2011 年 2 月 计 算 数 学 第 33 卷第 1 期
Feb., 2011 MATHEMATICA NUMERICA SINICA Vol.33, No.1

非线性随机延迟微分方程 Heun 方法的数值稳定性*1)

王文强
(湘潭大学数学与计算科学学院, 湖南湘潭 411105;
湘潭大学土木工程与力学学院, 湖南湘潭 411105)

陈艳萍
(华南师范大学数学科学学院, 广州 510631)

摘　要

本文讨论一般非线性随机延迟微分方程 Heun 方法的数值稳定性, 证明了如果问题本身满足零解是均方指数稳定和均方渐近稳定的充分条件, 则当方程的漂移项进一步满足一定的条件时,Heun 方法是 MS- 稳定的, 带线性插值的 Heun 方法是均方指数稳定的和 GMS- 稳定的理论结果. 文末的数值试验进一步验证了所得的相关结论.

关键词: 随机延迟微分方程; Heun 方法; 插值; 均方指数稳定; MS- 稳定; GMS- 稳定

MR (2000) 主题分类: 65C30, 60H35, 65L20

NUMERICAL STABILITY OF HEUN METHODS FOR NONLINEAR STOCHASTIC DELAY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Wang Wenqiang
(*School of Mathematics and Computational Science, Xiangtan University, Xiangtan 411105, Hunan, China;*
Civil Engineering & Machanics College, Xiangtan University, Xiangtan 411105, Hunan, China)

Chen Yanping
(*School of Mathematical Sciences, South China Normal University, Guangzhou 510631, China*)

Abstract

In this paper, the authors investigated the numerical stability of Heun methods for nonlinear stochastic delay differential equations. When the analytical solution satisfies the conditions of mean-square stability, and if the drift term satisfy some restrictions, then the Heun methods with linear interpolation procedure is exponential mean-square stable and GMS-stable, the Heun methods is mean-square stable(MS-stable). Moreover, these results are also verified by some numerical examples.

* 2009 年 11 月 3 日收到.
1) 基金项目: 广东省高等学校珠江学者计划、国家自然科学基金 (10871207)、973 项目 (2005CB321703)、教育部高校博士点基金 (20094301110001)、湖南省自科基金 (09JJ3002) 和湘潭大学博士后科学基金资助项目.

Keywords: stochastic delay differential equations; Heun methods; interpolation; exponential mean-square stability; MS-stability; GMS-stability

2000 Mathematics Subject Classification: 65C30, 60H35, 65L20

1. 引 言

对于随机延迟微分方程数值方法的稳定性研究, 已经受到越来越多的学者关注, 取得的研究成果也越来越多, 只是所讨论的方法大多局限于 Euler-Maruyama 方法和 Milstein 方法, 具体可以参见文献 [1-11] 及其中的参考文献, 而对 Heun 方法的研究尚未看到相关的文献.

Heun 方法起源于常微分方程中的数值方法, 对于随机常微分方程的研究已有的文献也不多见, 较早时期的有 2001 年 L.Grüne 和 P.E.Kloeden 所做的工作 [12], 讨论了 Heun 方法的构造和及其收敛性. 其后也鲜有文献对 Heun 方法作进一步研究.

本文试图对较为一般情形的非线性随机延迟微分方程 Heun 方法的数值稳定性做一些有意义的探讨. 首先给出非线性随机延迟微分方程零解是均方指数稳定和均方渐近稳定的充分条件, 随后又给出数值方法的均方指数稳定、MS- 稳定、GMS- 稳定的概念. 针对其中一种 Heun 方法, 获得了 Heun 方法是 MS- 稳定的一个充分条件, 带线性插值的 Heun 方法是均方指数稳定的和 GMS- 稳定的充分条件. 文末给出的数值试验验证了所得的相关结论.

2. 预备知识

设 $(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0},P)$ 是完备的概率空间, 滤子 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ 满足通常条件, 即它们是右连续的且每一个 $\mathcal{F}_t$ 都包含所有的零概率集. 考虑下列一维非线性随机延迟微分方程

$$\begin{cases} dX(t)=f(t,X(t),X(t-\tau))dt+g(t,X(t),X(t-\tau))dW(t), & t\geq 0,\\ X(t)=\varphi(t), & -\tau\leq t\leq 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $W(t)$ 是一维 Brown 运动或标准 Wiener 过程, 映射 $f:[0,+\infty)\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$ 和 $g:[0,+\infty)\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$ 充分光滑且满足下列条件

$$\begin{aligned} &\left|f(t,X,Y)-f(t,\bar{X},\bar{Y})\right|\leq L(|X-\bar{X}|+|Y-\bar{Y}|),\\ &\left|g(t,X,Y)-g(t,\bar{X},\bar{Y})\right|\leq L(|X-\bar{X}|+|Y-\bar{Y}|), \end{aligned}\qquad \forall\ t\geq 0,\ X,Y,\bar{X},\bar{Y}\in\mathbf{R}, \tag{2.2}$$

和

$$\begin{aligned} &|f(t,X,Y)|^2\leq K(1+|X|^2+|Y|^2),\\ &|g(t,X,Y)|^2\leq K(1+|X|^2+|Y|^2), \end{aligned}\qquad \forall\ t\geq 0,\ X,Y\in\mathbf{R}, \tag{2.3}$$

其中 L,K 均为常数, 通常 (2.2) 称为 Lipschitz 条件, (2.3) 称为线性增长条件. 此时方程 (2.1) 存在唯一强解 $X(t)$. 特别, 当 $f(t,0,0)=0, g(t,0,0)=0$, 时, 此时方程 (2.1) 有零解.

定义 2.1. 如果对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $\|\varphi\|:=\sup\limits_{-\tau\leq s\leq 0}|\varphi(s)|<\delta$ 时, 对于一切 $t\geq 0$ 有

$$E(|X(t)|^p)<\varepsilon \tag{2.4}$$

并且存在 $\delta_0>0$, 使得对于一切满足 $\|\varphi\|<\delta_0$ 的初值函数 φ, 有

$$\lim_{t\rightarrow 0}E(|X(t)|^p)=0 \tag{2.5}$$

成立, 这里 $p\in\mathbf{Z}^+$, 则我们称方程 (2.1) 的零解是 p 阶矩渐近稳定的. 特别地, 如果 $p=2$, 则我们称方程 (2.1) 的零解是均方渐近稳定的.

定理 2.1[8]**.** 如果存在一个正数 a, 使得对任意的 $(t,X)\in[0,+\infty)\times\mathbf{R}$, 有

$$Xf(t,X,0)\le -aX^2 \tag{2.6}$$

且存在非负实数 $\alpha_0,\alpha_1,\beta_0,\beta_1$, 使得对于任意的 $t\ge 0, X,\bar{X},Y\in\mathbf{R}$, 有

$$\big|f(t,X,0)-f(t,\bar{X},Y)\big|\le \alpha_0|X-\bar{X}|+\alpha_1|Y| \tag{2.7}$$

和

$$g^2(t,X,Y)\le \beta_0X^2+\beta_1Y^2 \tag{2.8}$$

成立. 当 $p\ge 2$ 时, 如果

$$a>\alpha_1+\frac{p-1}{2}(\beta_0+\beta_1) \tag{2.9}$$

则方程 (2.1) 的零解是 p 阶矩指数稳定的. 即对于任意的初值函数 φ, 都存在着常数 $\lambda>0$ 和 $C>0$, 使得

$$E(|X(t)|^p)\le CE(\|\varphi\|^p)e^{-\lambda t},\quad t\ge 0. \tag{2.10}$$

推论 2.1[8]**.** 如果方程 (2.1) 满足定理 2.1 中的条件, 则方程的零解是均方渐近稳定的.

3. 随机 Heun 方法

首先简单回顾一下 Heun 方法求解随机微分方程

$$\begin{cases} dX(t)=f(t,X(t))dt+g(t,X(t))dW(t), & t\ge 0,\\ X(0)=X_0. \end{cases} \tag{3.1}$$

构造 Heun 方法如下:

$$X_{k+1}=X_k+\frac{1}{2}[f(t_k,X_k)+f(t_{k+1},X_k+hf(t_k,X_k))]h+g(t_k,X_k)\Delta W_k,\ k=0,1,2,\cdots, \tag{3.2}$$

这里步长 $h>0$, $t_k=kh$,Wiener 增量 $\Delta W_k=W(t_{k+1})-W(t_k)$ 是一列服从 $N(0,h)$ 正态分布且相互独立的随机变量,X_k 为解析解 $X(t_k)$ 相应的数值解, 即 $X_k\approx X(t_k)$.

Heun 方法应用于随机延迟微分方程 (2.1) 得

$$\begin{cases} H_{1,k}=\frac{1}{2}[f(t_k,X_k,\bar{X}_k)+f(t_{k+1},X_k+hf(t_k,X_k,\bar{X}_k),\bar{X}_{k+1})],\\ H_{2,k}=g(t_k,X_k,\bar{X}_k), \\ X_{k+1}=X_k+H_{1,k}h+H_{2,k}\Delta W_k, \end{cases} \quad k=0,1,2,\cdots, \tag{3.3}$$

这里 $\bar{X}_k$ 为 $X(t_k-\tau)$ 相应的逼近值, 它可利用 $\{X_l\}_{l\le k+1}$ 的值在点 $t=t_k-\tau$ 处进行特定的插值得到.

对 $\bar{X}_k$ 进行线性插值, 令 $\tau=(m-\mu)h$, 其中正整数 $m>1,\mu\in[0,1)$, 定义

$$\bar{X}_k=\mu X_{k-m+1}+(1-\mu)X_{k-m}, \tag{3.4}$$

这里当 $l\le 0$ 时, 有 $X_l=\varphi(lh)$.

为了表述的方便, 首先在已有文献的基础上给出下列定义:

定义 3.1. 如果存在常数 $h_0>0$, 使得当积分步长 $h<h_0$ 且 $h=\frac{\tau}{m}$ 时 (m 为正整数), 某种数值方法应用于方程 (2.1) 所得到的数值解 $\{X_k\}$ 恒有

$$\lim_{k\to\infty}E|X_k|^2=0,$$

则称该数值方法是均方稳定 (MS- 稳定) 的.

定义 3.2. 如果存在常数 $h_0>0$, 使得当步长 $h<h_0$ 时, 某种数值方法应用于方程 (2.1) 所得到的数值解 $\{X_k\}$ 恒有

$$\lim_{k\to\infty} E|X_k|^2=0,$$

则称该数值方法是 GMS- 稳定的.

定义 3.3. 如果存在正常数 C_1,C_2 和 h_0, 使得当步长 $h<h_0$ 时, 某种数值方法应用于方程 (2.1) 所得到的数值解 $\{X_k\}$ 满足

$$E|X_k|^2\le C_1E(\|\varphi\|^2)e^{-C_2kh},$$

则称该数值方法是均方指数稳定的.

4. 数值稳定性结果

为了讨论方便, 我们对方程 (2.1) 做以下假设:

(**H1**) 存在一个正数 a, 使得对任意的 $(t,X)\in[0,+\infty)\times\mathbf{R}$, 有

$$Xf(t,X,0)\le -aX^2; \tag{4.1}$$

(**H2**) 存在非负实数 $\alpha_0,\alpha_1,\beta_0,\beta_1,\gamma_0,\gamma_1$, 使得对于任意的 $t\ge 0, X,\bar{X},Y\in\mathbf{R}$, 恒有

$$\left|f(t,X,0)-f(t,\bar{X},Y)\right|\le \alpha_0|X-\bar{X}|+\alpha_1|Y| \tag{4.2}$$

和

$$g^2(t,X,Y)\le\beta_0X^2+\beta_1Y^2,\quad f^2(t,X,Y)\le\gamma_0X^2+\gamma_1Y^2 \tag{4.3}$$

成立;

(**H3**) 常数 ρ 满足

$$\rho=-a+\alpha_1+\frac{1}{2}(\beta_0+\beta_1)<0, \tag{4.4}$$

(**H4**) 方程

$$[\alpha_0(1+\gamma_0+\gamma_1)+2(\gamma_0+\gamma_1)+2\gamma_0(\alpha_1-a)x+\gamma_0(\gamma_0+\gamma_1)x^2]x+2\rho=0 \tag{4.5}$$

的最小正实根是 x_0.

为表述方便, 下文中引入如下记号:

$$h_0=\min\left(x_0,\frac{-1}{\rho},\tau\right).$$

定理 4.1. 如果方程 (2.1) 满足假设条件 (**H1**), (**H2**), (**H3**) 和 (**H4**), 则带线性插值 (3.4) 的 Heun 方法 (3.3) 是均方指数稳定的, 其中步长的稳定限制为 $h<h_0$.

证明. 因为 $\tau=(m-\mu)h$, 所以由方法 (3.3) 得

$$X_{k+1}=X_k+H_{1,k}h+H_{2,k}\Delta W_k. \tag{4.6}$$

上式两边同时平方得

$$X_{k+1}^2=X_k^2+H_{1,k}^2h^2+H_{2,k}^2(\Delta W_k)^2+2X_kH_{1,k}h+2X_kH_{2,k}\Delta W_k+2hH_{1,k}H_{2,k}\Delta W_k. \tag{3.7}$$

又根据条件 (**H1**) 及 (**H2**) 得

$$\begin{aligned} X_kf(t_k,X_k,\bar{X}_k) &= X_k[f(t_k,X_k,\bar{X}_k)-f(t_k,X_k,0)+f(t_k,X_k,0)]\\ &\le X_k[f(t_k,X_k,\bar{X}_k)-f(t_k,X_k,0)]-aX_k^2\\ &\le \alpha_1|X_k||\bar{X}_k|-aX_k^2\\ &\le \tfrac{\alpha_1}{2}(X_k^2+\bar{X}_k^2)-aX_k^2=(\tfrac{\alpha_1}{2}-a)X_k^2+\tfrac{\alpha_1}{2}\bar{X}_k^2. \end{aligned} \tag{3.8}$$

和

$$\begin{aligned} & X_k f(t_{k+1}, X_k + hf(t_k, X_k, \bar{X}_k), \bar{X}_{k+1}) \\ & \quad = X_k[f(t_{k+1}, X_k + hf(t_k, X_k, \bar{X}_k), \bar{X}_{k+1}) - f(t_k, X_k, 0) + f(t_k, X_k, 0)] \\ & \quad \le X_k[f(t_{k+1}, X_k + hf(t_k, X_k, \bar{X}_k), \bar{X}_{k+1})) - f(t_k, X_k, 0)] - aX_k^2 \\ & \quad \le |X_k|(\alpha_0 h|f(t_k, X_k, \bar{X}_k)| + \alpha_1|\bar{X}_{k+1}|) - aX_k^2 \\ & \quad \le \tfrac{\alpha_0 h}{2}((1+\gamma_0)X_k^2 + \gamma_1\bar{X}_k^2) + \tfrac{\alpha_1}{2}(X_k^2 + \bar{X}_{k+1}^2) - aX_k^2 \\ & \quad = [\tfrac{1}{2}\alpha_1 - a + \tfrac{1}{2}\alpha_0 h(1+\gamma_0)]X_k^2 + \tfrac{1}{2}\alpha_1\bar{X}_{k+1}^2 + \tfrac{1}{2}\gamma_1\alpha_0 h\bar{X}_k^2. \end{aligned} \tag{4.9}$$

由 (4.8) 和 (4.9) 得

$$\begin{aligned} X_k H_{1,k} & = \tfrac{1}{2}\left[X_k f(t_k, X_k, \bar{X}_k) + X_k f(t_{k+1}, X_k + hf(t_k, X_k, \bar{X}_k), \bar{X}_{k+1})\right] \\ & \le \tfrac{1}{2}[\alpha_1 - 2a + \tfrac{1}{2}\alpha_0 h(1+\gamma_0)]X_k^2 + \tfrac{1}{4}\alpha_1\bar{X}_{k+1}^2 + \tfrac{1}{4}(\alpha_1 + \gamma_1\alpha_0 h)\bar{X}_k^2. \end{aligned} \tag{4.10}$$

根据条件 (**H2**) 和 (4.8) 得

$$\begin{aligned} H_{1,k}^2 & = \tfrac{1}{2}\left[f^2(t_k, X_k, \bar{X}_k) + f^2(t_{k+1}, X_k + hf(t_k, X_k, \bar{X}_k), \bar{X}_{k+1})\right] \\ & \le \tfrac{1}{2}\left[(\gamma_0 X_k^2 + \gamma_1\bar{X}_k^2) + \gamma_0[X_k + hf(t_k, X_k, \bar{X}_k)]^2 + \gamma_1\bar{X}_{k+1}^2\right] \\ & \le \tfrac{1}{2}\left[\gamma_0(2 + \gamma_0 h^2 + \alpha_1 h - 2ah)X_k^2 + [\gamma_0(\gamma_1 h^2 + \alpha_1 h) + \gamma_1]\bar{X}_k^2 + \gamma_1\bar{X}_{k+1}^2\right]. \end{aligned} \tag{4.11}$$

根据条件 (**H2**) 有

$$H_{2,k}^2 = g^2(t_k, X_k, \bar{X}_k) \le \beta_0 X_k^2 + \beta_1\bar{X}_k^2. \tag{4.12}$$

将 (4.10)、(4.11) 与 (4.12) 代入 (4.7), 同时两边取数学期望得

$$\begin{aligned} EX_{k+1}^2 \le & [1 + (\alpha_1 - 2a)h + \tfrac{1}{2}(\alpha_0 + \alpha_0\gamma_0 + 2\gamma_0)h^2 + \tfrac{\gamma_0}{2}(\alpha_1 - 2a)h^3 + \tfrac{1}{2}\gamma_0^2 h^4]EX_k^2 \\ & + \tfrac{1}{2}(\alpha_1 h + (\alpha_0 + 1)\gamma_1 h^2 + \gamma_0\alpha_1 h^3 + \gamma_0\gamma_1 h^4)E\bar{X}_k^2 \\ & + \tfrac{1}{2}(\alpha_1 h + \gamma_1 h^2)E\bar{X}_{k+1}^2 + (\beta_0 E[(\Delta W_k)^2 X_k^2] + \beta_1 E[\bar{X}_k^2(\Delta W_k)^2]) \\ & + 2E(X_k H_{2,k}\Delta W_k) + 2hE(H_{1,k}H_{2,k}\Delta W_k). \end{aligned} \tag{4.13}$$

由于 $E(\Delta W_k) = 0, E[(\Delta W_k)^2] = h$ 且解序列 $\{X_k\}$ 都是 $\mathcal{F}_{t_k}$ 可测的, 因此

$$\begin{aligned} & E[(\Delta W_k)^2 X_k^2] = hEX_k^2, \quad E[\bar{X}_k^2(\Delta W_k)^2] = hE\bar{X}_k^2, \\ & E[X_k H_{2,k}\Delta W_k] = 0, \qquad E[H_{1,k}H_{2,k}\Delta W_k] = 0. \end{aligned} \tag{4.14}$$

又根据 (3.4) 知

$$\bar{X}_i = \mu X_{i-m+1} + (1-\mu)X_{i-m}, \quad i = k, k+1.$$

上式两边平方并利用 Cauchy 不等式可得

$$\begin{aligned} \bar{X}_i^2 & = (\mu X_{i-m+1} + (1-\mu)X_{i-m})^2 \\ & \le (\mu + (1-\mu))(\mu X_{i-m+1}^2 + (1-\mu)X_{i-m}^2) \\ & = \mu X_{i-m+1}^2 + (1-\mu)X_{i-m}^2, \quad i = k, k+1. \end{aligned}$$

上式两边取数学期望得

$$E\bar{X}_i^2 \le \mu EX_{i-m+1}^2 + (1-\mu)EX_{i-m}^2, \quad i = k, k+1. \tag{4.15}$$

将 (4.14) 与 (4.15) 代入 (4.13) 得

$$EX_{k+1}^2 \le [1 + (\beta_0 + \beta_1 + 2\alpha_1 - 2a)h + M(h)h^2]S_k \tag{4.16}$$

其中

$$M(h) = \frac{1}{2}[\alpha_0(1 + \gamma_0 + \gamma_1) + 2(\gamma_0 + \gamma_1) + 2\gamma_0(\alpha_1 - a)h + \gamma_0(\gamma_0 + \gamma_1)h^2],$$

$$S_k = \max\{EX_k^2, EX_{k+2-m}^2, EX_{k+1-m}^2, EX_{k-m}^2\}.$$

根据条件 (**H4**) 知, 当 $h < x_0$ 时, 有

$$M(h)h + \rho < 0. \tag{4.17}$$

联立 (4.17) 和条件 (**H3**) 整理 (4.16) 得

$$EX_{k+1}^2 \le (1+\rho h)S_k, \quad h < h_0. \tag{4.17}$$

递推可得

$$EX_{k+1}^2 \le (1+\rho h)^{c(k+1)}S_0, \quad h < h_0. \tag{4.18}$$

其中 $c(\cdot)$ 表示取整函数, 即 $c(k+1) = \left[\frac{k+1}{m}\right]$, 因此

$$E|X_k|^2 \le E(\|\varphi\|^2)e^{-\rho c(k)h}, \quad h < h_0 \tag{4.19}$$

故定理得证.

重复上述证明过程, 并令 $k \to +\infty$, 则可得下列结论.

定理 4.2. 如果方程 (2.1) 满足假设条件 (**H1**), (**H2**), (**H3**) 和 (**H4**), 则带线性插值 (3.4) 的 Heun 方法 (3.3) 是 GMS- 稳定的, 其中步长的稳定限制为 $h < h_0$.

当 $\mu = 0$ 时, 完全类似地容易知道证明过程同样成立, 因此直接给出下列结论.

定理 4.3. 如果方程 (2.1) 满足假设条件 (**H1**), (**H2**), (**H3**) 和 (**H4**), 则 Heun 方法 (3.3) 是 MS- 稳定的, 其中步长的稳定限制为 $h < h_0$.

5. 数值试验

考虑下列试验方程

$$\begin{cases} dX(t) = (-4X(t) + \sin X(t-1)X(t-1))dt + (X(t) + X(t-1))dW(t), & t \ge 0, \\ X(t) = t+1, & -1 \le t \le 0, \end{cases} \tag{5.1}$$

容易验证方程 (5.1) 都满足条件 (**H1**),(**H2**) 和 (**H3**), 其中的常数分别如下:

$$a = \alpha_0 = 4,\ \alpha_1 = 1,\ \beta_0 = \beta_1 = 2,\ \gamma_0 = 17,\ \gamma_1 = 2$$

且

$$\rho = -a + \alpha_1 + \frac{1}{2}(\beta_0 + \beta_1) = -1 < 0,$$

根据 (**H4**) 得方程

$$(323x^2 + 170x + 118)x - 2 = 0,$$

数值求解可得

$$x_0 = 0.0165.$$

故根据定理 4.1-4.3 的结论知当步长

$$h < h_0 = x_0 = 0.0165$$

时, 带线性插值 (3.4) 的 Heun 方法 (3.3) 是 GMS- 稳定的、均方指数稳定和 Heun 方法 (3.3) 是 MS- 稳定的. 为了更好地直观理解上述结论, 我们分别以步长

$$h = 0.0015, 0.0135,$$

利用 Heun 方法 (3.3) 对方程 (5.1) 的解 $X(t)$ 进行数值模拟, 得到图 5.1 和图 5.2, 可以看到带线性插值 (3.4) 的 Heun 方法 (3.3) 是 GMS- 稳定的. 随后又分别以步长

$$h = 2^{-6}, 2^{-5},$$

利用 Heun 方法 (3.3) 对方程 (5.1) 的解 $X(t)$ 进行数值模拟, 得到图 5.3 和图 5.4, 可以看到 Heun 方法 (3.3) 是 MS- 稳定的.

图 5.1 至图 5.4 说明了当步长 h 满足限制条件时, 能够保证 Heun 方法 (3.3) 是数值稳定的. 当步长 h 不满足限制条件时, 就不一定能保证 Heun 方法 (3.3) 是稳定的, 下面分别以步长

$$h = 0.15, 0.5,$$

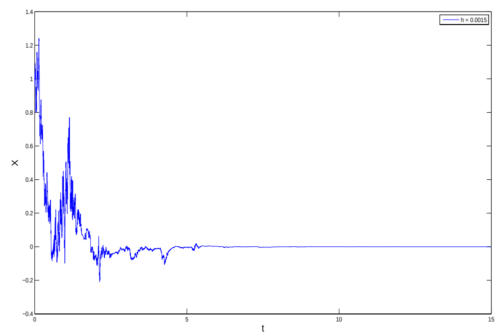

图 5.1 步长 $h = 0.0015$

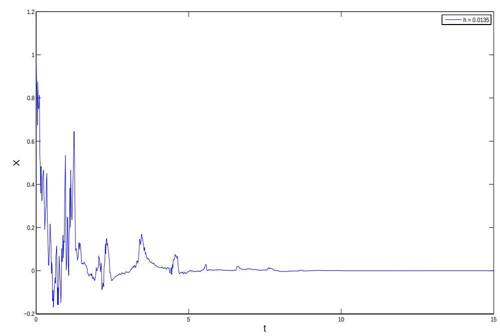

图 5.2 步长 $h = 0.0135$

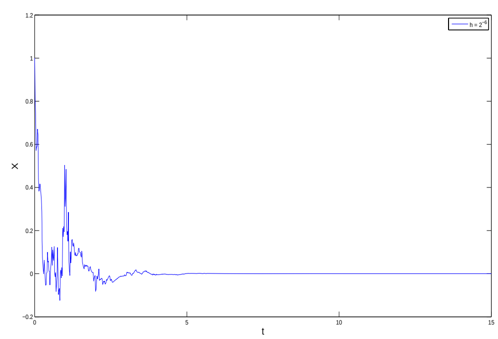

图 5.3 步长 $h = 2^{-6}$

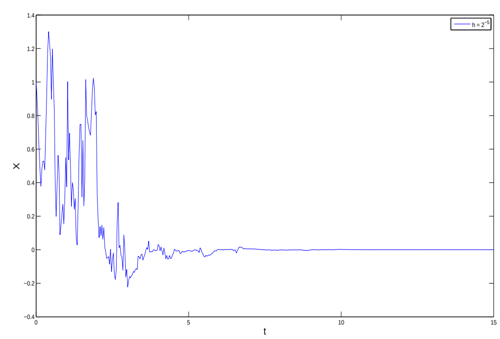

图 5.4 步长 $h = 2^{-5}$

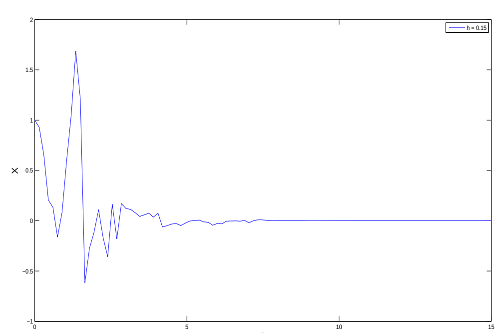

图 5.5 步长 $h = 0.15$

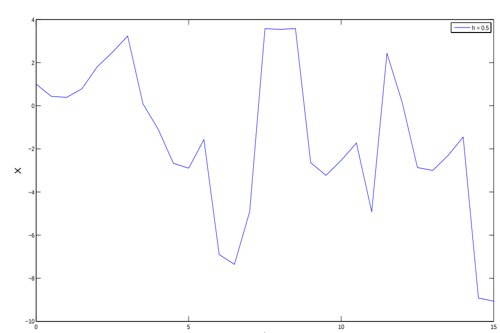

图 5.6 步长 $h = 0.5$

利用 Heun 方法 (3.3) 对方程 (5.1) 的解 $X(t)$ 进行数值模拟, 得到图 5.5 和图 5.6, 图 5.5 表明方法是数值稳定的, 而图 5.6 却说明方法是不稳定的.

图 5.5 和图 5.6 进一步表明了本文中对于步长 h 限制条件是比较保守的, 这就意味着当步长不满足相应的限制条件时, 也不排除数值结果能提供比较好的数值解. 因此所给出的条件是 Heun 方法 (3.3) 数值稳定的一个充分条件.

致谢: 在此作者特别感谢审稿人无私的奉献, 热心而且高效的审稿让本文较快地得到录用. 同时感谢编辑的辛勤工作.

参 考 文 献

[1] Christopher T H Baker. Evelyn Buckwar, Exponential stability in p-th mean of solutions, and of convergent Euler-type solutions, of stochastic delay differential equations[J]. J. Comput. Appl. Math., 2005, 184: 404-427.

[2] Xuerong Mao. Exponential stability of equidistant Euler-Maruyama approximations of stochastic differential delay equations[J]. J. Comput. Appl. Math., 2007, 200: 297-316.

[3] Yaozhong Hu, Salah-Eldin A. Mohammed, Feng Yan. Discrete-time approximations of stochastic differential systems with memory. Dept. Mathematics[OL]. Southern Illinois Univ., Carbondale. Available at http://sfde.math.siu.edu/recentpub.html.2001.

[4] Yaozhong Hu, Salah-Eldin A. Mohammed, Feng Yan. Discrete-time approximations of stochastic delay equations: the Milstein scheme[J]. The Annals of Probability, 2004, 32(1A): 265-314.

[5] Wanrong Cao, Mingzhu Liu, Zhencheng Fan. MS-stability of the Euler-Maruyama method for stochastic differential delay equations[J]. Applied Mathematics and Computation, 2004, 159: 127-135.

[6] Zhiyong Wang, Chengjian Zhang. An analysis of stability of Milstein method for stochastic differential equations with delay[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2006, 51: 1445-1452.

[7] Norbert Hofmann, Thomas Müller-Gronbach, A modified Milstein scheme for approximation of stochastic delay differential equations with constant time lag[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2006, 197: 89-121.

[8] 王文强, 黄山, 李寿佛. 非线性随机延迟微分方程 Euler-Maruyama 方法的均方稳定性 [J]. 计算数学, 2007, 29(2): 217-224.

[9] 王文强, 李寿佛, 黄山. 非线性随机延迟微分方程 Euler-Maruyama 方法的收敛性 [J]. 系统仿真学报, 2007, 19(17): 3910-3913.

[10] 王文强, 李寿佛, 黄山. 非线性随机延迟微分方程半隐式 Euler 方法的收敛性 [J]. 云南大学学报 (自然科学版), 2008, 30(1): 11-15.

[11] 王文强. 几类非线性随机延迟微分方程数值方法的收敛性与稳定性 [D]. 博士论文, 湘潭大学, 2007.

[12] Grüne L, Kloeden P. E. Pathwise approximation of random ordinary differential equations[J]. BIT, 2001, 41(4): 711-721.