时滞均值回复 θ 过程及其数值解的收敛性*1)

张春赛 胡良剑
(东华大学应用数学系, 上海 200051)

摘 要

时滞均值回复 θ 过程用于描述受时间延迟影响的利率、波动率等金融特征, 本文利用随机时滞微分方程理论证明了过程在 $1/2 \leq \theta < 1$ 情况时解的存在唯一性和非负性. 由于表示该过程的随机时滞微分方程没有显示解, 所以数值近似解是研究过程的重要的方法, 本文证明了时滞均值回复 θ 过程 Euler-Maruyama 数值解的 $p(p \geq 2)$ 阶矩意义上的强收敛性.

关键词: 均值回复 θ 过程; 存在唯一性; 非负性; Euler-Maruyama 数值解

MR (2000) 主题分类: 34K50, 60H35

MEAN-REVERTING θ PROCESS WITH TIME DELAY AND THE CONVERGENCE OF ITS NUMERICAL SOLUTION

Zhang Chunsai Hu Liangjian
(*Department of Applied Mathematics, Donghua University, Shanghai 200051, China*)

Abstract

The mean-reverting θ process with delay is used as a model for interest rates and volatility as well as other financial quantities which are past level dependent. For $1/2 \leq \theta < 1$, we prove the model has an unique nonnegative solution. Since the corresponding stochastic delay differential equation has no explicit solution, it is very important to study numerical methods for the solution approximations. We prove the strong convergence of Euler-Maruyama approximate solution in sense of p-th moment($p \geq 2$).

Keywords: the mean-reverting θ process, existence and uniqueness; nonnegativity; Euler-Maruyama approximate solution

2000 Mathematics Subject Classification: 34K50, 60H35

1. 时滞均值回复 θ 过程

短期利率是金融市场中一个最基本也是非常重要的特征, 对金融资产定价和金融风险管理有着决定性影响. CIR(Cox-Ingersoll-Ross) 模型 [1] 是用于描述短期利率的一个著名的模型, 也是均值回复 θ 过程

$$dS(t) = \lambda(\mu - S(t))dt + \sigma S^{\theta}(t)dw(t) \tag{1.1}$$

当 $\theta = 1/2$ 时的特例, 它还被广泛应用于描述波动率和其他金融特征. 当 $1/2 \leq \theta \leq 1$ 时, 文献 [2] 证明了模型解存在唯一并且对任意给定非负初值解保持非负性, 并讨论了其数值解均方意义下的强收敛. 当 $\theta > 1$ 时, 文献 [3] 证明了模型存在唯一非负解.

* 2010 年 3 月 25 日收到.
1) 国家自然科学基金 (11071037, 60974030) 资助项目.

一些金融数据与现象表明股票的价格变化不仅与当前的情况有关, 同时也依赖于过去的状态, 所以随机时滞微分方程在金融中应用越来越广泛. 时滞均值回复 θ 过程可以表示为:

$$dS(t)=\lambda(\mu-S(t))dt+\sigma S^{\theta}(t)S^{\gamma}(t-\tau)dw(t). \tag{1.2}$$

这个模型就考虑了系统 (短期利率、波动率等金融特征) 的变化依赖过去的情况. 一般情况下, 随机时滞微分方程没有显示解, 所以数值近似解是研究随机时滞微分方程的一个有效的方法.

只有当数值解收敛于方程的准确解时, 才能通过数值解的性质研究方程准确解的性质. 所以研究随机时滞微分方程数值解相关问题首先需要研究数值解的收敛性. 文献 [4] 给出了当 $\theta=1/2$ 时时滞均值回复平方根模型, 即时滞的 CIR 模型解存在唯一且几乎处处保持非负性质, 并且证明了 Euler-Maruyama(EM) 数值解均方意义下强收敛性. 本文证明了当 $1/2\le\theta<1$ 时, 时滞均值回复 θ 过程解的存在唯一性且几乎处处保持非负的性质. 从而推广了 [4] 中的结果. 本文还证明了数值解的 p 次方 $(p\ge 2)$ 强收敛. 而文献 [4] 中仅给出了 $\theta=\frac{1}{2}$ 时数值解在均方意义下的强收敛, 所以本文得到的是比文献 [4] 更强的数值解收敛结果.

2. 时滞均值回复 θ 过程的存在唯一性和非负性

记 $R^+=(0,\infty)$. 设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为完备概率空间, 流 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge0}$ 满足通常条件, $\omega(t)$ 为定义在这个空间上的 Brown 运动. 记 $C([-\tau,0],R^+)=\{f|f:[-\tau\ 0]\to R^+\}$ 且范数为 $\|f\|=\sup_{-\tau\le\theta\le0}|f(\theta)|$. 令 $p>0,\mathcal{L}^p_{\mathcal{F}_{t_0}}([-\tau,0],R^+)$ 是 $\mathcal{F}_{t_0}$ 可测 $C([-\tau,0],R^+)$ 值随机变量. 考虑当 $t\in[0,T]$ 时滞均值回复 θ 过程 (2), 初值 $S(t)=\xi(t),t\in[-\tau,0]$, 其中 $\xi\in C([-\tau,0];R^+),E\|\xi\|^p<\infty$. λ, μ, σ 为正数, 且 $1/2\le\theta<1$ 要证明 (1.2) 式存在唯一正解, 首先考虑下面方程

$$dS(t)=\lambda(\mu-S(t))dt+\sigma|S(t)|^{\theta}|S(t-\tau)|^{\gamma}dw(t)\quad t\in[0,T]. \tag{2.1}$$

其初值 $S(t)=\xi(t),t\in[-\tau,0]$. 如果能证明方程 (2.1) 存在唯一解且解非负, 则方程 (1.2) 与方程 (2.1) 式等价, 即方程 (1.2) 存在唯一非负解.

引理 1. [5] 假设一维方程

$$dx(t)=b(t,x(t))dt+\sigma(t,x(t))dw(t),t\ge0,x(t_0)=x_0. \tag{2.2}$$

如果系数满足对 $\forall x,y\in R,b(\cdot,x),\sigma(\cdot,x)$ 为 $\mathcal{F}_t$ 适应过程, 而且

$$|b(t,x)-b(t,y)|\le K|x-y|$$

$$|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)|\le h(x-y)$$

对 $\forall t\ge0,x,y\in R$ 几乎处处成立, 其中 K 为正常数且 $h:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 为严格增函数 $h(0)=0$ 且

$$\int_{(0,\varepsilon)}h^{-2}(u)du=\infty,\quad\forall\varepsilon>0.$$

则方程 (2.2) 存在唯一解.

引理 2. 对任意给定初值 $\xi\in C([-\tau,0],R^+)$, 则方程 (2.1) 存在唯一解.

证明. 由于 u^θ 为严格增函数且当 $1/2 \le \theta < 1$ 时

$$\int_{(0,\varepsilon)} u^{-2\theta} du = \infty, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

利用引理 1, 类似于参考文献 [4] 引理 2.1 的证明, 可得方程 (2.1) 存在唯一解.

定理 1. 令 $S(t)$ 为方程 (2.1) 的解, 则对任意 $p \ge 2$, 存在常数 K, 使得

$$E(\sup_{-\tau \le t \le T} |S(t)|^p) \le K \tag{2.3}$$

证明. 对 $\forall t \in [0,T]$, 由方程 (2.1) 可得

$$S(t) = S(0) + \lambda \int_0^t (\mu - S(r))dr + \int_0^t \sigma |S(r)|^\theta |S(r-\tau)|^\gamma dw(t), \quad 1/2 \le \theta < 1. \tag{2.4}$$

对 $\forall k > 0$, 定义停时 $\tau_k = \inf\{t \ge 0, |S(t)| > k\}$, 其中令 $\inf \emptyset = \infty$. 由 Burkholder-Davis-Gundy(BDG) 不等式 [6] 和 Hölder 不等式知, 对 $\forall t_1 \in [0,T], p \ge 2$,

$$\begin{aligned} E\left(\sup_{0\le t\le t_1} |S(t\wedge\tau_k)|^p\right) &\le 3^{p-1}E|S(0)|^p + 3^{p-1}\lambda^p E\left(\int_0^{t_1\wedge\tau_k} |\mu - S(r)|dr\right)^p \\ &\quad +3^{p-1}\sigma^p E\sup_{0\le t\le t_1}\left|\int_0^{t\wedge\tau_k} |S(r-\tau)|^\gamma |S(r)|^\theta dr\right|^p \\ &\le 3^{p-1}\left[E|S(0)|^p + \lambda^p T^{p-1}\int_0^{t_1} E\left(|\mu - S(r\wedge\tau_k)|^p\right)dr\right. \\ &\quad \left.+\sigma^p C_p E\left(\int_0^{t_1\wedge\tau_k} |S(r-\tau)|^{2\gamma}|S(r)|^{2\theta}dr\right)^{\frac{p}{2}}\right] \end{aligned} \tag{2.5}$$

其中 $C_p = [\frac{p^{p+1}}{2(p-1)^{p-1}}]^{\frac{p}{2}}$. 利用不等式 $a^\gamma b^{1-\gamma} \le \gamma a + (1-\gamma)b, \forall a,b > 0, \gamma \in [0,1]$, 以及 Hölder 不等式得到

$$\begin{aligned} &E\left(\int_0^{t_1\wedge\tau_k} |S(r-\tau)|^{2\gamma}|S(r)|^{2\theta}dr\right)^{\frac{p}{2}} = E\left(\int_0^{t_1\wedge\tau_k} (|S(r)|^2)^\theta (|S(r-\tau)|^{\frac{2\gamma}{1-\theta}})^{1-\theta}dr\right)^{\frac{p}{2}} \\ &\le 2^{\frac{p}{2}-1}\theta^{\frac{p}{2}}E\left(\int_0^{t_1\wedge\tau_k} |S(r)|^2 dr\right)^{\frac{p}{2}} + 2^{\frac{p}{2}-1}(1-\theta)^{\frac{p}{2}}E\left(\int_0^{t_1\wedge\tau_k} |S(r-\tau)|^{\frac{2\gamma}{1-\theta}}dr\right)^{\frac{p}{2}} \\ &\le 2^{\frac{p}{2}-1}\theta^{\frac{p}{2}}T^{\frac{p-2}{2}}\int_0^{t_1} E|S(r\wedge\tau_k)|^p dr + 2^{\frac{p}{2}-1}(1-\theta)^{\frac{p}{2}}T^{\frac{p-2}{2}}\int_0^{t_1} E|S(r\wedge\tau_k - \tau)|^{\frac{\gamma p}{1-\theta}}dr \end{aligned} \tag{2.6}$$

而且

$$E|\mu - S(r\wedge\tau_k)|^p \le 2^{p-1}\mu^p + 2^{p-1}E|S(r\wedge\tau_k)|^p \tag{2.7}$$

将 (2.6), (2.7) 式代入 (2.5) 式中得

$$E(\sup_{0\le t\le t_1} |S(t\wedge\tau_k)|^p) \le 3^{p-1}(E|S(0)|^p + \lambda^p T^p 2^{p-1}\mu^p)$$

$$+3^{p-1}\sigma^p C_p 2^{\frac{p}{2}-1}(1-\theta)^{\frac{p}{2}}T^{\frac{p-2}{2}}\int_0^{t_1} E|S(r\wedge\tau_k - \tau)|^{\frac{\gamma p}{1-\theta}}dr$$

$$+3^{p-1}(\lambda^p T^{p-1}2^{p-1}+\sigma^p C_p 2^{\frac{p}{2}-1}T^{\frac{p-2}{2}}\theta^{\frac{p}{2}})\int_0^{t_1}E|S(r\wedge\tau_k)|^p dr$$

$$=a_p+b_p\int_0^{t_1}E|S(r\wedge\tau_k-\tau)|^{\frac{\gamma p}{1-\theta}}dr+c_p\int_0^{t_1}E|S(r\wedge\tau_k)|^p dr \tag{2.8}$$

其中 a_p,b_p,c_p 都是依赖于 $p,S(0),\lambda,T,\mu,\sigma,\theta$ 的常数.

选取有限序列 $p_1,p_2,\cdots,p_{[t/\tau]+1}$, 使得 $p_i\geq 2$ 且 $\frac{\gamma p_{i+1}}{1-\theta}<p_i, i=1,2,\cdots,[t/\tau]$, 对任意 $p=p_{[t/\tau]}\geq 2$ 都可以找到这样的序列. 当 $t_1\in[0,\tau]$,

$$E|S(r-\tau)^{\frac{\gamma p}{1-\theta}}|=E|\xi(r-\tau)^{\frac{\gamma p}{1-\theta}}|\leq E||\xi||^{\frac{\gamma p}{1-\theta}},\forall r\in[0,t_1].$$

由 (2.8) 式可得

$$E(\sup_{0\leq t\leq t_1}|S(t\wedge\tau_k)|^{p_1})\leq a_{p_1}+b_{p_1}E||\xi||^{\frac{\gamma p_1}{1-\theta}}+c_{p_1}\int_0^{t_1}E\sup_{0\leq\nu\leq r}|S(\nu\wedge\tau_k)|^{p_1}dr. \tag{2.9}$$

其中 a_{p_1},b_{p_1},c_{p_1} 与 a_p,b_p,c_p 相似的定义, 由 Gronwall 不等式可得

$$E(\sup_{0\leq t\leq t_1}|S(t\wedge\tau_k)|^{p_1})\leq(a_{p_1}+b_{p_1}E||\xi||^{\frac{\gamma p_1}{1-\theta}}T)e^{c_{p_1}\tau}.$$

令 $k\to\infty$, 由 Fatou 引理得

$$E(\sup_{0\leq t\leq\tau}|S(t)|^{p_1})\leq(a_{p_1}+b_{p_1}E||\xi||^{\frac{\gamma p_1}{1-\theta}}T)e^{c_{p_1}\tau}.$$

而

$$E(\sup_{-\tau\leq t\leq\tau}|S(t)|^{p_1})\leq E(\sup_{-\tau\leq t\leq 0}|S(t)|^{p_1})+E(\sup_{0\leq t\leq\tau}|S(t)|^{p_1}).$$

$$\leq E||\xi||^{p_1}+(a_{p_1}+b_{p_1}E||\xi||^{\frac{\gamma p_1}{1-\theta}}T)e^{c_{p_1}T}=:A_1. \tag{2.10}$$

当 $t_1\in[0,2\tau]$, 由 (2.8) 式可得

$$E(\sup_{0\leq t\leq t_1}|S(t\wedge\tau_k)|^{p_2})\leq a_{p_2}+b_{p_2}\int_0^{t_1}E|S(r\wedge\tau_k-\tau)|^{\frac{\gamma p_2}{1-\theta}}dr+c_{p_2}\int_0^{t_1}E|S(r\wedge\tau_k)|^{p_2}dr.$$

由 Lyapunov 不等式及 p_i 定义可知

$$E(\sup_{0\leq t\leq t_1}|S(t\wedge\tau_k)|^{p_2})\leq a_{p_2}+b_{p_2}\int_0^{2\tau}(E|S(r\wedge\tau_k-\tau)|^{p_1})^{\frac{\gamma p_2}{p_1(1-\theta)}}dr+c_{p_2}\int_0^{t_1}E|S(r\wedge\tau_k)|^{p_2}dr$$

由 Gronwall 不等式和 Fatou 引理可得

$$E\left(\sup_{0\leq t\leq 2\tau}|S(t)|^{p_2}\right)\leq(a_{p_2}+b_{p_2}TA_1^{\frac{\gamma p_2}{p_1(1-\theta)}})e^{c_{p_2}2\tau}.$$

则

$$E\left(\sup_{-\tau\leq t\leq 2\tau}|S(t)|^{p_2}\right)\leq E\left(\sup_{-\tau\leq t\leq 0}|S(t)|^{p_2}\right)+E\left(\sup_{0\leq t\leq 2\tau}|S(t)|^{p_2}\right)$$

$$\leq E||\xi||^{p_2}+\left(a_{p_2}+b_{p_2}TA_1^{\frac{\gamma p_2}{p_1(1-\theta)}}\right)e^{c_{p_2}T}=:A_2. \tag{2.11}$$

重复上面的证明过程可得到对任意 $p=p_{[T/\tau]+1}\geq 2$, 存在常数 $A_{[T/\tau]+1}$ 使得

$$E(\sup_{-\tau\leq t\leq T}|S(t)|^p)\leq A_{[T/\tau]+1}. \tag{2.12}$$

取 $K=A_{[T/\tau]+1}$, 即可得所要证明的结论.

定理 2. 对任意给定初值 $\xi\in C([-\tau,0];R^+)$, 方程 (2.1) 的解以概率 1 非负, 即对任意 $t\in[-\tau,T], S(t)\geq 0, a.s.$

证明. 令 $a_0=1$, 对任意整数 $k=1,2,\cdots.$, 定义

$$a_k=\begin{cases} e^{\frac{-k(k+1)}{2}}, & \theta=\frac{1}{2};\\ (\frac{(2\theta-1)k(k+1)}{2})^{\frac{1}{1-2\theta}}, & \theta\in(\frac{1}{2},1). \end{cases}$$

使得 $\int_{a_k}^{a_{k-1}}\frac{du}{u^{2\theta}}=k$. 对任意 $k=1,2,\cdots.$ 存在连续函数 $\psi_k(u)$ 定义在 (a_k,a_{k-1}) 上, 使得

$$0\leq\psi_k(u)\leq\frac{2}{ku^{2\theta}}, a_k<u<a_{k-1},$$

在 (a_k,a_{k-1}) 之外, 定义 $\psi_k(u)=0$, 且 $\int_{a_k}^{a_{k-1}}\psi_k(u)du=1$. 定义

$$\varphi_k(u)=\begin{cases} 0, & x\geq 0;\\ \int_0^{-x}dy\int_0^y\psi_k(u)du, & x<0. \end{cases}$$

则 $\varphi_k\in C^2(R,R)$, 且具有下面性质:

(1) 当 $-a_{k-1}<x<-a_k$ 时, $-1\leq\varphi_k^{'}(x)\leq 0$. 否则 $\varphi_k^{'}(x)=0$.

(2) 当 $-a_{k-1}<x<-a_k$ 时, $-1\leq\varphi_k^{''}(x)\leq\frac{2}{k|x|^{2\theta}}$. 否则 $\varphi_k^{''}(x)=0$.

(3) $x^- - a_{k-1}\leq\varphi_k(x)\leq x^-, x\in R$.

其中当 $x<0$ 时, $x^-=-x$. 当 $x<0$ 时, $x^-=0$.

由 Itô 公式, 定理 1 和 φ_k 定义知

$$\begin{aligned} E\varphi_k(S(t)) &= \varphi_k(S(0))+E\int_0^t\left(\lambda\varphi_k^{'}(S(r))(\mu-S(r))+\frac{\sigma^2}{2}\varphi_k^{''}(S(r))|S(r-\tau)|^{2\gamma}|S(t)|^{2\theta}\right)dr\\ &\leq\frac{\sigma^2}{k}\int_0^t E|S(r-\tau)|^{2\gamma}dr \end{aligned}$$

当 $\gamma\in[0,1]$ 时, 由定理 1 得

$$E\varphi_k(S(t))\leq\frac{\sigma^2}{k}\int_0^t(E|S(r-\tau)|^3)^{\frac{2\gamma}{3}}dr\leq\frac{\sigma^2}{k}TK^{\frac{2\theta}{3}}\leq\frac{\sigma^2}{k}T(K\vee 1)$$

其中 K 为定理 1 中得到的常数.

当 $\gamma>1$ 时,

$$E\varphi_k(S(t)))\leq\frac{\sigma^2}{k}\int_0^t E|S(r-\tau)|^{2\gamma}dr\leq\frac{\sigma^2}{k}TK$$

由性质 (3) 得

$$ES^-(t)-a_{k-1}\leq E\varphi_k(S(t))\leq\frac{\sigma^2}{k}T(K\vee 1)$$

当 $k\to\infty$ 时得 $ES^-(t)\le 0$. 即 $\forall t\ge 0, ES^-(t)=0$. 所以

$$P(S(t)<0)=0,\forall t\ge 0.$$

由这个定理可得方程 (1.2) 与方程 (2.1) 等价, 由定理 1 及定理 2 可知方程 (1.2) 存在唯一非负解.

3. Euler-Marumaya 数值解

将离散的 EM 数值方法 [7,8] 应用到方程 (1.2) 中. 以下令 $S(t)$ 为方程 (1.2) 的解. 设存在整数 N, 使得 $\tau=Nh$, 其中 h 为 $[0,T]$ 上的分隔步长, $h=T/m, t_n=nh, n=0,1,\cdots,m$. 因为 $\Delta w\backsim N(0,h)$, 不能保证得到方程 (1.2) 的非负数值解列 $\{s_k\}_{k\ge 0}$, 所以得到的数值解取其正部, 即 $s_k^+=max\{0,s_k\}$. 经上述改进之后方程 (1.2) 的离散 EM 数值解为

$$\begin{cases} s_k=\xi(kh), & -N\le k\le 0; \\ s_{k+1}=s_k+\lambda(\mu-s_k)h+\sigma[s_{k-N}^+]^\gamma s_k^{+\theta}\Delta w, & k>0. \end{cases} \tag{3.1}$$

为讨论问题的方便, 引入阶梯连续数值解

$$\bar{s}(t)=\begin{cases} \xi(t), & -\tau\le t\le 0; \\ \sum_{k=0}^{[T/h]} s_k I_{[kh,(k+1)h)}, & t\ge 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

则随机连续的 EM 数值解定义如下:

$$s(t)=\begin{cases} \xi(t), & -\tau\le t\le 0; \\ \xi(0)+\lambda\int_0^t \mu-\bar{s}(r)dr+\sigma\int_0^t[\bar{s}(r-\tau)^+]^\gamma[\bar{s}(r)^+]^\theta dw(r), & t\ge 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

对任意 $k, s_k=s(kh)=\bar{s}(kh)$. 容易得到阶梯连续数值解和随机连续 EM 数值解在分割点处值相同, 所以阶梯连续数值解与连续的 EM 近似解存在如下的关系

$$\sup_{0\le t\le T}|\bar{s}(t)|\le\sup_{0\le t\le T}|s(t)|. \tag{3.4}$$

引理 3. 对任意 $p\ge 2$, 则存在常数 $\bar{K}$ 独立于步长 h, 使得

$$E\left(\sup_{-\tau\le t\le T}[s(t)^+]^p\right)\le E\left(\sup_{-\tau\le t\le T}|s(t)|^p\right)\le\bar{K}. \tag{3.5}$$

证明. 由于 $s^+(t)=\max\{0,s(t)\}\le|s(t)|$, 显然成立

$$E\left(\sup_{-\tau\le t\le T}[s^+(t)]^p\right)\le E\left(\sup_{-\tau\le t\le T}[s(t)]^p\right).$$

由 Hölder 不等式及 (3.3) 式可得

$$|s(t)|^p\le 3^{p-1}\left[|\xi(0)|^p+\lambda^p t^{p-1}\int_0^t|\mu-\bar{s}(r)|^p dr+\sigma^p\left|\int_0^t[\bar{s}(r-\tau)^+]^\gamma[\bar{s}(r)^+]^\theta dw(r)\right|^p\right].$$

对任意 $k>0$, 定义 $\tau_k=T\wedge\inf\{t\ge 0,|s(t)|^p>k\}$.

对任意 $t_1 \in [0,T]$, 由 BDG 不等式 [6] 可知

$$E\sup_{0\le t\le t_1}|s(t\wedge\tau_k)|^p \le 3^{p-1}|\xi(0)|^p + 3^{p-1}\lambda^p T^{p-1}\int_0^{t_1\wedge\tau_k}|\mu-\bar{s}(r)|^p dr.$$

$$+3^{p-1}C_p\sigma^p E\left(\int_0^{t_1\wedge\tau_k}[\bar{s}(r-\tau)^+]^{2\gamma}[\bar{s}(r)^+]^{2\theta}dr\right)^{p/2} \tag{3.6}$$

C_p 如定理 1 中定义, 如定理 1 中 (2.5) 式相似的处理方法利用 Hölder 不等式及 (2.6) 式得

$$E\left(\int_0^{t_1\wedge\tau_k}[\bar{s}(r-\tau)^+]^{2\gamma}[\bar{s}(r)^+]^{2\theta}dr\right)^{p/2}$$

$$\le 2^{\frac{p}{2}-1}\theta^{\frac{p}{2}}T^{\frac{p-2}{2}}\int_0^{t_1}E[\bar{s}(r\wedge\tau_k)^+]^p dr + 2^{\frac{p}{2}-1}(1-\theta)^{\frac{p}{2}}T^{\frac{p-2}{2}}\int_0^{t_1}E[\bar{s}(r\wedge\tau_k-\tau)^+]^{\frac{\gamma p}{1-\theta}}dr$$

$$\le 2^{\frac{p}{2}-1}\theta^{\frac{p}{2}}T^{\frac{p-2}{2}}\int_0^{t_1}E|\bar{s}(r\wedge\tau_k)|^p dr + 2^{\frac{p}{2}-1}(1-\theta)^{\frac{p}{2}}T^{\frac{p-2}{2}}\int_0^{t_1}E|\bar{s}(r\wedge\tau_k-\tau)|^{\frac{\gamma p}{1-\theta}}dr$$

$$\le (2T)^{\frac{p}{2}-1}\theta^{\frac{p}{2}}\int_0^{t_1}E\sup_{0\le\nu\le r}|s(\nu\wedge\tau_k)|^p dr + (2T)^{\frac{p}{2}-1}(1-\theta)^{\frac{p}{2}}\int_0^{t_1}E\sup_{0\le\nu\le r}|s(\nu\wedge\tau_k-\tau)|^{\frac{\gamma p}{1-\theta}}dr \tag{3.7}$$

且

$$E|\mu-\bar{s}(r)|^p \le 2^{p-1}\mu^p + 2^{p-1}E|\bar{s}(r)|^p \le 2^{p-1}\mu^p + 2^{p-1}E\sup_{0\le\nu\le r}|s(\nu)|^p \tag{3.8}$$

将 (3.7), (3.8) 代入 (3.6) 式得到

$$E(\sup_{0\le t\le t_1}|s(t\wedge\tau_k)|^p) \le 3^{p-1}(E|\xi(0)|^p + \lambda^p T^p 2^{p-1}\mu^p)$$

$$+3^{p-1}\sigma^p C_p 2^{\frac{p}{2}-1}(1-\theta)^{\frac{p}{2}}T^{\frac{p-2}{2}}\int_0^{t_1}E\sup_{0\le\nu\le r}|s(\nu\wedge\tau_k-\tau)|^{\frac{\gamma p}{1-\theta}}dr$$

$$+3^{p-1}(\lambda^p T^{p-1}2^{p-1} + \sigma^p C_p 2^{\frac{p}{2}-1}T^{\frac{p-2}{2}}\theta^{\frac{p}{2}})\int_0^{t_1}E\sup_{0\le\nu\le r}|s(\nu\wedge\tau_k)|^p dr$$

$$= \bar{a}_p + \bar{b}_p\int_0^{t_1}E\sup_{0\le\nu\le r}|s(\nu\wedge\tau_k-\tau)|^{\frac{\gamma p}{1-\theta}}dr + \bar{c}_p\int_0^{t_1}E\sup_{0\le\nu\le r}|s(\nu\wedge\tau_k)|^p dr \tag{3.9}$$

其中 $\bar{a}_p, \bar{b}_p, \bar{c}_p$ 是依赖于 $p, \xi(0), \lambda, T, \mu, \sigma, \theta$ 的常数. 与定理 1 类似的证明过程可以得到存在常数 $\bar{K}$, 使得

$$E\left(\sup_{-\tau\le t\le T}|s(t)|^p\right) \le \bar{K}.$$

综合上述即得所要证明的 (3.5) 式.

4. Euler-Marumaya 数值解

引理 4. 对任意整数 j, 定义停时 $u_j=\inf\{t\geq 0,|S(t)|\geq j\}$, $v_j=\inf\{t\geq 0,|s(t)|\geq j\}$,$\rho_j=u_j\wedge v_j$, 则

$$\lim_{h\to 0}(\sup_{0\leq t\leq T}E|S(t\wedge\rho_j)-s(t\wedge\rho_j)|)=0. \tag{4.1}$$

证明. 令 $\nu=t\wedge\rho_j$, 则由 $S(t),s(t)$ 的定义式可知

$$S(\nu)-s(\nu)=-\lambda\int_0^\nu(S(r)-\bar{s}(r))dr+\sigma\int_0^\nu S(r-\tau)^\gamma S(r)^\theta-[\bar{s}(r-\tau)^+]^\gamma[\bar{s}(r)^+]^\theta dw(r). \tag{4.2}$$

定义连续函数 $\psi_k(x)$ 如定理 2 中定义, 定义

$$\phi_k(x)=\int_0^{|x|}dy\int_0^y\psi_k(u)du \tag{4.3}$$

则 $\phi_k(x)\in C^2(R,R),\phi_k(0)=0$ 且 $\phi_k^{'}(x)\leq 1,x\in R$

$$|\phi_k^{''}(x)|\begin{cases}\leq\frac{2}{k|x|^{2\theta}}, & a_k\leq|x|\leq a_{k-1};\\ =0, & others.\end{cases} \tag{4.4}$$

容易得到

$$|x|-a_{k-1}\leq\phi_k(x)\leq|x| \tag{4.5}$$

令 $e(\nu)=S(\nu)-s(\nu)$. 应用 Itô公式及其 $\phi_k(x)$ 的性质得

$$E\phi_k(e(\nu))=-\lambda E\int_0^\nu\phi_k^{'}(e(r))(S(r)-\bar{s}(r))dr$$

$$+\frac{\sigma^2}{2}E\int_0^\nu\phi_k^{''}(e(r))[S(r-\tau)^\gamma S(r)^\theta-[\bar{s}(r-\tau)^+]^\gamma[\bar{s}(r)^+]^\theta]^2dr.$$

其中

$$\begin{aligned}&E\int_0^\nu\phi_k^{''}(e(r)\left[S(r-\tau)^\gamma S(r)^\theta-[\bar{s}(r-\tau)^+]^\gamma[\bar{s}(r)^+]^\theta\right]^2dr\\ =\ &E\int_0^\nu\phi_k^{''}(e(r))\left[S(r-\tau)^\gamma S(r)^\theta-S(r-\tau)^\gamma[\bar{s}(r)^+]^\theta\right.\\ &\left.+S(r-\tau)^\gamma[\bar{s}(r)^+]^\theta-[\bar{s}(r-\tau)^+]^\gamma[\bar{s}(r)^+]^\theta\right]^2dr\\ \leq\ &j^{2\gamma}E\int_0^\nu\phi_k^{''}(e(r))\left|S(r)-[\bar{s}(r)^+]\right|^{2\theta}dr+j^{2\theta}c_jE\int_0^\nu\phi_k^{''}(e(r))\left(S(r-\tau)-\bar{s}(r-\tau)^+\right)^{2\gamma})dr.\end{aligned}$$

所以

$$E\phi_k(e(\nu))\leq\lambda E\int_0^\nu|e(r)|dr+\lambda E\int_0^\nu|s(r)-\bar{s}(r)^+|dr+\sigma^2j^{2\gamma}2^{2\theta-1}\int_0^\nu\frac{2}{k}dr$$

$$+\sigma^2j^{2\gamma}\frac{2^{2\theta-1}}{ka_k^{2\theta}}E\int_0^\nu|S(r)-\bar{s}(r)^+|^{2\theta}dr+\sigma^2j^{2\theta}\frac{2c_j\bar{C}}{ka_k^{2\theta}}E\int_0^\nu|e(r-\tau)|^{2\gamma}dr$$

$$+\sigma^2 j^{2\theta}\frac{2c_j\bar{C}_j}{ka_k^{2\theta}}E\int_0^\nu |S(r-\tau)-s(r-\tau)^+|^{2\gamma}dr \tag{4.6}$$

其中

$$\bar{C}_j=\begin{cases}1, & \gamma\in[0,\frac{1}{2}];\\ 2^{2\gamma-1}, & \gamma\in(\frac{1}{2},\infty).\end{cases}$$

$$c_j=\begin{cases}1, & \gamma\in[0,1];\\ \bar{C}_j^{\,2}, & \gamma\in(1,\infty).\end{cases}$$

当 $|x|\le j,|y|\le j,\theta>1$ 时, $|x^\theta-y^\theta|\le\bar{C}_j|x-y|^\theta$. 当 $r\in[0,\nu]$, 记 $[r/h]$ 为 r/h 的整数部分, 则由 (3.2), (3.3) 式定义可知

$$\begin{aligned}s(r)-\bar{s}(r)&=\lambda(\mu-s_{[r/h]})(r-[r/h]h)+\sigma[s^+_{[r/h]-N}]^\gamma[s^+_{[r/h]}]^\theta(w(r)-w([r/h]h))\\ &\le\lambda(\mu+j)h+\sigma j^{\theta+\gamma}|w(r)-w([r/h]h)|\end{aligned} \tag{4.7}$$

因为 $h\in(0,1)$, 则

$$\begin{aligned}E\int_0^\nu|s(r)-\bar{s}(r)|dr&\le\lambda(\mu+j)hT+\sigma j^{\theta+\gamma}E\int_0^\nu|w(r)-w([r/h]h)|dr\\ &\le\lambda(\mu+j)h+\sigma j^{\theta+\gamma}\int_0^T E|w(r)-w([r/h]h)|dr\\ &\le\lambda(\mu+j)hT+\sigma j^{\theta+\gamma}Th^{\frac{1}{2}}\le Dh^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{4.8}$$

其中 D 是依赖于 λ,μ,σ,T,j 的常数. 而进一步

$$\begin{aligned}E\int_0^\nu|s(r)-\bar{s}(r)|^{2\theta}dr&\le 2^{2\theta-1}(\lambda(\mu+j)h)^{2\theta}+2^{2\theta-1}(\sigma j^{\theta+\gamma})^{2\theta}E\int_0^\nu|w(r)-w([r/h]h)|^{2\theta}dr\\ &\le 2^{2\theta-1}(\lambda(\mu+j)h)^{2\theta}+2^{2\theta-1}(\sigma j^{\theta+\gamma})^{2\theta}\int_0^T E|w(r)-w([r/h]h)|^{2\theta}dr\\ &\le 2^{2\theta-1}(\lambda(\mu+j)h)^{2\theta}+2^{2\theta-1}(\sigma j^{\theta+\gamma})^{2\theta}\int_0^T(E|w(r)-w([r/h]h)|^2)^{\frac{2\theta}{2}}dr\\ &\le 2^{2\theta-1}(\lambda(\mu+j)h)^{2\theta}+2^{2\theta-1}(\sigma j^{\theta+\gamma})^{2\theta}h^\theta T\\ &\le 2^{2\theta-1}(\lambda(\mu+j)h)^{2\theta}+2^{2\theta-1}(\sigma j^{\theta+\gamma})^{2\theta}h^\theta T\le D_1h^\theta\end{aligned} \tag{4.9}$$

其中 D_1 是依赖于 λ,μ,σ,T,j 的常数. 将 (4.8), (4.9) 式代入 (4.6) 中, 由 $\phi_k(e(\nu))\ge|e(\nu)|-a_{k-1}$ 得

$$\begin{aligned}E|e(\nu)|\quad\le\quad& a_{k-1}+\lambda\int_0^\nu|e(r)|dr+\sigma^2j^{2\gamma}2^{2\theta}\frac{T}{k}+\frac{\sigma^2j^{2\gamma}2^{2\theta-1}}{ka_k^{2\theta}}D_1h^\theta+\lambda Dh^{\frac{1}{2}}\\ &+\sigma^2j^{2\gamma}c_j\frac{2\bar{C}}{ka_k^{2\theta}}E\int_0^\nu|e(r-\tau)|^{2\gamma}dr+\sigma^2j^{2\theta}c_j\frac{2\bar{C}}{ka_k^{2\theta}}E\int_0^\nu|s(r-\tau)-\bar{s}(r-\tau)|^{2\gamma}dr\\ =:\quad& a_{k-1}+\frac{\alpha}{k}+\beta_1h^{\frac{1}{2}}+\beta_2h^\theta+\eta E\int_0^\nu|s(r-\tau)-\bar{s}(r-\tau)|^{2\gamma}dr\\ &+\frac{\zeta}{ka_k^{2\theta}}E\int_0^\nu|e(r-\tau)|^{2\gamma}dr+\lambda E\int_0^\nu|e(r)|dr.\end{aligned} \tag{4.10}$$

其中 α,ζ 独立于 k, 而 β_1,β_2,η 依赖于 k.

可以看出 (4.10) 式与文献 [4] (4.11) 形式相同, 类似参考文献 [4] 中的证明方法同理可得到 (4.1) 式.

引理 5. 停时 u_j,ν_j,ρ_j 如引理 4 中定义, 则

$$\lim_{h\to 0} E\left(\sup_{0\le t\le T}|S(t\wedge\rho_j)-s(t\wedge\rho_j)|^p\right)=0,\forall p\ge 2. \tag{4.11}$$

证明. (4.7) 式应用 BDG 不等式与 Hölder 不等式得, $\forall t_1\in[0,T],\nu_1=\rho_j\wedge t_1$

$$E\left(\sup_{0\le t\le t_1}|S(t\wedge\rho_j)-s(t\wedge\rho_j)|^p\right)\le 2^{p-1}\lambda^pT^{p-1}E\int_0^{\nu_1}|S(r)-\bar{s}(r)|^pdr$$
$$+2^{p-1}\sigma^pC_pE\left[\int_0^{\nu_1}(S(r)^\theta S(r-\tau)^\gamma-[\bar{s}(r)^+]^\theta[\bar{s}(r-\tau)^+]^\gamma)^2dr\right]^{\frac{p}{2}} \tag{4.12}$$

其中

$$\begin{aligned}
&E\left[\int_0^{\nu_1}(S(r)^\theta S(r-\tau)^\gamma-[\bar{s}(r)^+]^\theta[\bar{s}(r-\tau)^+]^\gamma)^2dr\right]^{\frac{p}{2}}\\
\le\ &E\left(\int_0^{\nu_1}\big(S(r)^\theta S(r-\tau)^\gamma-S(r)^\theta[\bar{s}(r-\tau)^+]^\gamma\right.\\
&\left.+S(r)^\theta[\bar{s}(r-\tau)^+]^\gamma-[\bar{s}(r)^+]^\theta[\bar{s}(r-\tau)^+]^\gamma\big)^2dr\right)^{\frac{p}{2}}\\
\le\ &E\left(\int_0^{\nu_1}2S(r)^{2\theta}\left|S(r-\tau)^\gamma-[\bar{s}(r-\tau)^+]^\gamma\right|^2+2[\bar{s}(r-\tau)^+]^{2\gamma}\left(S(r)^\theta-[\bar{s}(r)^+]^\theta\right)^2dr\right)^{\frac{p}{2}}\\
\le\ &2^{p-1}j^{\theta p}\bar{C}_j^{\frac{p}{2}}E\left(\int_0^{\nu_1}|S(r-\tau)-\bar{s}(r-\tau)|^{2\gamma}dr\right)^{\frac{p}{2}}+2^{p-1}j^{\gamma p}E\left(\int_0^{\nu_1}|S(r)-\bar{s}(r)|^{2\theta}dr\right)^{\frac{p}{2}}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

当 $\frac{1}{2}\le\theta<1$, 由 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned}
E\left(\int_0^{\nu_1}|S(r)-\bar{s}(r)|^{2\theta}dr\right)^{\frac{p}{2}}&\le T^{\frac{p-2}{2}}\int_0^{t_1}E|S(r\wedge\rho_j)-\bar{s}(r\wedge\rho_j)|^{p\theta}dr\\
&\le(2j)^{\theta p-1}T^{\frac{p-2}{2}}\int_0^{t_1}E|S(r\wedge\rho_j)-\bar{s}(r\wedge\rho_j)|dr\\
\le(2j)^{\theta p-1}T^{\frac{p-2}{2}}&\left(\int_0^{t_1}E|S(r\wedge\rho_j)-s(r\wedge\rho_j)|dr+E\int_0^{t_1}|s(r\wedge\rho_j)-\bar{s}(r\wedge\rho_j)|dr\right)\\
&\le(2j)^{\theta p-1}T^{\frac{p}{2}}\sup_{0\le t\le t_1}E|S(t\wedge\rho_j)-s(t\wedge\rho_j)|+(2j)^{\theta p-1}T^{\frac{p-2}{2}}Dh^{\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

当 $\gamma p\ge 1$ 时, 即 $\gamma\ge\frac{1}{p}$ 同上面的推导同理可得

$$\begin{aligned}
&E\left(\int_0^{\nu_1}|S(r-\tau)-\bar{s}(r-\tau)|^{2\gamma}dr\right)^{\frac{p}{2}}\\
\le\ &(2j)^{\gamma p-1}T^{\frac{p}{2}}\sup_{0\le t\le t_1}E|S(t\wedge\rho_j)-s(t\wedge\rho_j)|+(2j)^{\gamma p-1}T^{\frac{p-2}{2}}Dh^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

将 (4.14), (4.15) 代入 (4.13) 式得

$$E\left[\int_0^{\nu_1}(S(r)^\theta S(r-\tau)^\gamma-[\bar{s}(r)^+]^\theta[\bar{s}(r-\tau)^+]^\gamma)^2dr\right]^{\frac{p}{2}}$$

$$\leq [2^{p-1}j^{\theta p}\bar{c}_j^{\frac{p}{2}}(2j)^{\gamma p-1}T^{\frac{p}{2}}+2^{p-1}j^{\gamma p}(2j)^{\theta p-1}T^{\frac{p}{2}}]\sup_{0\leq t\leq t_1}E|S(t\wedge\rho_j)-s(t\wedge\rho_j)|$$

$$+2^{p-1}T^{\frac{p-2}{2}}Dh^{\frac{1}{2}}[j^{\theta p}\bar{c}_j^{\frac{p}{2}}(2j)^{\theta p-1}+j^{\gamma p}(2j)^{\gamma p-1}]. \tag{4.16}$$

而

$$E\int_0^{\nu_1}|S(r)-\bar{s}(r)|^pdr=E\int_0^{\nu_1}|S(r)-s(r)+s(r)-\bar{s}(r)|^pdr$$

$$\leq 2^{p-1}\int_0^{t_1}\sup_{0\leq\nu\leq r}E|S(\nu\wedge\rho_j)-s(\nu\wedge\rho_j)|^pdr+2^{p-1}(2j)^{p-1}Dh^{\frac{1}{2}}. \tag{4.17}$$

将 (4.16), (4.17) 代入 (4.12) 式得

$$E(\sup_{0\leq t\leq t_1}|S(t\wedge\rho_j)-s(t\wedge\rho_j)|^p)\leq 2^{2(p-1)}\lambda^pT^{p-1}\int_0^{t_1}E\sup_{0\leq\nu\leq r}E|S(\nu\wedge\rho_j)-s(\nu\wedge\rho_j)|^pdr$$

$$+2^{p-1}T^{\frac{p-2}{2}}Dh^{\frac{1}{2}}[j^{\theta p}\bar{C}_j^{\frac{p}{2}}(2j)^{\theta p-1}+j^{\gamma p}(2j)^{\gamma p-1}+2^{2(p-1)}j^{p-1}\lambda^p]$$

$$+(2^{p-1}j^{\theta p}\bar{C}_j^{\frac{p}{2}}(2j)^{\theta p-1}T^{\frac{p-2}{2}}+2^{p-1}j^{\gamma p}(2j)^{\gamma p-1}T^{\frac{p}{2}})\sup_{0\leq t\leq t_1}E|S(t\wedge\rho_j)-s(t\wedge\rho_j)|. \tag{4.18}$$

由引理 4 及 Gronwall 不等式可知

$$\lim_{h\to 0}E(\sup_{0\leq t\leq t_1}|S(t\wedge\rho_j)-s(t\wedge\rho_j)|^p)=0.$$

当 $0<\gamma p<1$ 时, 即 $\gamma\in(0,\frac{1}{p})$. 由 Hölder 不等式可知

$$E\left(\int_0^{\nu_1}|S(r-\tau)-\bar{s}(r-\tau)|^{2\gamma}dr\right)^{\frac{p}{2}}\leq T^{\frac{p-2}{2}}\int_0^{t_1}E|S(r\wedge\rho_j)-\bar{s}(r\wedge\rho_j)|^{\gamma p}dr$$

$$\leq T^{\frac{p-2}{2}}\int_0^{t_1}(E|S(r\wedge\rho_j)-s(r\wedge\rho_j)|)^{\gamma p}dr+T^{\frac{p-2}{2}}\int_0^{t_1}E|s(r\wedge\rho_j)-\bar{s}(r\wedge\rho_j)|^{\gamma p}dr. \tag{4.19}$$

由 Lyapunov 不等式可知

$$\int_0^{t_1}E|s(r\wedge\rho_j)-\bar{s}(r\wedge\rho_j)|^{\gamma p}dr$$

$$\leq(\lambda(\mu+j)h)^{\gamma p}T+(\sigma j^{\theta+\gamma})^{\gamma p}\int_0^T(E|w(r)-w([r/h]h)|)^{\gamma p}dr$$

$$\leq(\lambda(\mu+j)h)^{\gamma p}T+(\sigma j^{\theta+\gamma})^{\gamma p}h^{\frac{\gamma p}{2}}T$$

$$=[(\lambda(\mu+j))^{\gamma p}T+(\sigma j^{\theta+\gamma})^{\gamma p}]h^{\frac{\gamma p}{2}}T=:D_2h^{\frac{\gamma p}{2}}. \tag{4.20}$$

将 (4.20) 代入 (4.19) 式中, 再将 (4.14), (4.19) 代入 (4.13) 式得到

$$\begin{aligned} & E\left[\int_0^{\nu_1}(S(r)^\theta S(r-\tau)^\gamma-[\bar{s}(r)^+]^\theta[\bar{s}(r-\tau)^+]^\gamma)^2 dr\right]^{\frac{p}{2}} \\ \le\ & 2^{p-1}j^{\gamma p}(2j)^{\theta p-1}T^{\frac{p}{2}}\sup_{0\le t\le t_1}E|S(t\wedge\rho_j)-s(t\wedge\rho_j)| \\ & +2^{p-1}j^{\theta p}\bar{C}_j^{\frac{p}{2}}T^{\frac{p}{2}}\left(\sup_{0\le t\le t_1}E|S(t\wedge\rho_j)-s(t\wedge\rho_j)|\right)^{\gamma p} \\ & +2^{p-1}T^{\frac{p-2}{2}}(j^{\gamma p}(2j)^{\theta p-1}Dh^{\frac{1}{2}}+j^{\theta p}\bar{C}_j^{\frac{p}{2}}D_2h^{\frac{\gamma p}{2}}). \end{aligned} \tag{4.21}$$

将 (4.17), (4.21) 式代入 (4.12) 式得

$$\begin{aligned} & E(\sup_{0\le t\le t_1}|S(t\wedge\rho_j)-s(t\wedge\rho_j)|^p)\le 2^{2(p-1)}\lambda^pT^{p-1}\int_0^{t_1}E\sup_{0\le\nu\le r}|S(\nu\wedge\rho_j)-s(\nu\wedge\rho_j)|^pdr \\ & +\sigma^pC_p2^{p-1}T^{\frac{p-2}{2}}(j^{\gamma p}(2j)^{\theta p-1}Dh^{\frac{1}{2}}+j^{\theta p}\bar{C}_j^{\frac{p}{2}}D_2h^{\frac{\gamma p}{2}})+2^{3(p-1)}j^{p-1}Dh^{\frac{1}{2}}\lambda^pT^{p-1}+ \\ & +\sigma^pC_p2^{p-1}j^{\gamma p}(2j)^{\theta p-1}T^{\frac{p}{2}}\sup_{0\le t\le t_1}E|S(t\wedge\rho_j)-s(t\wedge\rho_j)| \\ & +\sigma^pC_p2^{p-1}j^{\theta p}\bar{C}_j^{\frac{p}{2}}T^{\frac{p}{2}}\left(\sup_{0\le t\le t_1}E|S(t\wedge\rho_j)-s(t\wedge\rho_j)|\right)^{\gamma p}. \end{aligned} \tag{4.22}$$

将上式应用由 Gronwall 不等式, 由引理 4 得

$$\lim_{h\to 0}E\left(\sup_{0\le t\le t_1}|S(t\wedge\rho_j)-s(t\wedge\rho_j)|^p\right)=0.$$

综合上述, 由 t_1 任意性知

$$\lim_{h\to 0}E\left(\sup_{0\le t\le T}|S(t\wedge\rho_j)-s(t\wedge\rho_j)|^p\right)=0.$$

定理 3. 令 $S(t)$ 为 (1.2) 式解, 连续 EM 近似解 $s(t)$ 定义如 (3.3) 式, 将在下面的意义下收敛于 $S(t)$

$$\lim_{h\to 0}E\left(\sup_{0\le t\le T}|S(t)-s(t)|^p\right)=0,\forall p\ge 2. \tag{4.23}$$

证明. 令 j 充分大的常数, 停时 u_j,ν_j,ρ_j 如引理 4 中定义, 令 $e(t)=S(t)-s(t)$

$$E\left(\sup_{0\le t\le T}|e(t)|^p\right)=E\left(\sup_{0\le t\le T}|e(t)|^p1_{\{u_j>T,\nu_j>T\}}\right)+E\left(\sup_{0\le t\le T}|e(t)|^p1_{\{u_j\le T\text{ or }\nu_j\le T\}}\right). \tag{4.24}$$

利用初等不等式 $\forall a,b>0,r\in[0,1]\quad a^\gamma b^{1-\gamma}\le\gamma a+(1-\gamma)b$ 所以对任意的 $\delta>0$, 都有

$$\begin{aligned} & E\left(\sup_{0\le t\le T}|e(t)|^p1_{\{u_j\le T\text{ or }\nu_j\le T\}}\right)\le E\left[\left(\delta\sup_{0\le t\le T}|e(t)|^{2p+1}\right)^{\frac{p}{2p+1}}(\delta^{-\frac{p}{p+1}}1_{\{u_j\le T\text{ or }\nu_j\le T\}})^{\frac{p+1}{2p+1}}\right] \\ & \le\frac{\delta p}{2p+1}E\sup_{0\le t\le T}|e(t)|^{2p+1}+\frac{p+1}{2p+1}\delta^{-\frac{p}{p+1}}P\{u_j\le T\text{ or }\nu_j\le T\}. \end{aligned} \tag{4.25}$$

由定理 1 及引理 3, 存在常数 M, 对任意 $p \geq 2$

$$E\left(\sup_{-\tau\leq t\leq T}|S(t)|^p\right)\vee E\left(\sup_{-\tau\leq t\leq T}|s(t)|^p\right)\vee E\left(\sup_{-\tau\leq t\leq T}|S(t)|^{2p+1}\right)\vee E\left(\sup_{-\tau\leq t\leq T}|s(t)|^{2p+1}\right)\leq M$$

$$P\{\nu_j\leq T\}\leq E(1_{\{\nu_j\leq T\}}\frac{S(\nu_j)}{j^p})\leq\frac{E(\sup_{-\tau\leq t\leq T}|S(t)|^p)}{j^p}\leq\frac{M}{j^p}.$$

同理可得 $P\{u_j\leq T\}\leq\frac{M}{j^p}$, 所以

$$P\{u_j\leq T \text{ or } \nu_j\leq T\}\leq P\{u_j\leq T\}+P\{\nu_j\leq T\}\leq\frac{2M}{j^p}. \tag{4.26}$$

而且

$$E\left(\sup_{-\tau\leq t\leq T}|e(t)|^{2p+1}\right)\leq 2^{2p}E\left[\sup_{-\tau\leq t\leq T}(|S(t)|^{2p+1}+|s(t)|^{2p+1})\right]$$

$$\leq 2^{2p}\left(E\sup_{-\tau\leq t\leq T}|S(t)|^{2p+1}+E\sup_{-\tau\leq t\leq T}|s(t)|^{2p+1}\right)\leq 2^{2p+1}M, \tag{4.27}$$

$$E(\sup_{-\tau\leq t\leq T}|e(t)|^p1_{\{\rho_j>T\}})=E(\sup_{-\tau\leq t\leq T}|e(t\wedge\rho_j)|^p1_{\{\rho_j<T\}})\leq E(\sup_{-\tau\leq t\leq T}|e(t\wedge\rho_j)|^p). \tag{4.28}$$

将 (4.26), (4.27) 式代入 (4.25) 式, 再将 (4.25), (4.28) 带入 (4.24) 中得

$$E\left(\sup_{-\tau\leq t\leq T}|e(t)|^p\right)\leq E\left(\sup_{-\tau\leq t\leq T}|e(t\wedge\rho_j)|^p\right)+\frac{\delta p}{p+1}2^{2p+1}M+\frac{p+1}{2p+1}\delta^{\frac{p}{p+1}}\frac{2M}{j^p}.$$

对任意 $\varepsilon>0$, 选择充分小的 δ, 使得

$$\frac{\delta p}{2p+1}2^{2p+1}M<\frac{\varepsilon}{3}.$$

再选择充分大的 j, 使得

$$\frac{p+1}{2p+1}\delta^{\frac{p}{p+1}}\frac{2M}{j^p}<\frac{\varepsilon}{3}.$$

由引理 5 知, 存在充分小的 h, 使得

$$E\left(\sup_{-\tau\leq t\leq T}|e(t\wedge\rho_j)|^p\right)<\frac{\varepsilon}{3}.$$

综上所述可得

$$E\left(\sup_{-\tau\leq t\leq T}|e(t)|^p\right)<\varepsilon.$$

参 考 文 献

[1] Cox J C, Ingersoll J E, Ross S A. A theory of the term sturcture of interest rate[J]. Econometrica, 1985, 53: 385-407.

[2] Mao X, Truman A, Yuan C. Euler-Maruyama approximations in mean-reverting stochastic volatility model under regime-switching[J]. J. Appl. Math. Stoch. Anal., 2006, 2006: 1-20.

[3] Wu F, Mao X, Chen K. A high sensitive mean-reverting process in finance and Euler-Maruyama approximations[J]. J. Math. Anal. Appl., 2008, 348: 540-554.

[4] Wu F, Mao X, Chen K. The Cox-Ingersll-Ross model with delay and strong convergence of its Euler-Maruayama approximate solution[J]. J. Appl. Math, 2009, 59: 2641-2658.

[5] Mao X. Expential stabilty of stochastic differential equations[M]. New York: Marcel Dekker, 1994, 36-45.

[6] Mao X. Stochastic differential equation and their applications[M]. England: Horwood Publishing, 1997, 40-45.

[7] Buckwar E. Introduction to the numerical analysis of stochastic delay differential equations[J]. J. Comput. Appl. Math., 2000, 125: 297-307.

[8] Higham D J, Mao X, Swart A M. Strong convergence of Euler-type methods for nonliner stochastic differential equation[J]. S. IAMJ. Number. Anal., 2002, 40(3): 1041-1063.