

# 基于 Krylov 子空间中 Lanczos 算法的金属 导体部分元等效电路模型缩减

潘启军<sup>1</sup>, 马伟明<sup>1</sup>, 赵治华<sup>2</sup>, 孟进<sup>1</sup>, 张磊<sup>2</sup>, 张向明<sup>2</sup>

(1. 舰船综合电力技术国防科技重点实验室(海军工程大学), 湖北省 武汉市 430033;  
2. 海军工程大学电力电子技术研究所, 湖北省 武汉市 430033)

## PEEC Model Reduction of a Conductor Based on Lanczos Algorithm in Krylov Subspace

PAN Qi-jun<sup>1</sup>, MA Wei-ming<sup>1</sup>, ZHAO Zhi-hua<sup>2</sup>, MENG Jin<sup>1</sup>, ZHANG Lei<sup>2</sup>, ZHANG Xiang-ming<sup>2</sup>

(1. National Key Laboratory for Vessel Integrated Power System Technology (Naval University of Engineering),  
Wuhan 430033, Hubei Province, China; 2. Institute of Power Electronic Technology,  
Naval University of Engineering, Wuhan 430033, Hubei Province, China)

**ABSTRACT:** A problem of intrinsic numerical ill-conditioning of asymptotic waveform evaluation (AWE) model reduction method is pointed out of partial element equivalent circuit (PEEC) model of a conductor associated with the direct moment matching. The paper proposes that the Lanczos algorithm in Krylov subspace is applied to reduce the high-order original system. The new algorithm transfers the moment direct explicit computation to indirect implicit calculation, and transfers extracting the dominant poles to picking up corresponding dominant eigenvalues, and analyzes the error bound and the automation termination criterion of the system. Then, the resistances and inductances of the reduced decoupled branches are obtained independent of frequency, which is validated by examples. The achievements above avoid the defect only drawing several reduced branches by AWE and settle the base of the widespread application of model reduction methodology.

**KEY WORDS:** partial element equivalent circuit model; numerical ill-conditioning; indirect moment matching; Lanczos algorithm; model reduction

**摘要:**针对金属导体部分元等效电路模型的渐近波形估算(waveform evaluation, AWE)方法缩减的数值病态问题, 提出使用基于 Krylov 子空间的 Lanczos 算法对系统模型进行缩减, 将直接矩量显式计算转化为间接矩量隐式计算, 将主导极点的抽取转化为主导特征值的抽取, 并对系统近似误差限和程序自动终止准则进行了分析计算。在此基础上, 给出了独立于频率之外的简化等效电路模型, 得到了解耦电阻电感

参数, 并通过计算实例验证了该方法的正确性。该文的研究成果克服了 AWE 等直接矩量显式计算只能提取有限几条缩减支路的不足, 极大提高了模型缩减方法的有效性和普适性。

**关键词:** 部分元等效电路模型; 数值病态; 间接矩量匹配; Lanczos 算法; 模型缩减

## 0 引言

对金属导体建模是电磁兼容领域的一大难点, 文献[1-6]利用解析方法对导体阻抗进行了计算和实验, 但解析方法不能给出独立于频率之外的系统模型参数。文献[7-8]对部分元等效电路(partial element equivalent circuit, PEEC)进行了介绍, Shizhong Mei 在文献[9-10]中通过渐近波形估算方法(asymptotic waveform evaluation, AWE)得到了独立于频率之外金属导体的缩减模型电阻与电感参数。如果增大导体尺寸或频率时, 必须增加缩减等效电路的阶数, 此时使用AWE方法就不能满足计算要求, 这是因为AWE是通过对矩量显式计算及匹配<sup>[11]</sup>。AWE的核心是利用了Padé近似, Padé近似就像其强大功能一样充满危险性。假如Padé近似中近似阶数足够高, 就可能避免伪极点, 然而Padé近似的本质却和上述结论相抵触<sup>[12]</sup>。显式计算的矩量由矩阵的幂次方计算得到, 增加幂次方持续计算矩量时, 这一过程很快收敛到最大特征值所对应的特征向量, 最后增大幂次方将不会增加任何额外的信息。这就是AWE等直接矩量显式计算出现病态的原因。可使用多种方法来对病态矩量阵进行改善<sup>[11-19]</sup>, 然而这些措施改善程度有限。

**基金项目:** 国家自然科学基金委员会创新研究群体科学基金(50421703); 国家自然科学基金(50677070)。

Project Supported by National Natural Science Foundation of China (50421703; 50677070).

本文针对 AWE 等直接矩量显式计算的数值病态问题,研究了基于 Krylov 子空间中 Lanczos 算法的模型缩减技术(PVL 算法),克服了 AWE 等直接矩量计算方法只能确定有限几条简化等效支路数的不足,给出了独立于频率之外的等效电路模型。

## 1 基于 Krylov 子空间的 Lanczos 模型缩减

### 1.1 金属导体系统建模

直接矩量技术(direct moment method techniques, MMTs),如 AWE,具有本质上的缺陷,为克服这些缺陷,采用间接矩量技术来对原系统模型进行缩减。

设原系统方程为

$$\begin{cases} \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{G}\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}u(t) \\ \mathbf{y} = \mathbf{L}^T \mathbf{x}(t) + \mathbf{d}u(t) \end{cases} \quad (1)$$

为分析问题方便,一般取  $\mathbf{d}=0$ 。对式(1)在零初始状态下进行拉普拉氏变换并进行麦克劳林展开,可得系统的传递函数为

$$H(s) = \mathbf{Y}(s)/U(s) = \mathbf{L}^T (\mathbf{E} - s\mathbf{A})^{-1} \mathbf{R} = m_0 + m_1 s + m_2 s^2 + \dots + m_i s^i + \dots \quad (2)$$

式中:  $\mathbf{A} = -\mathbf{G}^{-1}\mathbf{C}$ ;  $\mathbf{R} = -\mathbf{G}^{-1}\mathbf{b}$ ; 被匹配矩量  $m_i = \mathbf{L}^T \mathbf{A}^i \mathbf{R}$ 。

图 1 所示为电压  $U(s)$  驱动的矩形截面导体,运用均匀分割将导体矩形截面划分成  $N_w \times N_h$  个相同的单元,各个单元的宽度为  $w$ ,高度为  $h$ ,长度为  $l$ 。 $N_w$  和  $N_h$  足够大,以使电流在各体积元截面上均匀分布。图 2 为对应于图 1 的导体等效电路,其中  $N = N_w N_h$ 。根据欧姆定律,电压降落  $U(s)$  等于每条  $R-L$  支路阻抗和相应电流的乘积,如式(3)所示。

$$U(s) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_N \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} L_{self} & M_{12} & \dots & M_{1N} \\ M_{21} & L_{self} & \dots & M_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{N1} & M_{N2} & \dots & L_{self} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_N \end{bmatrix} \quad (3)$$

式中:  $i_1, i_2, \dots, i_N$  为各支路的电流;  $r$  为分割单元电阻;  $L_{self}$  为单元自感;  $M_{ij}$  为两单元的互感。将式(3)用矩阵表示为

$$U(s)\mathbf{l}_N = r\mathbf{E}_N \mathbf{I} + s\mathbf{L}\mathbf{I} \quad (4)$$

式中:  $\mathbf{l}_N$  为  $N \times 1$  维全 1 列向量;  $\mathbf{E}_N$  为  $N \times N$  维单位阵;  $\mathbf{I}$  为式(3)中的电流列向量;  $\mathbf{L}$  为式(3)中的自感/互感电感矩阵。

根据式(4)可得原始电路总导纳的表达式为

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{l}_N^T (r\mathbf{E}_N + s\mathbf{L})^{-1} \mathbf{l}_N \quad (5)$$

比较式(5)和式(2)可得,  $\mathbf{A} = -\mathbf{L}/r$ ,  $\mathbf{R} = \mathbf{l}_N/r$ 。令缩减后简化等效解耦电路支路数为  $n(n \ll N)$ , 则

可根据基于 Krylov 子空间的 Lanczos 模型缩减技术对系统进行缩减处理,求解出缩减系统解耦后的各支路电阻电感参数。

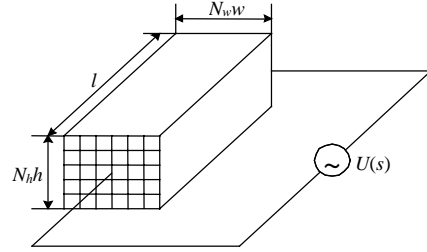


图 1 电压  $U(s)$  驱动的导体  
Fig.1 A rectangular conductor

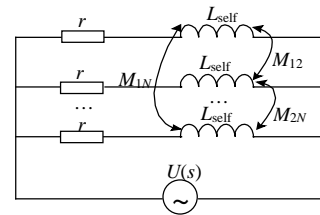


图 2 耦合 R-L 电路  
Fig.2 Coupling R-L circuit

### 1.2 Krylov 子空间 Lanczos 方法(PVL)对特征值的迭代计算

Lanczos 算法不对矩量直接计算,从而避免数值病态问题。另外, Lanczos 算法不仅可得到高阶近似和更高的精度,还可通过计算误差限来辨识原系统的真正极点,并且可给出自动终止准则,而其计算量和 AWE 的计算量相当。Lanczos 算法如下:

- ① Lanczos 开始函数 /原系统的各矩阵赋值/;
- ②  $\rho_1 = \|\mathbf{R}\|_2$ ,  $\eta_1 = \|\mathbf{l}\|_2$ ,  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{R}/\rho_1$ ,  $\mathbf{w}_1 = \mathbf{l}/\eta_1$ ,  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{w}_0 = 0$ ,  $\mathbf{w}_1 = \mathbf{l}/\eta_1$ ,  $\delta_0 = 1$ ;
- ③ For  $j = 1$  to  $n$ , /  $n$  为期望降阶阶数/;
- ④  $\delta_j = \mathbf{w}_j^T \mathbf{v}_j$ ,  $\alpha_j = \mathbf{w}_j^T \mathbf{A} \mathbf{v}_j / \delta_j$ ,  $\beta_j = \delta_j \eta_j / \delta_{j-1}$ ,  $\gamma_j = \delta_j \rho_j / \delta_{j-1}$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{v}_j - \alpha_j \mathbf{v}_j - \beta_j \mathbf{v}_{j-1}$ ,  $\mathbf{w} = \mathbf{A}^T \mathbf{w}_j - \alpha_j \mathbf{w}_j - \gamma_j \mathbf{w}_{j-1}$ ,  $\rho_{j+1} = \|\mathbf{v}\|_2$ ,  $\eta_{j+1} = \|\mathbf{w}\|_2$ ,  $\mathbf{v}_{j+1} = \mathbf{v}/\rho_{j+1}$ ,  $\mathbf{w}_{j+1} = \mathbf{w}/\eta_{j+1}$ ;
- ⑤ 结束 Lanczos 算法。

由 Lanczos 算法产生的量具有以下特征:

- (1) 向量  $\{\mathbf{v}_j\}_{j=1}^{n+1}$  和  $\{\mathbf{w}_j\}_{j=1}^{n+1}$  为双正交关系, 即有

$$\mathbf{w}_j^T \mathbf{v}_k = \begin{cases} \delta_j, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases} \quad j, k = 1, 2, \dots, n+1$$

- (2) 三对角矩阵  $\mathbf{T}_n$  和  $\bar{\mathbf{T}}_n$  可表示为

$$\mathbf{T}_n = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & 0 & \dots & 0 \\ \rho_2 & \alpha_2 & \beta_3 & \ddots & \vdots \\ 0 & \rho_3 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \beta_n \\ 0 & \dots & 0 & \rho_n & \alpha_n \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\bar{\mathbf{T}}_n = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \eta_2 & \alpha_2 & \gamma_3 & \ddots & \vdots \\ 0 & \eta_3 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \gamma_n \\ 0 & \cdots & 0 & \eta_n & \alpha_n \end{bmatrix} \quad (7)$$

2个三对角矩阵和矩阵  $\mathbf{A}$  之间的关系为

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{V}_n = \mathbf{V}_n\mathbf{T}_n + [0 \ \cdots \ 0 \ \mathbf{v}_{n+1}] \rho_{n+1} = \\ \quad \mathbf{V}_n\mathbf{T}_n + \rho_{n+1}\mathbf{v}_{n+1}\mathbf{e}_n^T \\ \mathbf{A}^T\mathbf{W}_n = \mathbf{W}_n\bar{\mathbf{T}}_n + [0 \ \cdots \ 0 \ \mathbf{w}_{n+1}] \eta_{n+1} = \\ \quad \mathbf{W}_n\bar{\mathbf{T}}_n + \eta_{n+1}\mathbf{v}_{n+1}\mathbf{e}_n^T \end{cases} \quad (8)$$

其中,  $\mathbf{e}_n = [0 \ \cdots \ 0 \ 1]^T$ ;

$$\begin{cases} \mathbf{V}_n = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \cdots \ \mathbf{v}_n] \\ \mathbf{W}_n = [\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \cdots \ \mathbf{w}_n] \end{cases} \quad (9)$$

两矩阵的列向量刚好为 Lanczos 向量。

(3) 三对角矩阵  $\mathbf{T}_n$  和  $\bar{\mathbf{T}}_n$  满足

$$\bar{\mathbf{T}}_n = \mathbf{D}_n\mathbf{T}_n\mathbf{D}_n^{-1} \quad (10)$$

其中,

$$\mathbf{D}_n = \mathbf{W}_n^T\mathbf{V}_n = \text{diag}([\delta_1 \ \delta_2 \ \cdots \ \delta_n]) \quad (11)$$

(4) Lanczos算法的关键特征为它产生了相对于大型矩阵  $\mathbf{A}$  的一个非常有用的低维近似  $\mathbf{T}_n$ 。矩阵  $\mathbf{T}_n$  实际上为矩阵  $\mathbf{A}$  的在 Krylov 子空间上的一种斜投影, 相关的 2 个 Krylov 子空间分别表示为  $\mathbf{K}_n(\mathbf{A}, \mathbf{v}_1, n) = \text{ColumnSpan}([\mathbf{v}_1 \ \mathbf{A}\mathbf{v}_1 \ \cdots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{v}_1])$  和  $\mathbf{K}_n(\mathbf{A}^T, \mathbf{w}_1, n) = \text{ColumnSpan}([\mathbf{w}_1 \ \mathbf{A}^T\mathbf{w}_1 \ \cdots \ (\mathbf{A}^T)^{n-1}\mathbf{w}_1])$ 。

注意到向量  $\{\mathbf{v}_j\}_{j=1}^{n+1}$  和  $\{\mathbf{w}_j\}_{j=1}^{n+1}$  正好和 2 个 Krylov 子空间  $\mathbf{K}_n(\mathbf{A}, \mathbf{v}_1, n)$  和  $\mathbf{K}_n(\mathbf{A}^T, \mathbf{w}_1, n)$  分别等效。  $\mathbf{T}_n$  为大型矩阵  $\mathbf{A}$  在 Krylov 子空间  $\mathbf{K}_n(\mathbf{A}, \mathbf{v}_1, n)$  上的投影结果, 并且和  $\mathbf{K}_n(\mathbf{A}^T, \mathbf{w}_1, n)$  正交。  $\mathbf{T}_n$  近似即使在  $n \ll N$  的情况下效果也很好 ( $N \times N$  为矩阵  $\mathbf{A}$  的维数)。实际上, Lanczos 算法通常使用在非常大的矩阵缩减情况下, 特别典型的情况就是  $n \ll N$ 。

通过运行 Lanczos 算法和对 Lanczos 矩阵  $\mathbf{T}_n$  的特征值分解计算得到系统缩减模型, 求解过程如下:

(1) 运行 Lanczos 程序得到三对角矩阵  $\mathbf{T}_n$  和  $\bar{\mathbf{T}}_n$ 。

(2) 计算特征分解  $\mathbf{T}_n = \mathbf{S}_n \text{diag}([\lambda_1 \ \lambda_1 \ \cdots \ \lambda_n]) \mathbf{S}_n^{-1}$ ,

其中  $\mathbf{u} = \mathbf{S}_n^T \mathbf{e}_1$  和  $\mathbf{v} = \mathbf{S}_n^T \mathbf{e}_1$ 。

(3) 根据  $\mathbf{T}_n$  计算极点和余量:

$$\begin{cases} p_j = 1/\lambda_j \\ k_j = \mathbf{l}^T \mathbf{R} \mathbf{u}_j \mathbf{v}_j / l_j \end{cases} \quad j=1, 2, \dots, n$$

(4) 根据  $\bar{\mathbf{T}}_n$  计算零点  $\mathbf{H}_n(s) = \mathbf{l}^T \mathbf{R} \frac{\det(\mathbf{I} - s\mathbf{T}_n)}{\det(\mathbf{I} - s\bar{\mathbf{T}}_n)}$ 。

$\mathbf{H}_n$  零点恰好是  $\mathbf{T}_n$  特征值的倒数。矩阵  $\mathbf{T}_1$  为  $\mathbf{T}$  去掉第 1 行和第 1 列后的矩阵。

### 1.3 极点近似误差限及终止准则

#### 1.3.1 极点近似误差限

$\mathbf{H}_n(s)$  极点的准确度可通过检查  $\mathbf{T}_n$  特征值和  $\mathbf{A}$  的特征值符合的好坏来确定。令  $\lambda_j$  为  $\mathbf{T}_n$  的任一特征值,  $\mathbf{s}_j$  为对应的特征向量, 则有

$$\mathbf{T}_n \mathbf{s}_j = \lambda_j \mathbf{s}_j \quad (12)$$

令  $\mathbf{z}_j = \mathbf{V}_n \mathbf{s}_j$  (13)

式中  $\mathbf{V}_n$  为式(9)中的 Lanczos 向量所构成的矩阵。根据式(12)、(13), 利用式(8)中第 1 个关系式可得

$$\mathbf{A} \mathbf{z}_j - \lambda_j \mathbf{z}_j = \mathbf{v}_{n+1} \rho_{n+1} \mathbf{s}_{nj} \quad (14)$$

式中  $\mathbf{s}_{nj}$  为  $\mathbf{s}_j$  向量的最后一个数, 对式(14)两边取范数, 由于  $\|\mathbf{v}_{n+1}\|_2 = 1$ , 则得

$$\frac{\|\mathbf{A} \mathbf{z}_j - \lambda_j \mathbf{z}_j\|_2}{\|\mathbf{A}\|_2 \|\mathbf{s}_j\|_2} = \frac{\rho_{n+1} |\mathbf{s}_{nj}|}{\|\mathbf{A}\|_2 \|\mathbf{s}_j\|_2} \quad (15)$$

式中

$$\|\mathbf{A}\|_2 \geq \max\{\|\mathbf{A} \mathbf{v}_j\|_2, \|\mathbf{A}^T \mathbf{w}_j\|_2\} = n(\mathbf{A}) \quad (16)$$

联立式(15)和(16)可得

$$\frac{\|\mathbf{A} \mathbf{z}_j - \lambda_j \mathbf{z}_j\|_2}{\|\mathbf{A}\|_2 \|\mathbf{s}_j\|_2} \leq \frac{\rho_{n+1} |\mathbf{s}_{nj}|}{n(\mathbf{A}) \|\mathbf{s}_j\|_2} = \mathbf{Q}_j \quad (17)$$

在 Lanczos 算法中, 使用  $\mathbf{Q}_j$  作为检查极点  $1/\lambda_j$  是否收敛到  $\mathbf{H}(s)$  真极点的判据。极点的近似准确度或好或坏还可参考如下的方法: 当极点的频率高于所关心频段的最高频率时, 可将该极点舍弃; 如果与极点对应的余量和其它余量相比要小得多时(小好几个数量级), 也可将该极点舍弃; 如果已知系统是稳定的, 则可以舍弃不稳定的极点, 即实部在右半平面的点。

#### 1.3.2 自动终止准则的推导

基于矩阵计算的原电路传函和降阶模型传函之间的误差揭示了 Lanczos 算法收敛的本质特性, 在保证所期望近似精度的前提下自动终止 Lanczos 过程。

设  $\mathbf{H}_n$  为近似低阶系统传函, 根据文献[20]有

$$|\mathbf{H}(s) - \mathbf{H}_n(s)| \leq \left| \mathbf{l}^T \mathbf{R} \right| \left| \frac{\rho_{n+1} \eta_{n+1}}{\delta_n} \right| \left| \frac{s^2 \tau_{1n}(s) \tau_{n1}(s)}{1 - |s| \|\mathbf{A}\|} \right| \quad (18)$$

式中:  $\tau_{1n}(s) = s^{n-1}(\beta_2 \beta_3 \cdots \beta_n) / \det(\mathbf{I} - s\mathbf{T}_n)$ ;  $\tau_{n1}(s) = s^{n-1}(\rho_2 \rho_3 \cdots \rho_n) / \det(\mathbf{I} - s\bar{\mathbf{T}}_n)$ 。

设  $e_{tol}$  为容许误差, 则程序自动终止准则为

$$\left| \mathbf{I}^T \mathbf{R} \right| \left| \frac{\rho_{n+1} \eta_{n+1}}{\delta_n} \right| \left| \frac{s^2 \tau_{1n}(s) \tau_{n1}(s)}{1 - |s| \|\mathbf{A}\|} \right| < e_{tol} \quad (19)$$

由于  $\mathbf{H}(s) = \mathbf{I}^T (\mathbf{I} - s\mathbf{A})^{-1} \mathbf{R}$ , 而  $\mathbf{H}(s)$  在解收敛时为原系统很好的近似, 因此有  $\|\mathbf{H}(s)\| \approx \|\mathbf{H}_n(s)\|$ , 则  $\|(\mathbf{I} - s\mathbf{A})^{-1}\|$  可近似取为

$$\|(\mathbf{I} - s\mathbf{A})^{-1}\| \approx \|\mathbf{H}_n(s)\| (\|\mathbf{I}^T\| \|\mathbf{R}\|) \quad (20)$$

式(19)变为

$$\left| \mathbf{I}^T \mathbf{R} \right| \left| \frac{\rho_{n+1} \eta_{n+1}}{\delta_n} \right| \left| s^2 \tau_{1n}(s) \tau_{n1}(s) \right| \frac{\|\mathbf{H}_n(s)\|}{\|\mathbf{I}^T\| \|\mathbf{R}\|} < e_{tol} \quad (21)$$

基本上, 误差随频率的增加呈上升趋势, 当所关心的频率的上限为  $s_{max}$ , 仅对频率点  $s_{max}$  的误差进行计算, 作为程序自动终止的判据。

## 2 计算实例及分析

### 2.1 AWE 及 Lanczos 算法得到的极点、余量、支路电阻及电感

以微米级金属导体为例说明 AWE 的数值病态问题, 再以毫米级金属导体为例进行基于 Lanczos 算法的模型缩减。金属导体电导率为  $\sigma = 3.5 \times 10^7$  S/m, 磁导率为  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  H/m。

金属导体长 20  $\mu\text{m}$ , 宽 10  $\mu\text{m}$ , 厚 1  $\mu\text{m}$ , 表 1 为渐近波形 AWE 计算的极点、余量、支路电阻与电感。对于 RL 电路, 根据 AWE 的计算公式可知, 只有当极点和余量均为负实数时, 降阶系统的解才是正确的。表 1 所示的结果表明: 当支路数为 3 时, 所求取的支路电阻与电感均为正值, 有物理意义并为降阶系统的正确解; 当支路数取为 10 时, 极点出现了正实部, 电阻与电感为复数, 没有物理意义。

表 1 AWE 计算的极点、余量及支路电阻与电感

Tab. 1 Poles, residues, branch resistances and inductances calculated from AWE

支路数	极点	余量	电阻/ $\Omega$	电感/H
3	$-1.551 4 \times 10^{11}$	$-2.303 6 \times 10^{-2}$	$4.341 0 \times 10^1$	$2.798 1 \times 10^{-10}$
	$-4.320 8 \times 10^{10}$	$-1.175 8 \times 10^{-1}$	8.504 8	$1.968 4 \times 10^{-10}$
	$-7.284 8 \times 10^9$	$-1.735 9 \times 10^1$	$5.760 6 \times 10^{-2}$	$7.907 6 \times 10^{-12}$
10	极点		余量	
	$-9.221 8 \times 10^{11}$	$2.349 1 \times 10^3 + 1.019 7 \times 10^{-12}i$		
	$-1.080 9 \times 10^{11} + 6.337 8 \times 10^{10}i$	$-1.034 1 \times 10^3 - 2.304 2 \times 10^3i$		
	$-1.080 9 \times 10^{11} - 6.337 8 \times 10^{10}i$	$-1.034 1 \times 10^3 + 2.304 2 \times 10^3i$		
	$-3.838 1 \times 10^{10}$	$-2.773 2 \times 10^2 - 3.805 3 \times 10^{-14}i$		
	$1.594 8 \times 10^{10}$	$-4.254 8 - 1.753 4 \times 10^{-16}i$		
	$-7.242 3 \times 10^9$	$-1.665 8 \times 10^1 + 6.253 9 \times 10^{-18}i$		
	$-2.227 0 \times 10^9 + 7.825 9 \times 10^9i$	$-9.069 3 \times 10^2 + 1.330 8 \times 10^{-1}i$		
	$-2.227 0 \times 10^9 - 7.825 9 \times 10^9i$	$-9.069 3 \times 10^{-2} - 1.330 8 \times 10^{-1}i$		
	$5.074 9 \times 10^9 + 2.255 8 \times 10^9i$	$-1.194 7 \times 10^{-3} + 1.342 1 \times 10^{-2}i$		
$5.074 9 \times 10^9 - 2.255 8 \times 10^9i$	$-1.194 7 \times 10^{-3} - 1.342 1 \times 10^{-2}i$			

总之, 由于渐近波形计算方法本质上的数值病态问题, 使求取的正确极点值相当有限, 一般只有几个, 本例中最多只能求取 4 个正确极点。

对于较小的微米级截面导体, 只需使用较少的支路数就可以描述所关心频段的系统的频率响应。对较大的毫米级截面导体进行分析, 导体长 1 m, 宽 40 mm, 厚 6 mm。频率范围取为 0.1~100 kHz, 厚度方向剖分数取为 40 以上, 宽度方向剖分数为 270 以上, 以确保剖分单元尺寸不大于 0.15 mm。由于直接利用体积元方法对不同频率逐点计算导体的电阻及电感太慢, 这里采用直接对角解耦方法来计算系统的体积元频率特性, 两者是等效的。表 2 中给出了当支路数分别为 3、5、10 时, 由 Lanczos 算法所得到的系统的极点、余量、支路电阻及电感。

表 2 Lanczos 算法计算的极点、余量及支路电阻与电感  
Tab. 2 Poles, residues, branch resistances and inductances calculated from Lanczos algorithm

支路数	极点	余量	电阻/ $\Omega$	电感/pH
3	$-1.387 1 \times 10^2$	$1.162 9 \times 10^6$	$1.192 8 \times 10^{-4}$	$8.599 2 \times 10^{-7}$
	$-1.822 0 \times 10^3$	$2.455 5 \times 10^4$	$7.420 3 \times 10^{-2}$	$4.072 6 \times 10^{-5}$
	$-7.545 1 \times 10^3$	$2.070 0 \times 10^4$	$3.644 9 \times 10^{-1}$	$4.830 8 \times 10^{-5}$
5	$-1.387 1 \times 10^2$	$1.162 9 \times 10^6$	$1.192 8 \times 10^{-4}$	$8.599 2 \times 10^{-7}$
	$-1.808 2 \times 10^3$	$2.364 7 \times 10^4$	$7.646 8 \times 10^{-2}$	$4.228 9 \times 10^{-5}$
	$-4.339 4 \times 10^3$	$8.067 1 \times 10^3$	$5.379 1 \times 10^{-1}$	$1.239 6 \times 10^{-4}$
	$-3.132 2 \times 10^4$	$1.677 6 \times 10^4$	1.867 1	$5.961 0 \times 10^{-5}$
	$-9.066 5 \times 10^3$	$6.783 1 \times 10^3$	1.336 6	$1.474 3 \times 10^{-4}$
10	$-1.387 1 \times 10^2$	$1.156 2 \times 10^6$	$1.199 7 \times 10^{-4}$	$8.649 1 \times 10^{-7}$
	$-1.387 1 \times 10^2$	$6.714 7 \times 10^3$	$2.065 7 \times 10^{-2}$	$1.489 3 \times 10^{-4}$
	$-1.808 2 \times 10^3$	$2.364 7 \times 10^4$	$7.646 9 \times 10^{-2}$	$4.228 9 \times 10^{-5}$
	$-4.324 8 \times 10^3$	$7.871 6 \times 10^3$	$5.494 1 \times 10^{-1}$	$1.270 4 \times 10^{-4}$
	$-7.769 5 \times 10^3$	$4.085 4 \times 10^3$	1.901 8	$2.447 7 \times 10^{-4}$
	$-1.220 7 \times 10^4$	$2.629 4 \times 10^3$	4.642 5	$3.803 1 \times 10^{-4}$
	$-1.829 0 \times 10^4$	$2.612 5 \times 10^3$	7.000 9	$3.827 7 \times 10^{-4}$
	$-2.190 9 \times 10^5$	$5.755 7 \times 10^3$	$3.806 4 \times 10^1$	$1.737 4 \times 10^{-4}$
	$-6.259 1 \times 10^4$	$4.063 5 \times 10^3$	$1.540 3 \times 10^1$	$2.460 9 \times 10^{-4}$
	$-2.689 3 \times 10^4$	$9.344 8 \times 10^3$	$2.877 9 \times 10^0$	$1.070 1 \times 10^{-4}$

图 3 为 3、5、10、20 支路简化系统和体积元方法得到的系统频率特性的比较。当支路数较少为 3 或 5 支路时, 简化系统不足以描述实际系统的高频特性; 当支路数增加为 10 时, 简化系统的频率特性和实际系统的差别不大; 支路数高于 10 时, 简化系统的频率特性和实际系统的基本相同; 当支路数取为 20 时, 简化系统的频率特性和实际系统的几乎完全相同。

由于剖分总数实际取为 12 000, 系统的实际极点、余量、支路电阻及电感总共各有 12 000 个, 而采用 Lanczos 算法得到的简化电路仅用十多条支路在上述所关心频段内就能准确描述实际系统的频率

特性。这不仅节省了计算时间和计算机内存资源，而且便于和各种实用软件兼容(如 Matlab、Pspice 及 PSCAD 等)，因此具有相当重要的意义。

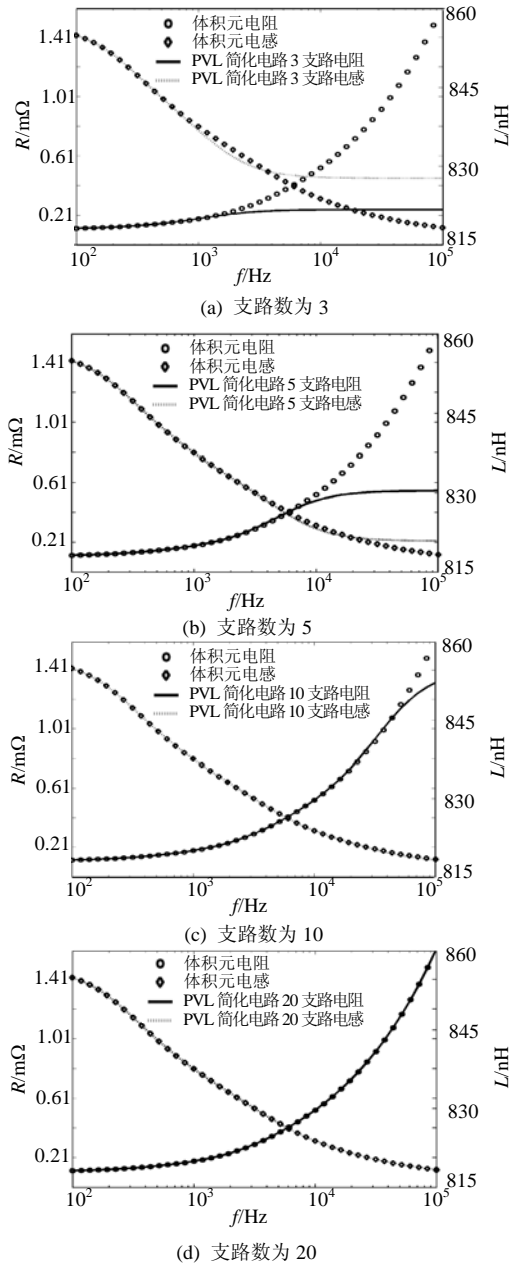


图3 Lanczos 算法(PVL)与对角化解耦体积元方法得到的电阻电感频率特性

Fig. 3 Resistances and inductances by Lanczos algorithm(PVL) and diagonalization volume element method

2.2 Lanczos 算法的极点质量及误差分析

(1) 极点质量分析。支路数取 15 时的极点、余量及极点质量如表 3 所示。根据表 3 可知，只需确定极点质量的取舍上限，再结合余量的相对大小，就可得到各主要的极点值。一般而言，当支路数不是特别高时，所计算的极点准确性均较好。

表 3 Lanczos 算法计算的极点、余量及极点质量(支路数为 15)

Tab. 3 Poles, residues and qualities calculated from Lanczos algorithm

极点	余量	极点质量
$-4.324 8 \times 10^3$	$7.871 6 \times 10^3$	$5.178 3 \times 10^{-11}$
$-7.769 5 \times 10^3$	$4.085 4 \times 10^3$	$2.307 9 \times 10^{-8}$
$-1.219 8 \times 10^4$	$2.606 9 \times 10^3$	$1.856 3 \times 10^{-6}$
$-1.764 6 \times 10^4$	$1.971 7 \times 10^3$	$4.350 7 \times 10^{-5}$
$-5.599 7 \times 10^5$	$3.515 7 \times 10^3$	$3.033 9 \times 10^{-4}$
$-1.458 7 \times 10^5$	$3.425 5 \times 10^3$	$6.405 4 \times 10^{-4}$
$-7.642 6 \times 10^4$	$2.636 5 \times 10^3$	$8.142 0 \times 10^{-4}$
$-4.164 7 \times 10^4$	$1.895 1 \times 10^3$	$8.423 5 \times 10^{-4}$
$-2.467 5 \times 10^4$	$5.909 0 \times 10^3$	$3.201 7 \times 10^{-4}$
$-2.868 8 \times 10^4$	$3.506 6 \times 10^3$	$7.023 5 \times 10^{-4}$
$-1.808 2 \times 10^3$	$2.364 7 \times 10^4$	$1.726 5 \times 10^{-12}$
$-1.809 6 \times 10^3$	$1.650 1 \times 10^4$	$2.085 6 \times 10^{-3}$
$-1.387 1 \times 10^2$	$8.058 6 \times 10^5$	$3.878 8 \times 10^{-12}$
$-1.387 1 \times 10^2$	$3.570 4 \times 10^5$	$5.827 3 \times 10^{-12}$
$-1.387 1 \times 10^2$	$-4.517 8 \times 10^{-29}$	$5.217 5 \times 10^{-3}$

(2) 误差分析及自动终止准则的应用。本例中由式(19)和(21)计算的误差差别不大，下面给出的图表均由式(19)得到。支路数分别取 1、5、10 和 15，相对应的误差曲线如图 4 所示。

根据图 4 可得，除支路数为 1 外，各支路误差曲线基本上随频率的增加逐渐增加。实际上要描述系统一定频率范围内的频率特性，至少需要 2 条支路以上，因此我们不考虑支路数为 1 的情况。由于误差随频率逐渐增加，因此在确定收敛支路时误差计算的频率点一般取为所关心频段的最高频率，这就避免了对每个频率点都进行误差计算，大大减少了计算量，节省了计算时间。如有必要，当然也可取两点或多点频率进行误差计算。

表 4 为容许误差取不同值时自动终止时的支路数。由表 4 可知，当容许误差取为  $1 \times 10^{-5}$  时，收敛支路数为 5，当容许误差取为  $1 \times 10^{-7}$  时，收敛支路数为 15。显然，随着容许误差的逐渐减小，所需要的支路数就越多。

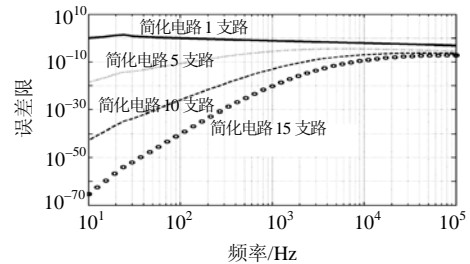


图 4 误差曲线图 Fig. 4 Error curves

表 4 容许误差取不同值时自动终止时的支路数  
Tab. 4 Automation termination branches of different tolerances

容许误差	自动终止时误差	自动终止支路数
$1 \times 10^{-2}$	$7.822 2 \times 10^{-4}$	1
$1 \times 10^{-3}$	$7.822 2 \times 10^{-4}$	1
$1 \times 10^{-4}$	$9.268 4 \times 10^{-5}$	2
$1 \times 10^{-5}$	$3.466 7 \times 10^{-6}$	5
$1 \times 10^{-6}$	$5.583 1 \times 10^{-7}$	9
$1 \times 10^{-7}$	$6.521 2 \times 10^{-8}$	15

### 3 结论

指出了 AWE 等直接矩量显式计算的数值病态问题, 提出了基于 Krylov 子空间中 Lanczos 算法的模型缩减方法。Lanczos 算法的模型缩减方法主要包括 4 个步骤: 根据研究对象求解出所需处理的系统矩阵; 对该矩阵进行双正交变换, 得到相对应的降维三对角矩阵; 根据三对角矩阵求解出与原系统相对应的主导极点和余量, 从而导出简化等效电路模型参数; 对极点近似误差限和程序自动终止准则进行分析。Lanczos 算法的模型缩减方法将直接矩量显式计算转化为间接矩量隐式计算, 将主导极点的抽取转化为相对应的主导特征值的抽取, 避免了 AWE 等直接矩量显式计算方法只能提取有限几条简化支路的缺陷, 极大提高了模型简化技术的有效性和普适性。

### 参考文献

- [1] Coperich K M, Ruehli A E. Enhanced skin effect for partial-element equivalent-circuit(PEEC) models[J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 2000, 48(9): 1435-1442.
- [2] Xu M, He L. An efficient model for frequency-dependent on-chip inductance[C]. Conference on Great Lakes Symposium on VLSI, West Lafayette, Indiana, 2001.
- [3] Tsuk M J, Kong A J. A hybrid method for the calculation of the resistance and inductance of transmission lines with arbitrary cross sections[J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 1991, 39(8): 1338-1347.
- [4] Zhao Zhihua, Ma Weiming. AC impedance of an isolated flat conductor[J]. IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, 2002, 44(3): 482-486.
- [5] 赵治华, 马伟明. 钢板地阻抗的频率特性[J]. 中国电机工程学报, 2003, 23(8): 119-124.  
Zhao Zhihua, Ma Weiming. Frequency characteristic of ground impedance for a flat steel plane[J]. Proceeding of the CSEE, 2003, 23(8): 119-124(in Chinese).
- [6] 赵治华. 钢板地阻抗计算方法研究与直流系统干扰分析[D]. 北京: 清华大学, 2006.  
Zhao Zhihua. Research on calculation method of steel ground impedance and electromagnetic conductive interference of DC system [D]. Beijing: Tsinghua University, 2006(in Chinese).
- [7] 戚哲龙, 钟玉林, 孙旭东, 等. 用于传导电磁干扰分析的接地回路模型与参数[J]. 中国电机工程学报, 2005, 25(7): 156-161.

- Xian Zhelong, Zhong Yulin, Sun Xudong, et al. Grounding circuit model and parameters for conducted EMI analysis[J]. Proceedings of the CSEE, 2005, 25(7): 156-161.
- [8] 曾翔君, 陈继明, 杨旭, 等. 基于局部元等效电路原理对混合封装电力电子集成模块内互感耦合的研究[J]. 中国电机工程学报, 2004, 24(7): 133-139.  
Zeng Xiangjun, Chen Jiming, Yang Xu, et al. Mutual inductance coupling research based on PEEC theory inside hybrid IPREM [J]. Proceedings of the CSEE, 2004, 24(7): 133-139(in Chinese).
  - [9] Mei Shizhong, Ismail Y I. Modeling skin and proximity effects with reduced realizable RL circuits[J]. IEEE Transactions on Very Large Scale Integration(VLSI) System, 2004, 12(4): 437-447.
  - [10] Mei Shizhong, Ismail Y I. Modeling skin effect with reduced decoupled R-L circuits[C]. The International Symposium on Circuits and Systems, Bangkok, Thailand, 2003.
  - [11] Pillage L T, Rohrer R A. Asymptotic waveform evaluation for timing analysis[J]. IEEE Transactions Computer-Aided Design, 1990, 9(4): 352-366.
  - [12] Pillage L T, Rohrer R A, Visweswariah C. Electronic circuit and system simulation methods[M]. New York: McGraw-Hill, Inc., 1995.
  - [13] Rodney Daryl Slone, Robert Loe, Lee JinFa. Multipoint galerkin asymptotic waveform evaluation for model order reduction of frequency domain FEM electromagnetic radiation problems[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2001, 49(10): 1504-1513.
  - [14] Celik M, Ocali O, Tan M A, et al. Improving AWE accuracy using multipoint Pade approximation[C]. The IEEE Int. Symp. on Circuits and Systems, London, UK, 1994.
  - [15] Ismail Y I. Efficient model order reduction via multi-node moment matching[C]. The IEEE Conf. on Computer Aided Design, San Jose, 2002.
  - [16] Chiprout E, Hansruedi Heeb, Michel S Nakhla, et al. Simulating 3-D retarded interconnect models using complex frequency hopping (CFH)[C]. The IEEE Int. Conf. on Computer Aided Design, Santa Clare, CA, 1993.
  - [17] Eli Chiprout, Michel Nakhla. Transient waveform estimation of high-speed MCM networks using complex frequency hopping[C]. The IEEE Int. Conf. on Multi-Chip Module, Santa Cruz, California, 1993.
  - [18] Achar R, Nakhla M S. Simulation of high-speed interconnects [J]. Proceedings of the IEEE, 2001, 89(5): 693-728.
  - [19] Chiprout E, Nakhla M S. Analysis of interconnect networks using complex frequency hopping(CFH)[J]. IEEE Transactions Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, 1995, 14(2): 186-200.
  - [20] Bai Zhaojun, Slone R D, Smith W T, et al. Error bound for reduced system model by padé approximation via the lanczos process [J]. IEEE Transactions on Computer-aided Design of Integrated Circuits and Systems, 1999, 18(2): 133-141.



潘启军

收稿日期: 2007-12-29。

作者简介:

潘启军(1972—), 男, 博士, 主要从事电力电子应用与电磁兼容性研究, pqijun@163.com; panqijun@sina.com;

马伟明(1960—), 男, 中国工程院院士, 从事独立电源系统、电力电子及电力系统电磁兼容性等方面的研究;

赵治华(1962—), 男, 教授, 从事电磁场计算及电磁兼容等方面的研究。

(责任编辑 王剑乔)