非定常 Stokes 方程的稳定化全离散有限体积元格式*1)

安 静 孙 萍 罗振东
(贵州师范大学数学与计算机科学学院, 贵阳 550001)

黄晓鸣
(北京交通大学理学院, 北京 100044)

摘 要

本文研究非定常 Stokes 方程的有限体积元方法, 给出一种基于两个局部高斯积分的稳定化全离散格式, 并给其有限体积元解的误差分析.

关键词: 非定常的 Stokes 方程; 有限体积元格式; 稳定化全离散格式; 误差估计

MR (2000) 主题分类: 65N30, 65M30

A STABILIZED FULLY DISCRETE FINITE VOLUME ELEMENT FORMULATION FOR NON-STATIONARY STOKES EQUATION

An Jing Sun Ping Luo Zhendong
(*School of Mathematics and Computer Science, Guizhou Normal University, Guiyang 550001, China*)

Huang Xiaoming
(*School of Science, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China*)

Abstract

In this paper, a finite volume element method for non-stationary Stokes equation is studied and a stabilized fully discrete finite volume element formulation based on on two local Gauss integrals for non-stationary Stokes equation is derived. The errors of solution for this formulation is analyzed.

Keywords: non-stationary Stokes equation; finite volume element formulation; stabilized fully discrete formulation; error estimate

2000 Mathematics Subject Classification: 65N30, 65M30

1. 引 言

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是有界的连通凸多边形区域. 考虑下面不可压的非定常 Stokes 方程.

* 2010 年 9 月 8 日收到.

1) 国家自然科学基金 (批准号: 10871022 和 11061009) 和河北省自然科学基金 (批准号: A2010001663) 资助项目.

问题 (I): 求 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2)$ 和 p 使得对于 $T>0$ 满足

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{u}_t-\nu\Delta\boldsymbol{u}+\nabla p=\boldsymbol{f}, & (x,y,t)\in\Omega\times(0,T],\\
\mathrm{div}\boldsymbol{u}=0, & (x,y,t)\in\Omega\times(0,T],\\
\boldsymbol{u}(x,y,t)=\boldsymbol{\varphi}(x,y,t), & (x,y,t)\in\partial\Omega\times(0,T],\\
\boldsymbol{u}(x,y,0)=\boldsymbol{u}_0(x,y), & (x,y)\in\Omega,
\end{cases}
\tag{1.1}
$$

其中 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2)$ 是流速向量, p 是压力, T 是总体时间, $\nu=1/Re$, Re 是 Reynolds 数, $\boldsymbol{f}(x,y,t)$ 是已知体力向量, $\boldsymbol{\varphi}(x,y,t)$ 和 $\boldsymbol{u}_0(x,y)$ 两个已知的边值和初值向量函数. 为了便于理论分析, 不失一般性, 不妨假定 $\boldsymbol{\varphi}(x,y,t)=\mathbf{0}$.

非定常 Stokes 方程是流体力学的重要方程, 已经被广泛和成功地用于许多实际工程领域 (参见 [1-7]). 然而当实际问题的计算域不规则或问题本身比较复杂时, 要求出其解析解即精确解是很困难的, 有效的方法是求其数值解. 由于有限体积元法 (参见 [8-10]), 也称为盒子法 (参见 [11]) 或广义差分方法 (参见 [12-13]), 能保持局部的质量或能量守恒, 比有限差分法精度高而且能适应边界复杂的计算域, 又与有限元方法有同阶精度但要比有限元方法便于计算, 因此有限体积元法被公认是最有效的数值计算方法之一, 已经被广泛应用于求解各种类型的偏微分方程 (例如, 二阶椭圆方程、抛物型方程、Stokes 方程等) 的数值解 (参见 [8-18]). 但是求解 Stokes 方程的有限体积元法的流速和压力的试验空间之间要求满足离散的 Babuška-Brezzi (BB) 条件 (参见 [16-17]).

为了回避离散 BB 条件对定常或非定常 Stokes 方程有限体积元法的限制, 一些基于两局部高斯积分或自由参数的稳定化半离散化有限体积元格式已经发展起来 (参见 [18-20]). 然而, 据我们所知, 到目前为止还没有非定常 Stokes 方程基于两局部高斯积分的全离散稳定化有限体积元格式或其误差分析报道. 非定常 Stokes 方程全离散稳定化格式可直接用于数值计算应用中, 但是误差分析有很大的难度. 因此, 对非定常 Stokes 方程的全离散稳定化有限体积元格式做研究并分析其误差, 具有重要的应用价值和理论价值.

本文的安排如下, 第 2 节回顾非定常的 Stokes 方程的基于两局部高斯积分的半离散稳定化有限体积元格式, 第 3 节导出非定常的 Stokes 方程的基于两局部高斯积分的全离散稳定化有限体积元格式及其误差分析, 第 4 节是结论和展望.

2. 回顾非定常的 Stokes 方程的半离散稳定化有限体积元格式

本文用到的 Sobolev 空间都是标准的 (参见 [21]). 设 $U=H_0^1(\Omega)^2$ 和 $M=L_0^2(\Omega)=\{q\in L^2(\Omega);\int_\Omega q\mathrm{d}x=0\}$. 则问题 (I) 的混合变分形式为下面所述.

问题 (II): 求 $(\boldsymbol{u}(t),p(t)):[0,T]\to U\times M$ 满足

$$
\begin{cases}
(\boldsymbol{u}_t,\boldsymbol{v})+\nu a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})+b(\boldsymbol{v},p)=(\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}), \quad \forall\boldsymbol{v}\in U,\\
b(\boldsymbol{u},q)=0, \quad \forall q\in M,\\
\boldsymbol{u}(x,y,0)=\boldsymbol{u}_0(x,y), \quad (x,y)\in\Omega,
\end{cases}
\tag{2.1}
$$

其中 $a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=(\nabla\boldsymbol{u},\nabla\boldsymbol{v})$, $b(\boldsymbol{v},q)=-(\mathrm{div}\boldsymbol{v},q)$, $(\cdot,\cdot)$ 表示 $L^2(\Omega)$ 或 $L^2(\Omega)^2$ 中的内积.

由于 Ω 是有界连通多边形区域, 因此, 如果 $\boldsymbol{g}\in L^2(\Omega)^2$, 下面的定常 Stokes 方程

$$\begin{cases} -\Delta \boldsymbol{v}+\nabla q=\boldsymbol{g}, & (x,y)\in\Omega, \\ \mathrm{div}\boldsymbol{v}=0, & (x,y)\in\Omega, \\ \boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}, & (x,y)\in\partial\Omega \end{cases} \tag{2.2}$$

存在唯一的解 $(\boldsymbol{v},q)\in U\times M$ 满足

$$\|\boldsymbol{v}\|_2+\|q\|_1\leqslant C\|\boldsymbol{g}\|_0. \tag{2.3}$$

如果引入 $U\times M$ 上的广义双线性形

$$B((\boldsymbol{u},p);(\boldsymbol{v},q))=\nu a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})+b(\boldsymbol{v},p)-b(\boldsymbol{u},q), \tag{2.4}$$

则问题 (II) 可以写为下面的紧致格式.

问题 (III): 求 $(\boldsymbol{u}(t),p(t)):[0,T]\to U\times M$ 满足

$$\begin{cases} (\boldsymbol{u}_t,\boldsymbol{v})+B((\boldsymbol{u},p);(\boldsymbol{v},q))=(\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}), & \forall(\boldsymbol{v},q)\in U\times M, \\ \boldsymbol{u}(x,y,0)=\boldsymbol{u}_0(x,y), & (x,y)\in\Omega. \end{cases} \tag{2.5}$$

双线性形 $B((\cdot,\cdot);(\cdot,\cdot))$ 有下面的常用性质 (参见 [1, 19-20]):

$$B((\boldsymbol{u},p);(\boldsymbol{u},p))=\nu|\boldsymbol{u}|_1^2,\quad \forall(\boldsymbol{u},p)\in U\times M, \tag{2.6}$$

$$|B((\boldsymbol{u},p);(\boldsymbol{v},q))|\le C(\|\boldsymbol{u}\|_1+\|p\|_0)(\|\boldsymbol{v}\|_1+\|q\|_0),\quad \forall(\boldsymbol{u},p),(\boldsymbol{v},q)\in U\times M, \tag{2.7}$$

$$\sup_{(v,q)\in U\times M}\frac{|B((\boldsymbol{u},p);(\boldsymbol{v},q))|}{\|\boldsymbol{v}\|_1+\|q\|_0}\ge\beta_0(\|\boldsymbol{u}\|_1+\|p\|_0),\quad \forall(\boldsymbol{u},p)\in U\times M, \tag{2.8}$$

其中 $\beta_0>0$ 是常数. 令 $V=\{\boldsymbol{v}\in U;\ \mathrm{div}\boldsymbol{v}=0\}$ 和 $D(A)=V\cap H^2(\Omega)^2$. 设初始向量 $\boldsymbol{u}_0\in D(A)$ 而且体力向量 $\boldsymbol{f}(x,t)\in L^2(0,T;L^2(\Omega)^2)^2$ 满足

$$\|\boldsymbol{u}_0\|_2+\left(\int_0^T(\|\boldsymbol{f}\|_1^2+\|\boldsymbol{f}_t\|_0^2)\mathrm{d}t\right)^{1/2}\le C, \tag{2.9}$$

则非定常的 Stokes 方程有下面解的存在性、唯一性和正则性熟知结果 (参见 [1-3]).

引理 1. 如果 (2.6)–(2.9) 成立, 则对于任意给定的 $T>0$, 问题 (II) 存在唯一的解 $(\boldsymbol{u},p)$ 满足下面的正则性

$$\sup_{0<t\le T}\left\{\|\boldsymbol{u}(t)\|_2^2+\|p(t)\|_1^2+\tau(t)\|u_t\|_1^2\right\}+\int_0^T\tau(t)(\|u_t\|_2^2+\|p_t\|_1^2+\|\boldsymbol{u}_{tt}\|_0^2)\mathrm{d}t\le C, \tag{2.10}$$

其中 $\tau(t)=\min\{1,t\}$ 而且 C 是正的常数.

为了获得问题 (II) 的有限体积元解, 需要对计算域 Ω 做下面的三角形剖分和对偶剖分.

设 $\Im_h=\{K\}$ 是 $\bar{\Omega}$ 具有最大直径 $h=\max h_K$ 的拟一致三角形剖分, 其中 h_K 是三角形 $K\in\Im_h$ 的直径 (参见 [8-9, 11-12, 18-20, 22-23]). 为了刻画有限体积元方法, 我们还要引入基于 $\Im_h$ 的对偶剖分 $\Im_h^*$, 它的单元称为控制元, 控制元的构造与 [8-9, 11-12] 中的构造相同. 设

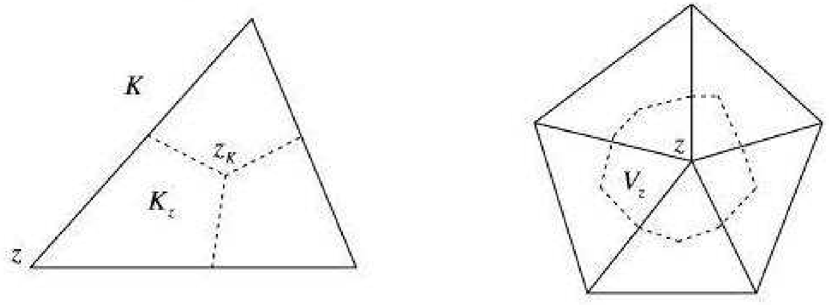

图 1 左图是将三角形 K 剖分成三个子四边形 K_z. 右图是用虚线连成顶点为 z 的控制元 V_z 的样本.

z_K 是单元 $K \in \Im_h$ 的重心, 将 z_K 与三角形 K 的各边中点连结, 把 K 剖分成三个小四边形 K_z. 记 $Z_h(K)$ 为 K 的顶点, 则 $Z_h = \bigcup_{K\in\Im_h} Z_h(K)$ 为 $\Im_h$ 的顶点集合. 对于每个 $z \in Z_h$, 由所有享有顶点 z 的小四边形构成控制元 V_z. 所有的控制元覆盖 $\bar{\Omega}$, 构成 $\Im_h$ 的对偶剖分 $\Im_h^*$(参见图 1). 用 Z_h° 表示剖分 $\Im_h$ 的顶点集合 Z_h 的内部顶点集合.

对偶剖分 $\Im_h^*$ 称为是拟一致的, 如果存在两个不依赖于 h 和时间网格长度的正数 C_1 和 C_2 使得

$$C_1 h^2 \leqslant \mathrm{mes}(V_z) \leqslant C_2 h^2, \quad \forall V_z \in \Im_h^*. \tag{2.11}$$

如果三角形剖分 $\Im_h$ 是拟一致剖分, 则相应的对偶剖分 $\Im_h^*$ 也是拟一致的 (参见 [8–9, 11-13, 22-23]). 定义 U 和 M 的试验空间 U_h 和 M_h 分别为

$$\begin{aligned} U_h &= \{\boldsymbol{u}_h \in C(\bar{\Omega})^2 \cap U;\ \boldsymbol{u}_h|_K \in P_1(K)^2,\ \forall K \in \Im_h\}, \\ M_h &= \{q_h \in M;\ q_h|_K \in P_1(K),\ \ \forall K \in \Im_h\}, \end{aligned}$$

其中 $P_1(K)$ 是 $K \in \Im_h$ 上的线性多项式构成的空间 (可由 K 的顶点唯一确定). 设 Π_h 为 U 到 U_h 上的插值投影算子. 则由 Sobolev 空间的插值理论 (参见 [8-9, 11-13, 22-23]) 知, 当 $\boldsymbol{u} \in H^2(\Omega)^2$ 时, 有

$$|\boldsymbol{u} - \Pi_h \boldsymbol{u}|_m \leqslant C h^{2-m} |\boldsymbol{u}|_2, \quad m = 0, 1, \tag{2.12}$$

其中 C 及后面出现 C 均表示与空间网格尺寸 h 和时间网格尺寸无关的正数, 不同的出现可能不等. 检验函数空间 $\tilde{U}_h$ 取为在每个对偶元 $V_z \in \Im_h^*$ 上是常数向量但在 Ω 边界 $\partial\Omega$ 上的对偶元为零向量的空间, 即

$$\tilde{U}_h = \left\{v_h \in L^2(\Omega)^2;\ v_h|_{V_z} \in P_0(V_z),\ \forall V_z \in \Im_h^*, v_h|_{V_z} = 0, V_z \cap \partial\Omega \neq \varnothing\right\},$$

则 $\tilde{U}_h$ 可由下面的基函数

$$\phi_z(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in V_z, \\ 0, & (x,y) \notin V_z, \end{cases} \quad \forall z \in Z_h^\circ \tag{2.13}$$

张成. 这样, 对于每个向量 $\boldsymbol{v}_h \in \tilde{U}_h$ 有

$$\boldsymbol{v}_h = \sum_{z \in Z_h^\circ} \boldsymbol{v}_h(z) \phi_z. \tag{2.14}$$

对于 $\boldsymbol{w} \in U$, 设 $\Pi_h^* \boldsymbol{w}$ 是 $\boldsymbol{w}$ 在 $\tilde{U}_h$ 上的插值投影, 即

$$\Pi_h^* \boldsymbol{w} = \sum_{z \in Z_h^\circ} \boldsymbol{w}(z) \phi_z. \tag{2.15}$$

则由插值理论 (参见 [12,22-23]) 有

$$\|\boldsymbol{w} - \Pi_h^* \boldsymbol{w}\|_0 \leqslant Ch|\boldsymbol{w}|_1. \tag{2.16}$$

进一步, 插值投影 Π_h^* 满足下面性质 (参见 [12]).

引理 2. 如果 $\boldsymbol{v}_h \in U_h$, 则有

$$\int_K (\boldsymbol{v}_h - \Pi_h^* \boldsymbol{v}_h) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,\ K \in \Im_h;\ \|\boldsymbol{v}_h - \Pi_h^* \boldsymbol{v}_h\|_{L^r(\Omega)} \le Ch_K \|\boldsymbol{v}_h\|_{W^{1,r}(\Omega)},\ 1 \le r \le \infty.$$

虽然试验函数空间 U_h 像有限元空间那样满足 $U_h \subset U$(协调元), 但是检验空间 $\tilde{U}_h \not\subset U_h$. 由于 $\tilde{U}_h$ 的向量函数在相邻的两个对偶元的边界上不连续, 因此要像非协调有限元法那样对双线性形 $a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ 和 $b(\boldsymbol{v}, q)$ 做修改. 例如, 将 (2.1) 的 $a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ 重新写为

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \sum_{K \in \Im_h} \int_K \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{2.17}$$

则 $a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ 在 $U_h \times \tilde{U}_h$ 有意义. 利用在对偶元 V_z 上的分部积分有

$$\int_\Omega \Delta \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{V_z \in \Im_h^*} \int_{V_z} \Delta \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{V_z \in \Im_h^*} \int_{\partial V_z} (\nabla \boldsymbol{u} \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}s - \sum_{V_z \in \Im_h^*} \int_{V_z} \nabla \boldsymbol{u} \nabla \boldsymbol{v} \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{2.18}$$

$$\int_\Omega \nabla p \cdot \boldsymbol{v} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\sum_{V_z \in \Im_h^*} \int_{V_z} p \mathrm{div} \boldsymbol{v} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \sum_{V_z \in \Im_h^*} \int_{\partial V_z} p \boldsymbol{v} \boldsymbol{n} \mathrm{d}s, \tag{2.19}$$

因此 $a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ 和 $b(\boldsymbol{v}, q)$ 可分别写为

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \sum_{V_z \in \Im_h^*} \int_{V_z} \nabla \boldsymbol{u} \nabla \boldsymbol{v} \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \sum_{V_z \in \Im_h^*} \int_{\partial V_z} (\nabla \boldsymbol{u} \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}s, \tag{2.20}$$

$$b(\boldsymbol{v}, p) = -\sum_{V_z \in \Im_h^*} \int_{V_z} p \mathrm{div} \boldsymbol{v} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \sum_{V_z \in \Im_h^*} \int_{\partial V_z} p \boldsymbol{v} \boldsymbol{n} \mathrm{d}s, \tag{2.21}$$

其中 $\int_{\partial V z}$ 表示在对偶元的边界 ∂V_z 上按逆时针方向的边界积分; $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2)^T$ 表示 ∂V_z 的单位外法向量. 由于 $\tilde{U}_h$ 是以对偶元 V_z 上的特征函数为基函数的分片常数构成的空间, 因此基于积分守恒律 (平衡方程) 有

$$\begin{aligned} &\int_{V_z} \boldsymbol{u}_t \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \nu \int_{V_z} \Delta \boldsymbol{u} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{V_z} \nabla p \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{V_z} \boldsymbol{u}_t \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \nu \int_{\partial V_z} \nabla \boldsymbol{u} \boldsymbol{n} \mathrm{d}s + \int_{\partial V_z} p \boldsymbol{n} \mathrm{d}s = \int_{V_z} \boldsymbol{f} \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad \forall z \in Z_h^0, \end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\int_K \mathrm{div} \boldsymbol{u} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0, \quad \forall K \in \Im_h. \tag{2.23}$$

这样, 问题 (II) 的半离散稳定化有限体积元格式为下面所述.

问题 (IV): 求 $(\boldsymbol{u}_h,p_h)\in U_h\times M_h$ 使得对于 $0<t\le T$ 满足

$$\left\{\begin{array}{l}(\boldsymbol{u}_{ht},\Pi_h^*\boldsymbol{v}_h)+\nu a_h(\boldsymbol{u}_h,\Pi_h^*\boldsymbol{v}_h)+b_h(\Pi_h^*\boldsymbol{v}_h,p_h)=(\boldsymbol{f},\Pi_h^*\boldsymbol{v}_h),\quad \forall\boldsymbol{v}_h\in U_h,\\ b(\boldsymbol{u}_h,q_h)-D_h(p_h,q_h)=0,\quad \forall q_h\in M_h,\\ \boldsymbol{u}_h(x,y,0)=\Pi_h^*\boldsymbol{u}_0(x,y),\quad (x,y)\in\Omega,\end{array}\right.\tag{2.24}$$

其中

$$a_h(\boldsymbol{u}_h,\Pi_h^*\boldsymbol{v}_h)=\sum_{z\in Z_h^\circ}\boldsymbol{v}_h(z)\bar{a}(\boldsymbol{u}_h,\phi_z),\quad \bar{a}(\boldsymbol{u}_h,\phi_z)=-\int_{\partial V_z}\nabla\boldsymbol{u}\boldsymbol{n}\mathrm{d}s,\tag{2.25}$$

$$b_h(\Pi_h^*\boldsymbol{v}_h,p)=\sum_{z\in Z_h^\circ}\boldsymbol{v}_h(z)\int_{\partial V_z}p\boldsymbol{n}\mathrm{d}s,\tag{2.26}$$

$$D_h(p_h,q_h)=\sum_{K\in\Im_h}\left\{\int_{K,2}p_hq_h\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{K,1}p_hq_h\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\},\quad p_h,q_h\in M_h,\tag{2.27}$$

这里的 $\int_{K,i}g(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 表示在 K 上精度为 i $(i=1,2)$ 的高斯积分, $g(x)=p_hq_h$ 是次数不超过 2 次的多形式. 于是, 对于所有的检验函数 $q_h\in M_h$, 当 $i=1$ 时, 试验函数 $p_h\in M_h$ 必须是分片常数. 再定义 L^2- 投影算子 $\rho_h:L^2(\Omega)\to W_h$ 如下

$$(p,q_h)=(\rho_hp,q_h),\quad \forall p\in L^2(\Omega),q_h\in W_h,\tag{2.28}$$

其中 $W_h\subset L^2(\Omega)$ 表示相应于 $\Im_h$ 的分片常数空间, 即在每个 $K\in\Im_h$ 是常数的空间. 那么, 投影算子 ρ_h 有下面的性质 (参见 [22,23])

$$\|\rho_hp\|_0\le\|p\|_0,\quad \forall p\in L^2(\Omega),\tag{2.29}$$

$$\|p-\rho_hp\|_0\le Ch\|p\|_1,\quad \forall p\in H^1(\Omega).\tag{2.30}$$

利用投影算子 ρ_h 的定义, 双线性形 $D_h(\cdot,\cdot)$ 可以表示如下

$$D_h(p_h,q_h)=(p_h-\rho_hp_h,q_h)=(p_h-\rho_hp_h,q_h-\rho_hq_h).\tag{2.31}$$

令

$$\mathcal{A}((\boldsymbol{u},p);(\Pi_h^*\boldsymbol{v}_h,q_h))=\nu a_h(\boldsymbol{u},\Pi_h^*\boldsymbol{v}_h)+b_h(\Pi_h^*\boldsymbol{v}_h,p)-b(\boldsymbol{u},q_h)+D_h(p_h,q_h).\tag{2.32}$$

则问题 (IV) 可以重写成下面的紧致形式.

问题 (V): 求 $(\boldsymbol{u}_h,p_h)\in U_h\times M_h$ 使得对于 $0<t\le T$ 满足

$$\left\{\begin{array}{l}(\boldsymbol{u}_{ht},\Pi_h^*\boldsymbol{v}_h)+\mathcal{A}((\boldsymbol{u}_h,p_h);(\Pi_h^*\boldsymbol{v}_h,q_h))=(\boldsymbol{f},\Pi_h^*\boldsymbol{v}_h),\ \forall(\boldsymbol{v}_h,q_h)\in U_h\times M_h,\\ \boldsymbol{u}_h(x,y,0)=\Pi_h^*\boldsymbol{u}_0(x,y),\quad (x,y)\in\Omega.\end{array}\right.\tag{2.33}$$

由此可见, 有限体积元方法即广义差分方法是有限差分方法的重要推广. 由文献 [12] 可得到下面 4 个引理 (这是将数值函数推广到向量函数的结果).

引理 3. 对于 $K \in \Im_h$ 和 $z \in Z_h$, 令 $S_z^* = \mathrm{mes}(V_z)$, $S_K = \mathrm{mes}(K)$, 而且 z_i, z_j 和 z_k 是 K 的三个顶点,

$$\|\boldsymbol{u}_h\|_{0,h} \equiv \|\Pi_h^* \boldsymbol{u}_h\|_0 = \left\{ \sum_{V_z \in \Im_h^*} \boldsymbol{u}_h^2(z) S_z^* \right\}^{1/2} = \left\{ \frac{1}{3} \sum_{K \in \Im_h} [\boldsymbol{u}_h^2(z_i) + \boldsymbol{u}_h^2(z_j) + \boldsymbol{u}_h^2(z_k)] S_K \right\}^{1/2}, \tag{2.34}$$

$$|\boldsymbol{u}_h|_{1,h} \equiv \left\{ \sum_{z \in K \in \Im_h} \left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}_h(z)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}_h(z)}{\partial y} \right)^2 \right] S_K \right\}^{1/2}, \tag{2.35}$$

$$\|\boldsymbol{u}_h\|_{1,h} = \left[\|\boldsymbol{u}_h\|_{0,h}^2 + |\boldsymbol{u}_h|_{1,h}^2 \right]^{1/2}, \tag{2.36}$$

则在 U_h 上 $|\cdot|_{1,h}$ 与 $|\cdot|_1$; $\|\cdot\|_{0,h}$ 与 $\|\cdot\|_0$; $\|\cdot\|_{1,h}$ 与 $\|\cdot\|_1$ 分别等价.

引理 4. 双线性形 $a(\boldsymbol{u}_h, \Pi_h^* \bar{\boldsymbol{u}}_h)$ 可以表示为

$$a(\boldsymbol{u}_h, \Pi_h^* \bar{\boldsymbol{u}}_h) = a_h(\boldsymbol{u}_h, \Pi_h^* \bar{\boldsymbol{u}}_h) + \bar{b}(\boldsymbol{u}_h, \Pi_h^* \bar{\boldsymbol{u}}_h), \tag{2.37}$$

其中主项

$$a_h(\boldsymbol{u}_h, \Pi_h^* \bar{\boldsymbol{u}}_h) = \sum_{z \in K \in \Im_h} \left[\frac{\partial \boldsymbol{u}_h(z)}{\partial x} \frac{\partial \bar{\boldsymbol{u}}_h(z)}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{u}_h(z)}{\partial y} \frac{\partial \bar{\boldsymbol{u}}_h(z)}{\partial y} \right] S_K \tag{2.38}$$

是有界、正定和对称的, 即

$$a_h(\boldsymbol{u}_h, \Pi_h^* \bar{\boldsymbol{u}}_h) = a_h(\bar{\boldsymbol{u}}_h, \Pi_h^* \boldsymbol{u}_h), \tag{2.39}$$

而且存在常数 C_1 和 C_2 使得

$$C_1 \|\boldsymbol{u}_h\|_1^2 \leqslant a_h(\boldsymbol{u}_h, \Pi_h^* \boldsymbol{u}_h) \leqslant C_2 \|\boldsymbol{u}_h\|_1^2. \tag{2.40}$$

而且余项 $\bar{b}(\boldsymbol{u}_h, \Pi_h^* \bar{\boldsymbol{u}}_h) = a(\boldsymbol{u}_h, \Pi_h^* \bar{\boldsymbol{u}}_h) - a_h(\boldsymbol{u}_h, \Pi_h^* \bar{\boldsymbol{u}}_h)$ 满足

$$\bar{b}(\boldsymbol{u}_h, \Pi_h^* \bar{\boldsymbol{u}}_h) \leqslant Ch \|\boldsymbol{u}_h\|_1 \|\bar{\boldsymbol{u}}_h\|_1, \quad \forall \boldsymbol{u}_h, \bar{\boldsymbol{u}}_h \in U_h. \tag{2.41}$$

如果记 $|||\boldsymbol{u}_h|||_1 = [a_h(\boldsymbol{u}_h, \Pi_h^* \boldsymbol{u}_h)]^{1/2}$, 则在 U_h 上, $|||\boldsymbol{u}_h|||_1$ 等价于 $\|\boldsymbol{u}_h\|_1$. 进一步有

$$|a(\boldsymbol{u}_h, \Pi_h^* \bar{\boldsymbol{u}}_h) - a_h(\bar{\boldsymbol{u}}_h, \Pi_h^* \boldsymbol{u}_h)| \leqslant Ch \|\boldsymbol{u}_h\|_1 \|\bar{\boldsymbol{u}}_h\|_1, \quad \forall \boldsymbol{u}_h, \bar{\boldsymbol{u}}_h \in U_h. \tag{2.42}$$

引理 5. 存在正数 h_0, α 和 C_0 使得当 $0 < h \leqslant h_0$ 时有

$$a(\boldsymbol{u}_h, \Pi_h^* \boldsymbol{u}_h) \geqslant \alpha \|\boldsymbol{u}_h\|_1^2, \quad \forall \boldsymbol{u}_h \in U_h, \tag{2.43}$$

$$|a(\boldsymbol{u}_h, \Pi_h^* \bar{\boldsymbol{u}}_h)| \leqslant C_0 \|\boldsymbol{u}_h\|_1 \|\bar{\boldsymbol{u}}_h\|_1, \quad \forall \boldsymbol{u}_h, \bar{u}_h \in U_h. \tag{2.44}$$

引理 6. 下面结论成立

$$(\boldsymbol{u}_h, \Pi_h^* \bar{\boldsymbol{u}}_h) = (\bar{\boldsymbol{u}}_h, \Pi_h^* \boldsymbol{u}_h), \quad \forall \boldsymbol{u}_h, \bar{\boldsymbol{u}}_h \in U_h, \tag{2.45}$$

$$|(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_h) - (\boldsymbol{u}, \Pi_h^* v_h)| \leqslant C h^{m+n} \|\boldsymbol{u}\|_m \|\boldsymbol{v}_h\|_n, \boldsymbol{u} \in H^m(\Omega)^2, \boldsymbol{v}_h \in U_h, m = 0, 1; n = 0, 1. \tag{2.46}$$

记 $|||\boldsymbol{u}_h|||_0 = (\boldsymbol{u}_h, \Pi_h^* \boldsymbol{u}_h)^{1/2}$, 那么在 U_h 上 $|||\cdot|||_0$ 等价于 $\|\cdot\|_0$, 即存在两正数 C_3 和 C_4 使得

$$C_3 \|\boldsymbol{u}_h\|_0 \leqslant |||\boldsymbol{u}_h|||_0 \leqslant C_4 \|\boldsymbol{u}_h\|_0, \quad \forall \boldsymbol{u}_h \in U_h. \tag{2.47}$$

引理 7. 双线性形 $\mathcal{A}((\cdot,\cdot);(\cdot,\cdot))$ 在 $(U_h,M_h)\times(U_h,M_h)$ 上有下面的连续性和弱正定性 (参见 [19–20])

$$\mathcal{A}((\boldsymbol{u}_h,p_h);(\boldsymbol{v}_h,q_h))\le C(\|\boldsymbol{u}_h\|_1+\|p_h\|_0)(\|\boldsymbol{v}_h\|_1+\|q_h\|_0),\ \forall(\boldsymbol{u}_h,p_h),(\boldsymbol{v}_h,q_h)\in U_h\times M_h,\quad(2.48)$$

$$\sup_{(\boldsymbol{v}_h,q_h)\in U_h\times M_h}\frac{\mathcal{A}((\boldsymbol{u}_h,p_h);(\boldsymbol{v}_h,q_h))}{\|\boldsymbol{v}_h\|_1+\|q_h\|_0}\ge\beta(\|\boldsymbol{u}_h\|_1+\|p_h\|_0),\quad\forall(\boldsymbol{u}_h,p_h)\in U_h\times M_h,\qquad(2.49)$$

其中 β 是与 h 无关的正数.

设 $(S_h,Q_h):U\times M\to U_h\times M_h$ 是 Stokes 投影, 即对于任意的 $(\boldsymbol{u},p)\in U\times M$ 满足

$$\mathcal{A}((S_h\boldsymbol{u},Q_hp);(\boldsymbol{v}_h,q_h))=B((\boldsymbol{u},p);(\boldsymbol{v}_h,q_h)),\quad\forall(\boldsymbol{v}_h,q_h)\in U_h\times M_h.\qquad(2.50)$$

则有下面的结果 (参见 [1, 6, 18-20, 22]).

引理 8. Stokes 投影 (S_h,Q_h) 有下面的性质

$$\|\boldsymbol{u}-S_h\boldsymbol{u}\|_1+\|p-Q_hp\|_0\le C(\|\boldsymbol{v}\|_1+\|p\|_0),\qquad(2.51)$$

而且当 $(\boldsymbol{u},p)\in H^2(\Omega)^2\times H^1(\Omega)$ 时, 有

$$\|\boldsymbol{u}-S_h\boldsymbol{u}\|_0+h(\|\boldsymbol{u}-S_h\boldsymbol{u}\|_1+\|p-Q_hp\|_0)\leqslant Ch^2(\|\boldsymbol{u}\|_2+\|p\|_1).\qquad(2.52)$$

此外, 如果 $\boldsymbol{u}_h$ 是问题 (IV) 的解, 则存在与剖分参数无关的正数 $C=C(\nu,\boldsymbol{f})$ 使得对于所有的 $t\in[0,T]$ 满足

$$\|\boldsymbol{u}_h(t)-S_h\boldsymbol{u}_h(t)\|_1\leqslant Ch.\qquad(2.53)$$

由于双线性形 $\mathcal{A}((\cdot,\cdot);(\cdot,\cdot))$ 在 $(U_h,M_h)\times(U_h,M_h)$ 上具有连续性和弱正定性, 则由混合有限元法的理论 (参见 [6, 22]) 知, 问题 (IV) 即问题 (V) 存在唯一的解 $(\boldsymbol{u}_h,p_h)\in U_h\times M_h$, 并且有下面的误差估计 (参见 [18]).

定理 9. 设 $(\boldsymbol{u},p)$ 是问题 (II) 的解, $(\boldsymbol{u}_h,p_h)$ 是半离散稳定化有限体积元格式问题 (IV) 的解, 则对于所有的 $t\in[0,T]$ 有

$$\|\boldsymbol{u}(t)-\boldsymbol{u}_h(t)\|_0+h(\|\boldsymbol{u}(t)-\boldsymbol{u}(t)\|_1+\|p(t)-p_h(t)\|_0)\leqslant\tau(t)^{-1/2}Ch^2.\qquad(2.54)$$

附注 1. 半离散化的问题 (IV) 或问题 (V) 是一个常微分方程, 要想求出数值解, 还需要它们做全离散化.

3. 非定常的 Stokes 方程的全离散稳定化的有限体积元格式

对于正整数 N, 设 $k=T/N$ 为时间步长, $t_n=nk$, $u_h^n=u_h(t_n)$ 是 u_h 的有限体积元逼近 $(n=0,1,\cdots,N=T/k)$. 如果半离散格式的微商 u_{ht}, 即问题 (IV) 在 $t=t_n$ 处用向后一步的差商 $\bar\partial_t\boldsymbol{u}_h^n=(\boldsymbol{u}_h^n-\boldsymbol{u}_h^{n-1})/k$ 逼近, 则问题 (IV) 的向后一步 Euler 全离散稳定化有限体积元格式为下面所述.

问题 (VI): 求 $(\boldsymbol{u}_h^n,p_h^n)\in U_h\times M_h$ $(1\leqslant n\leqslant N)$ 满足

$$\begin{cases}(\bar\partial_t\boldsymbol{u}_h^n,\Pi_h^*\boldsymbol{v}_h)+\mathcal{A}((\boldsymbol{u}_h^n,p_h^n);(\Pi_h^*\boldsymbol{v}_h,q_h))=(\boldsymbol{f}^n,\Pi_h^*\boldsymbol{v}_h),\quad\forall(\boldsymbol{v}_h,q_h)\in U_h\times M_h,\\ \boldsymbol{u}_h^0=\boldsymbol{u}_h(x,y,0)=S_h\boldsymbol{u}_0(x,y),\quad(x,y)\in\Omega.\end{cases}\qquad(3.1)$$

或等价地表示如下

问题 (VII): 求 $(\boldsymbol{u}_h^n, p_h^n) \in U_h \times M_h$ $(1 \leqslant n \leqslant N)$ 满足

$$\begin{cases} (\boldsymbol{u}_h^n, \Pi_h^* \boldsymbol{v}_h) + k\mathcal{A}((\boldsymbol{u}_h^n, p_h^n); (\Pi_h^* \boldsymbol{v}_h, q_h)) \\ = k(\boldsymbol{f}^n, \Pi_h^* \boldsymbol{v}_h) + (\boldsymbol{u}_h^{n-1}, \Pi_h^* \boldsymbol{v}_h), \quad \forall (\boldsymbol{v}_h, q_h) \in U_h \times M_h, \\ \boldsymbol{u}_h^0 = \boldsymbol{u}_h(x, y, 0) = S_h \boldsymbol{u}_0(x, y), \quad (x, z) \in \Omega. \end{cases} \tag{3.2}$$

对于问题 (VI) 即问题 (VII) 解的存在唯一性及误差估计, 有下面的主要结果.

定理 10. 在条件 (2.6)-(2.9) 成立下, 问题 (VI) 即问题 (VII) 存在唯一的解满足

$$\|\boldsymbol{u}_h^n\|_0 + k\sum_{i=1}^n (\|\boldsymbol{u}_h^i\|_1 + \|p_h^i\|_0) \leqslant C\left(h\|\boldsymbol{u}_0\|_1 + \|\boldsymbol{u}_0\|_0 + k\sum_{i=1}^n \|\boldsymbol{f}(t_i)\|_0\right). \tag{3.3}$$

而且当 $k = h$ 时, 有下面的误差估计

$$\|\boldsymbol{u}(t_n) - \boldsymbol{u}_h^n\|_0 + k\sum_{i=1}^n (\|\boldsymbol{u}(t_i) - \boldsymbol{u}_h^i\|_1 + \|p(t_i) - p_h^i\|_0) \leqslant C\left(h^2 + k^2\right)\sum_{i=1}^n \|\boldsymbol{f}(t_i)\|_0,\ n = 1, 2, \cdots, N. \tag{3.4}$$

证明. 由于双线性形 $\mathcal{A}(\cdot,\cdot)$ 在 $(U_h, M_h) \times (U_h, M_h)$ 上满足连续性和弱正定性 (见引理 7), 令

$$\bar{\mathcal{A}}((\boldsymbol{u}_h^n, p_h^n); (\Pi_h^* \boldsymbol{v}_h, q_h)) = (\boldsymbol{u}_h^n, \Pi_h^* \boldsymbol{v}_h) + k\mathcal{A}((\boldsymbol{u}_h^n, p_h^n); (\Pi_h^* \boldsymbol{v}_h, q_h)),$$

注意到 $k < 1$, 则由引理 5–7 有

$$\begin{aligned} &\bar{\mathcal{A}}((\boldsymbol{u}_h^n, p_h^n); (\Pi_h^* \boldsymbol{v}_h, q_h)) \le \||\boldsymbol{u}_h^n|\|_0 \|_0 \Pi_h^* \boldsymbol{v}_h\|| + kC(\|\boldsymbol{u}_h\|_1 + \|p_h\|_0)(\|\Pi_h^* \boldsymbol{v}_h\|_1 + \|q_h\|_0) \\ &\le C(\|\boldsymbol{u}_h\|_1 + \|p_h\|_0)(\|v_h\|_1 + \|q_h\|_0). \end{aligned} \tag{3.5}$$

对于固定的 k, 再由引理 5–7 有

$$\begin{aligned} &\sup_{(\boldsymbol{v}_h, q_h) \in U_h \times M_h} \frac{\bar{\mathcal{A}}((\boldsymbol{u}_h^n, p_h^n); (\Pi_h^* \boldsymbol{v}_h, q_h))}{\|\boldsymbol{v}_h\|_1 + \|q_h\|_0} \\ &\ge \|\boldsymbol{u}_h^n\|_0 + \sup_{(\boldsymbol{v}_h, q_h) \in U_h \times M_h} \frac{k\mathcal{A}((\boldsymbol{u}_h^n, p_h^n); (\Pi_h^* \boldsymbol{v}_h, q_h))}{\|\boldsymbol{v}_h\|_1 + \|q_h\|_0} \\ &\ge (\|\boldsymbol{u}_h^n\|_0 + k\beta\|\boldsymbol{u}_h^n\|_1 + k\beta\|p_h^n\|_0),\ \forall (v_h, q_h) \in U_h \times M_h. \end{aligned} \tag{3.6}$$

于是, 双线性形 $\bar{\mathcal{A}}(\cdot,\cdot)$ 在 $(U_h, M_h) \times (U_h, M_h)$ 上也满足连续性和弱正定性, 再由 Lax-Milgram 定理 (参见 [6]) 可知, 问题 (VI) 即问题 (VII) 存在唯一解. 由 (3.6) 和 (3.2) 可得

$$\|\boldsymbol{u}_h^n\|_0 + k\beta\|\boldsymbol{u}_h^n\|_1 + k\beta\|p_h^n\|_0 \le kC\|f^n\|_0 + \|\boldsymbol{u}_h^{n-1}\|_0. \tag{3.7}$$

对 (3.7) 从 1 到 n 求和, 并利用引理 8 得

$$\begin{aligned} &\|\boldsymbol{u}_h^n\|_0 + k\sum_{i=1}^n \|\boldsymbol{u}_h^i\|_1 + k\beta\|p_h^i\|_0 \le kC\sum_{i=1}^n \|f(t_i)\|_0 + \|S_h \boldsymbol{u}^0\|_0 \\ &\le C\left(\|\boldsymbol{u}^0\|_0 + h\|\boldsymbol{u}^0\|_1 + k\sum_{i=1}^n \|f(t_i)\|_0\right). \end{aligned} \tag{3.8}$$

考虑问题 (III) 的下面时间向后一步的半离散化格式.

问题 (VIII): 求 $(\boldsymbol{u}^n, p_n) \in U \times M$ 满足

$$\begin{cases} (\boldsymbol{u}^n, \boldsymbol{v}) + kB((\boldsymbol{u}^n, p^n); (\boldsymbol{v}, q)) = k(\boldsymbol{f}^n, \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u}^{n-1}, \boldsymbol{v}),\ \forall (\boldsymbol{v}, q) \in U \times M, \\ \boldsymbol{u}^0 = u(x, y, 0) = \boldsymbol{u}_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega. \end{cases} \tag{3.9}$$

在问题 (VIII) 中取 $\boldsymbol{v} = \Pi_h^* \boldsymbol{v}_h$ 和 $q = q_h$, 并与问题 (VII) 相减得误差方程

$$\begin{cases} (\boldsymbol{u}^n - \boldsymbol{u}_h^n, \Pi_h^* \boldsymbol{v}_h) + k\mathcal{A}((\boldsymbol{u}^n - \boldsymbol{u}_h^n, p^n - p_h^n); (\Pi_h^* \boldsymbol{v}_h, q_h)) - kD_h(p^n, q_h) \\ = (\boldsymbol{u}^{n-1} - \boldsymbol{u}_h^{n-1}, \Pi_h^* v_h),\ \forall (\boldsymbol{v}_h, q_h) \in U_h \times M_h, \\ \boldsymbol{u}^0 - \boldsymbol{u}_h^0 = \boldsymbol{u}^0 - S_h \boldsymbol{u}_0, \quad (x, y) \in \Omega. \end{cases} \tag{3.10}$$

由 (3.6), (3.10) 和 (2.31) 有

$$\begin{aligned} & \|S_h \boldsymbol{u}^n - \boldsymbol{u}_h^n\|_0 + k\beta \|S_h \boldsymbol{u}^n - \boldsymbol{u}_h^n\|_1 + k\beta \|Q_h p^n - p_h^n\|_0 \\ & \le \sup_{(\boldsymbol{v}_h, q_h) \in U_h \times M_h} \frac{\bar{\mathcal{A}}((S_h \boldsymbol{u}^n - \boldsymbol{u}_h^n, Q_h p^n - p_h^n); (\Pi_h^* \boldsymbol{v}_h, q_h))}{\|\boldsymbol{v}_h\|_1 + \|q_h\|_0} \\ & \le \|S_h \boldsymbol{u}^n - \boldsymbol{u}^n\|_0 + k\|S_h \boldsymbol{u}^n - \boldsymbol{u}^n\|_1 + k\|Q_h p^n - p^n\|_0 \\ & + \sup_{(\boldsymbol{v}_h, q_h) \in U_h \times M_h} \frac{k\mathcal{A}((\boldsymbol{u}^n - \boldsymbol{u}_h^n, p^n - p_h^n); (\Pi_h^* \boldsymbol{v}_h, q_h))}{\|\boldsymbol{v}_h\|_1 + \|q_h\|_0} \\ & \le \|S_h \boldsymbol{u}^n - \boldsymbol{u}^n\|_0 + k\|S_h \boldsymbol{u}^n - \boldsymbol{u}^n\|_1 + k\|Q_h p^n - p^n\|_0 \\ & + \sup_{(\boldsymbol{v}_h, q_h) \in U_h \times M_h} \frac{kD_h(p^n, q_h) + (\boldsymbol{u}^{n-1} - \boldsymbol{u}_h^{n-1}, \Pi_h^* v_h)}{\|\boldsymbol{v}_h\|_1 + \|q_h\|_0} \\ & \le \|S_h \boldsymbol{u}^n - \boldsymbol{u}^n\|_0 + k\|S_h \boldsymbol{u}^n - \boldsymbol{u}^n\|_1 + k\|Q_h p^n - p^n\|_0 \\ & + \sup_{(\boldsymbol{v}_h, q_h) \in U_h \times M_h} \frac{kD_h(p^n - \rho_h p^n, q_h - \rho_h q_h) + (\boldsymbol{u}^{n-1} - \boldsymbol{u}_h^{n-1}, \Pi_h^* v_h)}{\|\boldsymbol{v}_h\|_1 + \|q_h\|_0} \\ & \le \|S_h \boldsymbol{u}^n - \boldsymbol{u}^n\|_0 + k\|S_h \boldsymbol{u}^n - \boldsymbol{u}^n\|_1 + k\|Q_h p^n - p^n\|_0 \\ & + Ck\|p^n - \rho_h p^n\|_0 + C\|\boldsymbol{u}^{n-1} - S_h \boldsymbol{u}^{n-1}\|_0 + \|S_h \boldsymbol{u}^{n-1} - \boldsymbol{u}_h^{n-1}\|_0 \\ & \le Ch^2(\|\boldsymbol{u}^n\|_2 + \|p^n\|_1) + \|S_h \boldsymbol{u}^{n-1} - \boldsymbol{u}_h^{n-1}\|_0. \end{aligned} \tag{3.11}$$

上式两边从 1 到 n 做和并由引理 8 得

$$\begin{aligned} & \|S_h \boldsymbol{u}^n - \boldsymbol{u}_h^n\|_0 + k\sum_{i=1}^n (\|S_h u^i - \boldsymbol{u}_h^i\|_1 + \|Q_h p^i - p_h^i\|_0) \\ & \le Ch^2 \sum_{i=1}^n (\|\boldsymbol{u}^i\|_2 + \|p^i\|_1) + \|S_h \boldsymbol{u}^0 - S_h \boldsymbol{u}^0\|_0 \\ & \le Ch^2 \sum_{i=1}^n (\|\boldsymbol{u}^i\|_2 + \|p^i\|_1). \end{aligned} \tag{3.12}$$

于是有

$$\|\boldsymbol{u}^n - \boldsymbol{u}_h^n\|_0 + k\sum_{i=1}^n (\|u^i - \boldsymbol{u}_h^i\|_1 + \|p^i - p_h^i\|_0) \le Ch^2 \sum_{i=1}^n (\|\boldsymbol{u}^i\|_2 + \|p^i\|_1). \tag{3.13}$$

容易证明 (参见 [22]), 问题 (II) 的解和问题 (VIII) 的解之间有误差估计

$$\|\boldsymbol{u}(t_n)-\boldsymbol{u}^n\|_0+k\sum_{i=1}^{n}(\|\boldsymbol{u}(t_i)-\boldsymbol{u}^i\|_1+\|p(t_i)-p^i\|_0)\leq Ck^2\sum_{i=0}^{n}(\|\boldsymbol{u}(t_i)\|_2+\|p(t_i)\|_1). \tag{3.14}$$

结合 (3.13) 和 (3.14) 且由 (3.3) 即得 (3.4). 定理 10 证毕.

附注 2. 从定理 10 可知, 当 $\sum_{i=1}^{N}\|\boldsymbol{f}(t_i)\|_0$ 是有界量时, 所得到的误差估计是最优的. 我们的这些结果是对现有结果的改进和推广.

4. 结论和展望

本文研究了非定常的 Stokes 方程的一种基于两个局部高斯积分全离散稳定化的有限体积元方法, 并推导出了其误差估计. 当 $\sum_{i=1}^{N}\|\boldsymbol{f}(t_i)\|_0$ 是有界量时, 所得到的误差估计是最优的. 这种全离散稳定化的有限体积元格式是一个线性方程组, 可以直接用于数值计算, 因此, 我们的这些结果是对现有结果的改进和推广. 接下来的工作是利用特征投影分解方法对这种全离散稳定化的有限体积元格式做降维处理. 由于篇幅太长, 降维处理的方法在另一文章 [24] 讨论.

参 考 文 献

[1] Girault V, Raviart P A. Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations: Theory and Algorithms[M]. Springer-Verlag: Berlin Heidelberg, 1986.

[2] Heywood J G, Rannacher R. Finite element approximation of the non-stationary Navier–Stokes problem, I. Regularity of solutions and second order estimates for spatial discretization[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1982, 19: 275-311.

[3] Temam R. Navier–Stokes equations (3rd)[M]. North–Holland, Amsterdam: New York, 1984.

[4] Hughes T J, France L P. A new finite element formulation for computational fluid dynamics. VII. The Stokes problem with various well posed boundary conditions, symmetric formulations that converge for all velocity pressure space[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1987, 65: 85-96.

[5] Brezzi F, Douglas Jr J. Stabilized mixed method for the Stokes problem[J]. Numerische Mathematik, 1988, 53: 225-235.

[6] Brezzi F, Fortin M. Mixed and Hybrid Finite Element Methods. Springer–Verlag: New York, 1991.

[7] Douglas Jr J, Wang J P. An absolutely stabilized finite element method for the stokes problem[J]. Mathematics of Computation, 1989, 52: 495-508.

[8] Cai Z, McCormick S. On the accuracy of the finite volume element method for diffusion equations on composite grid[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1990, 27(3): 636-655.

[9] Süli E. Convergence of finite volume schemes for Poisson's equation on nonuniform meshes[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1991, 28(5): 1419-1430.

[10] Jones W P, Menziest K R. Analysis of the cell-centred finite volume method for the diffusion equation[J]. Journal of Computational Physics, 2000, 165: 45-68.

[11] Bank R E, Rose D J. Some error estimates for the box methods[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1987, 24(4): 777-787.

[12] Li R H, Chen Z Y, Wu W. Generalized Difference Methods for Differential Equations-Numerical Analysis of Finite Volume Methods[M]. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics 226. Marcel Dekker Inc.: New York, 2000.

[13] Li Y, Li R H. Generalized difference methods on arbitrary quadrilateral networks[J]. Journal of Computational Mathematics, 1999, 17: 653-672.

[14] Chatzipantelidis P, Lazarrov R D, Thomée V. Error estimates for a finite volume element method for parabolic equations in convex in polygonal domains[J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2004, 20: 650-674.

[15] Chou S H, Kwak D Y. A covolume method based on rotated bilinears for the generalized Stokes problem[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1998, 35: 494-507.

[16] Ye X. On the relation between finite volume and finite element methods applied to the Stokes equations[J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2001, 17: 440-453.

[17] Blanc P, Eymerd R, Herbin R. A error estimate for finite volume methods for the Stokes equations on equilateral triangular meshes[J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2004, 20: 907-918.

[18] Yang M, Song H L. A postprocessing finite volume method for time-dependent Stokes equations[J]. Applied Numerical Mathematics 2009, 59: 1922-1932.

[19] Li J, Chen Z X. A new stabilized finite volume method for the stationary Stokes equations[J]. Adv. Comput. Math., 2009, 30: 141-152.

[20] Shen L H, Li J, Chen Z X. Analysis of stabilized finite volume method for the transient stationary Stokes equations[J]. International Journal of Numerical Analysis and Modeling, 2009, 6(3): 505-519.

[21] Adams R A. Sobolev Space[M]. Academic Press: New York, 1975.

[22] 罗振东. 混合有限元法基础及其应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2006.

[23] Ciarlet P G. The Finite Element Method for Elliptic Problems[M]. Amsterdam: North–Holland, 1978.

[24] Luo Z D, et al. A reduced stabilized finite volume element formulation based on POD for non-stationary Stokes equations[J]. Int. J. Numer. Meth. Fluids (in press).