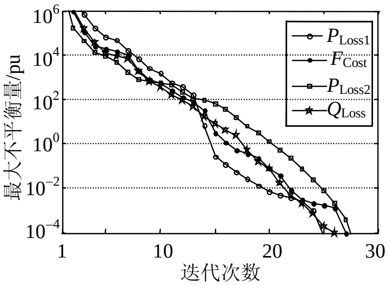

图 3　IEEE-300 系统最大不平衡量变化曲线
Fig. 3　Maximum mismatches with iterations for IEEE-300

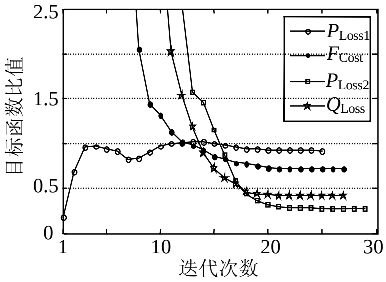

图 4　IEEE-300 系统目标函数比值变化曲线
Fig. 4　Ratios of objective functions with iterations for IEEE-300

5.3　SDP-OPF 稀疏技术的计算和存储效率比较

与不采用稀疏技术的SDP-OPF相比，采用稀疏技术形成的SDP模型规模有所扩大，其中矩阵变量维数各增加了n_G+n_R–1 个，矩阵等式约束增加了n_G+n_R–1 个。但这种代价是值得的，因为是否采用稀疏技术对SDP-OPF的收敛性和计算结果完全没有影响，而对其存储效率和计算性能的提高作用却非常明显。

表 4 列出 6 个测试系统不同目标函数采用稀疏技术后的内存节省率。图 5 比较 IEEE-300 节点系统 4 种不同目标函数下是否采用稀疏技术的 CPU 时间。结果表明，采用稀疏技术能大幅度提高存储效率和计算性能，内存空间节省了 60%以上，CPU 时间最大提高了 92%。由此可见，深入研究内点 SDP-OPF 的稀疏技术，能有效提高存储效率和计算性能。

表 4　采用稀疏技术的内存节省率
Tab. 4　Memories saving by sparsity for test systems　%

测试系统	P_{Loss1}	F_{Cost}	P_{Loss2}	Q_{Loss}
test-4	72.1	72.1	72.0	72.0
IEEE-14	73.0	73.0	73.0	73.0
IEEE-30	69.6	69.6	69.5	69.5
IEEE-57	61.7	61.7	61.7	61.7
IEEE-118	75.8	75.8	75.7	75.7
IEEE-300	83.7	83.7	83.6	83.6

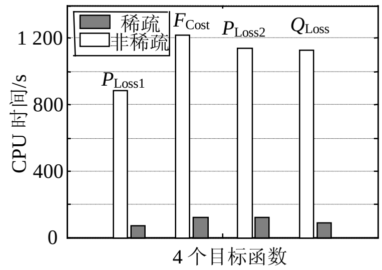

图 5　IEEE-300 系统采用稀疏技术的 CPU 时间比较
Fig. 5　Computing time cost: with and without sparsity for IEEE-300

6　结论

本文将内点半定规划算法成功地应用于求解最优潮流问题。通过 IEEE-300 节点等 6 个标准测试系统的仿真计算得出如下结论：

（1）所提方法具有超线性收敛性，其计算结果与内点非线性规划的结果一致。同时，由于半定规划是凸问题，用内点半定规划法求出的 OPF 最优解能保证全局最优。

（2）由于内点半定规划法具有良好的算法结构，已经有许多成熟的计算软件包。对具体问题不再需要象内点非线性规划法一样推导其雅可比矩阵、海森矩阵及修改程序代码，仅需直接调用相关核心计算包计算，减少了公式推导和计算的中间步骤。

（3）广泛的计算表明，采用基于准对角矩阵的内点半定规划稀疏技术能有效提高 SDP-OPF 的存储效率和计算性能。

（4）目前内点半定规划法还无法计算超大规模电力系统的 OPF 问题。因此，深入研究相关稀疏技术和并行计算将是以后工作的重点。

参考文献

[1] Momoh J A，Koessler R J，Bond M S，et al．Challenges to optimal power flow[J]．IEEE Transactions on Power Systems，1997，12(1)：444-455．

[2] 赵晋泉，侯志俭，吴际舜．改进最优潮流牛顿算法有效性的对策研究[J]．中国电机工程学报，1999，19(12)：70-75．
Zhao Jinquan，Hou Zhijian，Wu Jishun．Some new strategies for improving the effectiveness of Newton optimal power flow algorithm[J]．Proceedings of the CSEE，1999，19(12)：70-75(in Chinese)．

[3] Wei H，Sasaki H，Yokoyama R．An application of interior point

quadratic programming algorithm to power system optimization problems[J]．IEEE Transactions on Power Systems，1996，11(1)：260-267．

[4] Quintana V H，Torres G L，Medina-palomo J．Interior-point methods and their applications to power systems：a classification of publications[J]．IEEE Transactions on Power Systems，2000，15(1)：170-176．

[5] 韦化，李滨，杭乃善，等．大规模水火电力系统最优潮流的现代内点理论分析[J]．中国电机工程学报，2003，23(4)：5-8．
Wei Hua，Li Bin，Hang Naishan，et al．An analysis of interior point theory for large-scale hydrothermal optimal power flow problems [J]．Proceedings of the CSEE，2003，23(4)：5-8(in Chinese)．

[6] Jabr R A．A primal-dual interior-point method to solve the optimal power flow dispatching problem[J]．Optimization and Engineering，2003，4(4)：309-336．

[7] Adler I，Alizadeh F．Primal-dual interior point algorithms for convex quadratically constrained and semidefinite optimization problems [R]．New Brunswick，NJ：Rutcor，Rutgers University，1995．

[8] Todd M J. Semidefinite optimization[J]. Acta Numerica，2001，10(1)：515-560．

[9] Wolkowicz H．Handbook of applied optimization[M]．New York：Oxford University Press，2001．

[10] Parrilo P．Semidefinite programming relaxations and algebraic optimization in control[J]．European Journal of Control，2003，9(1)：307-321．

[11] Alkire B，Vandenberghe L．Convex optimization problems involving finite autocorrelation sequences[R]．Los Angeles，CA：Electrical Engineering Department，UCLA，2001．

[12] Xiao L，Boyd S．Fast linear iterations for distributed averaging [R]．Stanford，CA：Stanford University，2003．

[13] Goemans M X，Rendl F. Semidefinite programming in combinatorial optimization[J]. Mathematical Programming，1997，79(1-3)：143-161．

[14] Fuentes-Loyola R，Quintana V H．Medium–term hydrothermal coordination by semidefinite programming[J]．IEEE Transactions on Power Systems，2003，18(4)：1515-1522．

[15] Madrigal M，Quintana V H. Semidefinite programming relaxations for {0，l} -power dispatch problems[C]．Proceeding of IEEE-PES 1999 Summer Meeting，Edmonton，Al.，Canada，1999．

[16] Wright S．Primal-dual interior-point methods[M]．Philadelphia：Society for Industrial & Applied Math，1997．

[17] Alizadeh F，Haeberly J-P A，Overton M L．Primal-dual interior-point mathods for semidefinite programming：convergence rates， stability and numerical results[R]．NY： Computer Science Department，New York University，1996．

[18] Mittelmann H D．An independent benchmarking of SDP and SOCP solvers[J]．Mathematical Programming，2003，95(2)：407-430．

[19] Benson S J，Ye Y，Zhang X．Solving large-scale sparse semidefinite programs for combinatorial optimization[J]．SIAM Journal on Optimization，2000，10(2)：443-461．

[20] Yamashita M，Fujisawa K，Kojima M．SDPARA：semidefinite programming algorithm parallel version[J]．Parallel Computing，2003，29(8)：1053-1067．

[21] Wei H，Sasaki H，Kubokawa J，et al．Large scale hydrothermal optimal power flow problems based on interior point nonlinear programming [J]. IEEE Transactions on Power Systems，2000，15(1)：396-403．

[22] Wei H，Sasaki H，Kubokawa J，et al．A interior point nonlinear programming for optimal power flow problems with a novel data structure[J]．IEEE Transactions on Power Systems，1998，13(3)：870-877．

[23] Lov´asz L，Schrijver A．Cones of matrices and set-functions and 0-1 optimization[J]. SIAM Journal on Optimization，1991，1(2)：166-190．

[24] Fujisawa K，Kojima M，Nakata K. Exploiting sparsity in primal-dual interior-point methods for semidefinite programming[J]．Mathematical Programming，1997，79(1-3)：235-253．

[25] Matsuyama S N S，Fujisawa K，Nakata K，et al．SDPA-M (semidefinite programming algorithm in MATLAB) user's manual --- version 1.00[R]．Tokyo，Japan：Department of Mathematical and Computing Sciences，Tokyo Institute of Technology，2000．

[26] Li D，Wu Z，Lee H，et al．Hidden convex minimization[J]．Journal of Global Optimization，2005，31(2)：211-233．

白晓清

收稿日期：2007-07-11。

作者简介：

白晓清(1969—)，女，博士研究生，讲师，研究方向为电力系统最优化，baixq@gxu.edu.cn；

韦 化(1954—)，男，博士，教授，博士生导师，主要研究方向最优化理论及其在电力系统中的应用，涉及最优潮流、电压稳定、状态估计等；

Katsuki Fujisawa(1971—)，男，博士，副教授，主要研究方向为运筹学，半定规划理论及应用，最优化方法及其计算机软件实现。

(编辑 谷 子)