

# 弧齿圆锥齿轮传动的振动分析

方宗德 高平

(西北工业大学 1004 教研室, 西安, 710072)

宋乐民

(黎明航空发动机制造公司, 沈阳, 110043)

## VIBRATION ANALYSIS IN TRANSMISSION OF SPIRAL BEVEL GEARS

Fang Zongde, Gao Ping

(Faculty 1004 of Northwestern Polytechnical University, Xi'an, 710072)

Song Lemin

(Liming Aeroengine Manufacturing Company, Shenyang, 110043)

**摘要** 考虑了齿轮体在各个方向的线振动和角振动, 以及齿轮辐板和输入轴、输出轴的扭转变形, 以弧齿锥齿轮传动系为对象, 建立了一个多刚体多自由度的振动系统模型, 推导了这一系统的参数激励微分方程组。再将方程组转化为线性定常的形式, 并将参数激励转化为外激励, 成功地求解了弧齿锥齿轮传动系统的振动过程。

**关键词** 螺旋线-齿轮, 振动试验, 激励-参数化法

**中图分类号** V232.8, O327

**Abstract** A dynamic model of transmission of spiral bevel gears is established. The model involves linear and angular vibrations of gears in every direction. Torsional deformations of webs of gears and input-, output-shafts are considered. The governing equations of this model derived in this paper are multi-freedom, time-varying and parametric differential equations. Further, after neglecting the second order small components, they are transformed into constant coefficient equations, and solved successfully. The dynamic responses and loads on gears in transmission are obtained. The dynamic loads at variable speeds of gears make up the dynamic behaviour of this pair of gears, which provides the basis for structural vibrations and strength analysis of spiral bevel gears.

**Key words** spirals-gear, vibration tests, excitation-parameterization

在航空发动机减速器中, 弧齿锥齿轮经常处于高速工作状态, 因此, 必须考虑齿轮振动破坏的可能性。根据研究, 弧齿锥齿轮断裂的主要原因是轮齿动载荷以及结构振动(行波振动)产生的复合动应力<sup>[1,2]</sup>。轮齿动载荷与结构振动都来源于齿轮传动系统高速运转时的系统振动。

弧齿锥齿轮啮合传动是较复杂的一种啮合传动, 美国 NASA 发表过少量报告<sup>[3,4]</sup>, 在此基础上, 本文建立了包括齿轮刚体在各个方向的位移以及考虑辐板和轴变形的系统扭振的齿轮传动动力学多自由度模型; 求解了该系统的参变微分方程组, 求得了系统在工作状态下的响应。

1992年9月16日收到, 1993年2月16日收到修改稿

### 1 齿轮传动系统的振动模型

齿轮系统的振动模型如图 1 所示，假定轮齿间啮合力的合力  $p_n$  始终作用在齿宽中部节点  $M$  上（见图 1），该齿面法向力  $p_n$  可以分解为周向力  $p_t$ ，径向力  $p_r$  和轴向力  $p_a$ 。考虑到航空齿轮多采用薄辐板结构，由于辐板的扭转变形，齿圈和轮毂间存在相对扭振，因此，每个齿轮的振动自由度有  $\theta_i$ ：齿圈周向微角位移； $\theta_{hi}$ ：轮毂微角位移； $x_{ti}$ ：齿轮中心的周向（ $t$  向）位移； $x_{ri}$ ：齿轮中心的径向（ $r$  向）位移； $x_{ai}$ ：齿轮中心的轴向位移； $i$ 。（下标）= 1、2 分别表示主、被动齿轮。加上齿轮系统的输入和输出质量的微角位移  $\theta_1$  和  $\theta_1$ ，系统共有 12 个自由度。

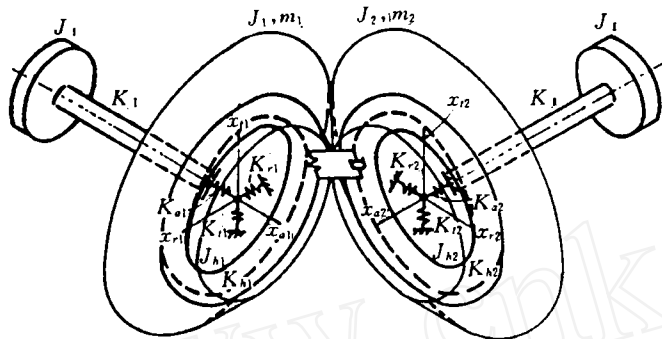


图 1 齿轮系统的振动模型

在两个齿轮间，有啮合刚度  $K$  和阻尼  $C$ ， $K$  是啮合位置（齿轮转角）的函数，当齿轮匀速转动时， $K$  是时间的周期函数。阻尼系数  $C$  可近似作为常数，在齿轮系统振动分析中，阻尼比常取作 0.1。齿轮辐板的扭转刚度分别为  $K_{h1}, K_{h2}$ ，可由能量法求解<sup>[5]</sup>。输入和输出质量经由扭转刚度  $K_1, K_1$  分别与主、被动齿轮相联。每个齿轮上有径向支承刚度  $K_r, K_r$  和轴向支承刚度  $K_a$ 。这样就构成了弧齿锥齿轮传动的振动系统，它是一个多刚体多自由度振动系统。

### 2 齿轮的支承刚度

将齿轮的啮合力  $P_n$  转移到齿轮轴上，计有集中力  $P_t, P_r$  和  $P_a$ ，以及弯矩  $P_a r_m$  ( $r_m$  为齿宽中点节圆半径)、扭矩  $P_t r_m$ 。计算关系表达如下

$$\left. \begin{aligned} P_{ti} &= P_n \cos \alpha \cos \beta \\ P_{ri} &= P_n \cos \alpha (\operatorname{tg} \delta_i \sin \delta_i + \sin \beta \cos \delta_i) \\ P_{ai} &= P_n \cos \alpha (\operatorname{tg} \delta_i \sin \delta_i + \sin \beta \cos \delta_i) \end{aligned} \right\} \quad (1) \quad i = 1, 2$$

式 (1) 中  $\beta$  为螺旋角， $\delta$  为节圆锥角。根据齿轮旋向和转向， $\beta$  应分别取正或负。

齿轮的支承刚度分为  $K_r, K_r, K_a$  三个方向的刚度（见图 1）。 $K_r$  与  $K_a$  可通过集中载荷作用下轴和轴承的变形求得，而计算  $K_r$  时则需同时作用集中载荷  $p_r$  和弯矩  $p_a r_m$ 。本文中轴的变形用一维有限元计算，轴承变形包括外圈、内圈和滚动体变形，按轴承理论计算<sup>[6]</sup>。

### 3 齿轮系统的参数

本文研究一对弧齿锥齿轮的传动,其几何参数列于表1。航空减速器中,锥齿轮主要用来改变方向,速比不大,选速比为1。为了改善工作状态,主、被动齿轮均为简支方式,齿轮的结构与支承条件示于图2。齿轮系统的刚度参数列于表2,质量参数列于表3。

表1 齿轮参数

齿数	$Z_1=50 \quad Z_2=50$
模数	$m_n=4$
压力角	$\alpha=20^\circ$
螺旋角	$\beta=0^\circ$
轴交角	$\Sigma=90^\circ$
齿宽	$B=34\text{mm}$
精度	GB 7级
输入力矩	$M_1=300\text{N}\cdot\text{m}$

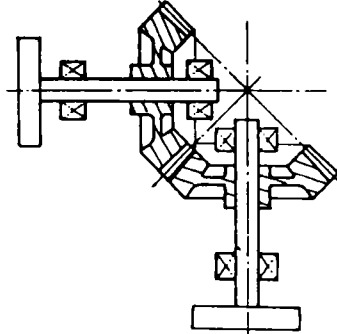


图2 齿轮传动系统的结构

表2 齿轮系统的刚度参数

$K_{t1}$	$K_{t2}$	$K_{r1}$	$K_{r2}$	$K_{a1}$	$K_{a2}$	$K_{h1}$	$K_{h2}$	$K_1$	$K_2$
$5.57 \times 10^8$	$5.57 \times 10^8$	$3.17 \times 10^8$	$3.17 \times 10^8$	$5.0 \times 10^8$	$5.0 \times 10^8$	$1.34 \times 10^7$	$1.34 \times 10^7$	$4.5 \times 10^4$	$4.7 \times 10^4$

单位:  $K_t, K_r, K_a - [\text{N/m}]$ ,  $K_h, K_1, K_2 - [\text{N}\cdot\text{m/rad}]$

表3 齿轮系统的质量参数

$m_1$	$m_2$	$J_1$	$J_2$	$J_{h1}$	$J_{h2}$	$J_I$	$J_{II}$
3.85	3.85	$1.72 \times 10^{-2}$	$1.72 \times 10^{-2}$	$2 \times 10^{-3}$	$2 \times 10^{-3}$	$1 \times 10^{-2}$	$4 \times 10^{-2}$

单位:  $m - [\text{kg}]$ ,  $J - [\text{kg}\cdot\text{m}^2]$

表3中  $m$  为齿轮质量,  $J$  为齿轮齿圈与部份辐板的惯性矩,  $J_h$  为齿轮轮毂与部份辐板的惯性矩,  $J_I, J_{II}$  为输入和输出质量的惯性矩。

### 4 弧齿锥齿轮传动系统的运动方程

在啮合力作用下,轮齿齿面的法向位移  $x_i$  可以分解为3个方向的位移  $x_{ti}, x_{ri}, x_{ai}$  ( $i=1, 2$ ) 即

$$x_i = x_{rni} + x_{tmi} + x_{ani} \quad (2)$$

式中:  $x_{rni} = x_{ri} \cos \alpha (\text{tg} \alpha \cos \delta_i - \sin \beta \sin \delta_i)$ ;  $x_{tmi} = (x_{ti} + \theta_i r_m) \cos \alpha \cos \beta$ ;  $x_{ani} = x_{ai} \cos \alpha (\text{tg} \alpha \sin \delta_i + \sin \beta \cos \delta_i)$ ,  $x_{rni}, x_{tmi}, x_{ani}$  分别为  $x_{ri}, x_{ti}, x_{ai}$  在齿面法向的投影。因此,两个齿轮间的弹性啮合力为

$$P_k = K(x_1 - x_2) - \sum_j^m K_j e_j \quad (3)$$

式中  $m$  为同时啮合的齿对数,  $k_j$  为同时啮合的第  $j$  对齿的刚度,  $e_j$  为同时啮合的第  $j$  对齿的

综合误差，两个齿轮间的阻尼力为  $P_c = c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$ 。因此，弧齿圆锥齿轮传动系统的运动微分方程可以写作

$$\left. \begin{aligned} J_1 \ddot{\theta}_1 + (P_c + P_k)r_{m1} \cos \alpha \cos \beta + K_{h1}(\theta_1 - \theta_2) &= 0 \\ J_2 \ddot{\theta}_2 - (P_c + P_k)r_{m2} \cos \alpha \cos \beta + K_{h2}(\theta_1 - \theta_2) &= 0 \\ m_1 \ddot{x}_{r1} + (P_c + P_k) \cos \alpha (\text{tg} \alpha \cos \delta_1 - \sin \beta \sin \delta_1) + k_{r1} x_{r1} &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_{r2} - (P_c + P_k) \cos \alpha (\text{tg} \alpha \cos \delta_2 - \sin \beta \sin \delta_2) + k_{r2} x_{r2} &= 0 \\ m_1 \ddot{x}_{t1} + (P_c + P_k) \cos \alpha \cos \beta + k_{t1} x_{t1} &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_{t2} - (P_c + P_k) \cos \alpha \cos \beta + k_{t2} x_{t2} &= 0 \\ m_1 \ddot{x}_{a1} + (P_c + P_k) \cos \alpha (\text{tg} \alpha \sin \delta_1 + \sin \beta \cos \delta_1) + k_{a1} x_{a1} &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_{a2} - (P_c + P_k) \cos \alpha (\text{tg} \alpha \sin \delta_2 + \sin \beta \cos \delta_2) + k_{a2} x_{a2} &= 0 \\ J_{h1} \ddot{\theta}_{h1} + K_{h1}(\theta_{h1} - \theta_1) + K_1(\theta_{h1} - \theta_1) &= 0 \\ J_{h2} \ddot{\theta}_{h2} + K_{h2}(\theta_{h2} - \theta_2) + K_1(\theta_{h2} - \theta_1) &= 0 \\ J_1 \ddot{\theta}_1 + K_1(\theta_1 - \theta_{h1}) &= M_1 \\ J_1 \ddot{\theta}_1 + K_1(\theta_1 - \theta_{h2}) &= -M_2 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中  $M_2$  为输出力矩， $M_2 = M_1(Z_2/Z_1)$ ，计算中认为  $M_1$  和  $M_2$  为常数。

### 5 振动激励分析

齿轮系统的振动激励主要是啮合刚度的变化和由于加工、安装形成的齿轮误差，因此，式 (5) 具有参数激励的性质。齿轮副的啮合刚度用三维有限元方法及轮齿接触分析技术获得，同时考虑了齿轮副在格里森制机床上加工展成的齿形的准共轭性。图 3 是根据齿轮精度附加了误差，并叠加到刚度变化与理论误差之上，最后形成的齿轮副传动误差，这是齿轮系统的总激励。图中横坐标  $\theta$  是齿轮转角位置。

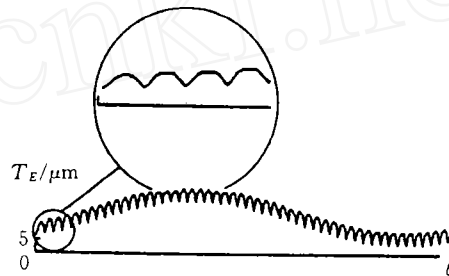


图 3 齿轮副的传动误差

齿轮副的传动误差是周期函数，它的短周期是啮合周期，长周期（完整周期）包括  $N$  个短周期， $N$  为主、被动齿轮齿数的最小公倍数  $\Delta$  为 50。

### 6 齿轮系统运动方程的求解

式 (5) 经整理可以表示为矩阵式

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{P\} \quad (6)$$

式 (6) 中  $[K]$  中是周期函数矩阵； $\{P\}$  中包括了齿轮误差的影响和外载荷，也是周期函数。 $[K]$  的周期是短周期， $\{P\}$  的周期是长周期。令

$$[K] = [\bar{K}] + [\Delta K], \quad \{x\} = \{\bar{x}\} + \{\Delta x\} \quad (7)$$

式 (7) 中  $[\bar{K}]$  为常矩阵，即将  $[K]$  中的所有  $K$  都取平均值； $\{\bar{x}\}$  为静态平均位移向量； $[\Delta K]$  和  $\{\Delta x\}$  分别为  $[K]$  和  $\{x\}$  的波动量。

将式 (7) 代入式 (6) 中，考虑到  $\{\ddot{x}\} = \{\Delta \ddot{x}\}$ ， $\{\dot{x}\} = \{\Delta \dot{x}\}$ ，展开后略去二阶小量

$[\Delta K]\{\Delta x\}$ , 得到

$$[M]\{\Delta \ddot{x}\} + [C]\{\Delta \dot{x}\} + [\bar{K}]\{\Delta x\} = \{F\} \quad (8)$$

式中  $\{F\} = (f_1, f_2, \dots, f_{12})^T$ ;  $f_1 = E_{ke} r_{m1} \cos \alpha \cos \beta$ ;  $f_2 = -E_{ke} r_{m2} \cos \alpha \cos \beta$ ;  $f_3 = E_{ke} \cos \alpha (\text{tg} \alpha \cos \delta_1 - \sin \beta \sin \delta_1)$ ;  $f_4 = -E_{ke} \cos \alpha (\text{tg} \alpha \cos \delta_2 - \sin \beta \sin \delta_2)$ ;  $f_5 = E_{ke} \cos \alpha \cos \beta$ ;  $f_6 = -E_{ke} \cos \alpha \cos \beta$ ;  $f_7 = E_{ke} \cos \alpha (\text{tg} \alpha \sin \delta_1 + \sin \beta \cos \delta_1)$ ;  $f_8 = -E_{ke} \cos \alpha (\text{tg} \alpha \sin \delta_2 + \sin \beta \cos \delta_2)$ ;  $f_9 = f_{10} = f_{11} = f_{12} = 0$ 。其中  $E_{ke} = -\Delta K(\bar{P}_k/\bar{K}) +$

$\sum_j^m K_{j,e}$ , 为周期函数, 可展成 Fourier 级数。式

中  $\bar{P}_k$  是平均弹性啮合力, 由齿轮副输入力矩  $M_1$  求出。至此, 原参变微分方程, 已简化为式 (8) 所示的线性定常微分方程组。它对于简谐激励的稳态响应, 可以很方便地求出, 再将各阶响应叠加起来, 就得到齿轮系统的动态响应<sup>[7]</sup>。

本文根据上述计算过程, 编制了 FORTRAN 语言的计算机程序, 可以快速地求解弧齿锥齿轮传动系统的动态响应。用该程序计算了表 1 所列齿轮副在 3 000r/min 时的振动, 每个齿轮在各个方向的振动加速度示于图 4。

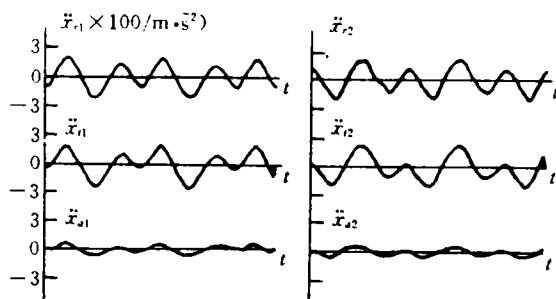


图 4 齿轮在各方向上的振动加速度

### 7 齿轮副的动载荷与动特性

当齿轮传动系统的载荷与转速确定时, 系统各自由度的动态响应可按上述方法求出, 由式 (3) 得到两个齿轮间的动载荷, 齿轮副在 3 000r/min 时回转一周 (即一个长周期) 的动载荷示于图 5。定义最大的动载荷与静载荷之比为动载系数  $C_d$ , 求解各种不同转速下的齿轮系统动态响应和动载系数  $C_d$ , 示于图 6, 为这对齿轮传动的动态特性。

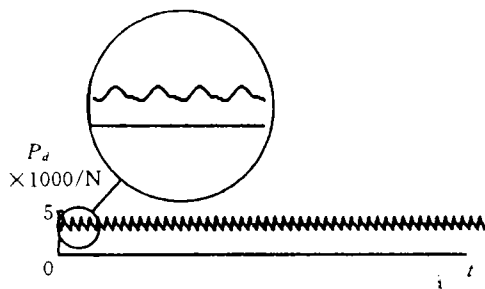


图 5 齿轮副间的动载荷

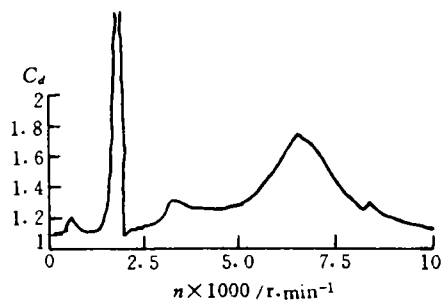


图 6 弧齿锥齿轮传动的动态特性

在图 6 中看到, 2 000r/min 附近, 有一个窄而高的共振峰, 这是齿轮支承变形产生的共振。在 7 000r/min 附近有一个较宽的峰值, 这是齿轮副相对扭转共振, 是主共振; 在 3 500r/min 附近有一个较低的峰值, 是齿轮副的 1/2 次共振峰。

将图5所示的齿轮动载荷历程依次作用在相应的齿轮轮齿上,通过有限元方法,可以求解齿轮轮体的结构振动,包括节径型的行波振动和其它节圆型振动,振动应力和动载荷产生的齿根应力、离心应力叠加,即可得到齿轮在工况下的真实应力状态。

### 参 考 文 献

- 1 许得俊,梁世昌,常春江. 中央传动锥齿轮共振破坏的实验研究. 航空动力学报, 1988; 5 (3): 103-108
- 2 董本涵,高鹏飞. 中央传动锥齿轮光弹性应力分析. 航空动力学报, 1988; 5 (3): 203-206
- 3 Mark W D. Analysis of the vibration excitation arising from spiral bevel gears. NASA CR 4008, 1987
- 4 Litvin F L. Generation of spiral bevel gears with zero kinematical errors and computer aided tooth contact analysis. NASA E-2932, 1986
- 5 黄镇东,何大为. 齿轮机构动力学(下). 西安:西北工业大学, 1984: 39-42
- 6 杨棣,唐恒龄,廖伯瑜. 机床动力学(上). 北京:机械工业出版社, 1987: 271-275
- 7 方宗德,沈允文,高向群. 斜齿轮传动的动态特性分析. 航空学报, 1992; 3 (2): 32-39

www.cnki.net