二维非饱和土壤水分运动问题的半离散有限体积元模拟[*1)]

李焕荣
(重庆工商大学数学与统计学院, 重庆 400067)
罗振东
(华北电力大学数理学院, 北京 102206)

摘 要

本文利用基于重心对偶剖分的有限体积元法建立了二维非饱和土壤水分运动问题的数值逼近格式, 讨论了离散有限体积元解的存在唯一性, 并给出了最优误差估计的证明. 最后给出数值算例, 模拟结果表明, 利用有限体积元格式来求解二维非饱和土壤水分运动问题是可靠的, 且该格式具有稳定性和可实用性.

关键词: 有限体积元法; 数值模拟; 误差估计; 二维非饱和水流问题
MR (2000) 主题分类: 65N30, 65M15

SELF-DISCRETE FINITE VOLUME ELEMENT SIMULATION FOR TWO-DIMENSION UNSATURATED SOIL WATER FLOW PROBLEM

Li Huanrong
(*College of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China*)
Luo Zhendong
(*School of Mathematics and Physics, North China Electric Power University, Beijing 102206, China*)

Abstract

A numerical model for a two-dimension unsaturated soil water flow equation is established with a finite volume element method. The existence and uniqueness of its discrete finite volume element solutions are proved, and the error estimates of the discrete finite volume element solutions are analyzed. And finally, a numerical example is given. Moreover, it is also shown by numerical example that the finite volume element method to solve two-dimensional unsaturated soil water problem is reliable, stable and practical.

Keywords: Finite Volume Element Method; Numerical Simulation; Error Estimate; Two-dimension Unsaturated Soil Water Flow Problem
2000 Mathematics Subject Classification: 65N30, 65M15

[*] 2009 年 9 月 13 日收到.
[1)] 国家自然科学基金 (10871217)、重庆市科委自然科学基金 (2010BB9252) 和重庆市教委科技基金 (2011 年) 资助课题.

1. 引 言

土壤中水分运动是一个十分复杂的问题, 可简化归结为非饱和土壤水的流动. 非饱和流动的预报在大气科学、农业环境工程和地下水动力学等方面具有重要意义. 作为一个重要的气候因子 - 土壤含水率, 其季节变动对天气与气候具有重要的影响. 对土壤含水率的计算研究, 已是大气科学的热门课题 [1,2]. 而非饱和流动的数学模型都归结为非线性的偏微分方程 [3], 除了一些很特殊的情况外, 很难得到解析解. 因此, 典型的作法是用数值逼近求解非饱和流动方程. 文献 [3] 用有限差分方法给出了一维和二维土壤水分运动问题的数值解, 但由于有限差分法对边界条件及土壤参数极为敏感, 误差相对较大, 所以在文献 [4] 中作者用有限体积元法 (广义差分法) 建立了一维非饱和土壤水流动的数值模拟, 克服了有限差分法的弱点, 保持了有限差分法计算的简单性, 同时又兼有有限差分法所不能保持的质量守恒定律. 然而, 据我们所了解, 目前还没有用有限体积元方法 [5] 去处理二维非饱和土壤水流动问题的报道. 因此, 本文用有限体积元方法去数值求解二维非饱和土壤水流动模型.

本文考虑沟灌即梯形区域内水分向两侧土壤扩散和地下管道渗灌水分向周围土壤扩散的水分流动问题. 假定土壤均质、各向同性, 且设 z 轴垂直向下, x 轴水平向右, $Q(x,z,t)$ 为 t 时刻点 (x,z) 处的土壤含水率. 则根据 Darcy 定律及连续性原理, 二维非饱和水流问题可归结为下面的模型方程 [3,6]:

$$\frac{\partial Q}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D(Q)\frac{\partial Q}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(D(Q)\frac{\partial Q}{\partial z}\right)-\frac{\partial K(Q)}{\partial z}+S_r, \tag{1.1}$$

其中 $Q(x,z,t)$ 表示体积含水率, $-S_r$ 是根系吸水率, $K(Q)$ 为水力传导系数, $D(Q)$ 是土壤水扩散率. 土壤水力传导系数 K 和土壤水扩散率 D 与 Q 的关系如下:

$$\begin{cases} K(Q)=K_s\left(\dfrac{Q}{Q_s}\right)^{2b+3}; \\ D(Q)=-\dfrac{bK_s\psi_s}{Q_s}\left(\dfrac{Q}{Q_s}\right)^{b+2}; Q_r\le Q(z,t)\le Q_s, \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 Q_s 和 Q_r 分别表示土壤水分饱和含水率和残余含水率, 而且 $0<Q_s<1$, 饱和水传导率 K_s, 土质参数 b 和饱和土壤水势 ψ_s 均与土质结构有关. 显然, $K(Q)$, $\dfrac{\partial K(Q)}{\partial Q}$, $\dfrac{\partial K(Q)}{\partial z}$, $D(Q)$ 和 $\dfrac{\partial D(Q)}{\partial Q}$ 是有界的, 即存在常数 K_1 和 K_2 使得

$$K_1\le K(Q),\frac{\partial K(Q)}{\partial Q},\frac{\partial K(Q)}{\partial z},D(Q),\frac{\partial D(Q)}{\partial Q}\le K_2. \tag{1.3}$$

下面给出方程 (1.1) 的定解条件:

(1) 初始条件

$$Q(x,z,0)=Q_0, \tag{1.4}$$

其中 Q_0 为初始含水率.

(2) 边界条件

$$\begin{cases} Q(0,0,t)=Q_s, \quad t\in[0,T]; \\ Q(L,z,t)=Q_0, \quad L\to\pm\infty, \quad t\in[0,T]; \\ Q(x,M,t)=Q_0, \quad M\to\pm\infty, \quad t\in[0,T], \end{cases} \tag{1.5}$$

其中 Q_0 为初始含水率, Q_s 为饱和含水率.

2. 网格剖分及有限体积元格式

为便于理论分析, 假设研究区域 Ω 是 R^2 中一个适当光滑的足够大的有界区域, 且在 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上, 含水率保持 Q_0 不变. 由文献 [4,5,7] 可知, 有限体积元法的基本思想是对求解区域 Ω 作三角形剖分 T_h 和对偶剖分 T_h^*, 然后构造 T_h 上的试探函数空间 U_h(有限元空间) 和 T_h^* 上的检验函数空间 V_h, 并用广义 Galerkin 方法求近似解 $Q_h \in U_h$. 最常用的对偶剖分有外心对偶剖分、重心对偶剖分和重心相联对偶剖分. 本文采用重心对偶剖分.

对 Ω 作三角网格剖分, 所有三角单元的集合记为 T_h, h 为一切三角单元的最大边长, 将具公共边的三角单元的重心 Q 及公共边上的中点 M 依次连结, 则得到对偶单元. 所有对偶单元构成的对偶剖分记为 T_h^*, 以 Ω_h^* 表示对偶剖分的节点 Q 的集合. $\overline{\Omega}_h$ 表示剖分 T_h 的节点集合, $\dot{\Omega}_h = \overline{\Omega}_h \setminus \partial\Omega$ 为剖分 T_h 的内节点集合. K_Q 表示以 Q 为重心的三角单元. $K_{P_0}^*$ 表示围绕 P_0 的对偶单元. 设剖分 T_h 和 T_h^* 是正则的, 即存在 $\theta_0 > 0$ 使每个三角单元的内角 $\theta \in \left[\theta_0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, 且剖分是拟均匀的, 即存在与 h 无关的正常数 β_1 和 β_2, 使得每一个三角形单元的面积 S_{K_Q}(或 S_Q) 和每一个对偶单元的面积 $S_{K_{P_0}^*}$, 皆满足不等式:

$$\beta_1 h^2 \le S_{K_Q},\ S_{K_{P_0}^*} \le \beta_2 h^2. \tag{2.1}$$

令 U_{0h} 为相应于 T_h 的一次元空间, 且满足下列条件: 对 $\forall u_h \in U_{0h}$,

i) $u_h \in C(\overline{\Omega}),\quad u_h|_{\partial\Omega} = 0$;

ii) $u_h|_K \in P_1$, 即 u_h 在每个三角形单元 $K \in T_h$ 上是关于 x, z 的一次多项式, 它完全由 K 的三个顶点上的值唯一确定.

与内部节点 P_0 相应的基函数 $\phi_{P_0}(x,z) \in U_{0h}$ 满足:

$$\phi_{P_0}(P_i) = \begin{cases} 1, & P_i = P_0, \\ 0, & P_i \ne P_0, \end{cases} \qquad P_i \in \dot{\Omega}_h. \tag{2.2}$$

取试探函数空间 $U_h = \{u_h|_{\Omega\setminus\partial\Omega} \in U_{0h}; u_h|_{\partial\Omega} = Q_0\}$, 对任一 $u_h \in U_h$, 在 Ω 内部均可表示为:

$$u_h(x,z) = \sum_{P_0 \in \dot{\Omega}_h} u_h(P_0)\phi_{P_0}(x,z), \quad (x,z) \in \Omega\setminus\partial\Omega. \tag{2.3}$$

并取检验函数空间 $V_h = \{v_h | v_h$ 在每个对偶单元 $K_{P_0}^* \in T_h^*$ 上是常数, 且 $v_h|_{\Omega\setminus \bigcup_{P\in\dot{\Omega}_h} K_P^*} = 0\}$, 且检验函数空间的基函数可表示为

$$\psi_{P_0}(x,z) = \begin{cases} 1, & (x,z) \in K_{P_0}^*, \\ 0, & (x,z) \in \Omega\setminus K_{P_0}^*, \end{cases} \qquad \forall P_0 \in \dot{\Omega}_h. \tag{2.4}$$

显然, $U_h \subset H^1(\Omega)\bigcap C(\overline{\Omega})$, 且 $\dim U_h = \dim V_h$.

对于任意的 $u \in U \equiv H^1(\Omega)\bigcap C(\Omega)$, 令 $\Pi_h^* u$ 是 $u \in U$ 往检验函数空间 V_h 的插值投影, 即

$$\Pi_h^* u = \sum_{P_0 \in \dot{\Omega}_h} u(P_0)\psi_{P_0}. \tag{2.5}$$

又设 $\Pi_h u$ 是 $u\in U$ 在试探函数空间 U_h 中的插值投影. 由 Sobolev 空间的插值逼近性质, 对 $\forall u\in H^2(\Omega)$, 有下列估计式:

$$\begin{array}{ll} (a) & |u-\Pi_h u|_m \le Ch^{k-m}|u|_k, \quad m=0,\ 1,\ \ k=1,\ 2, \\ (b) & \|u-\Pi_h^* u\|_0 \le Ch\|u\|_1. \end{array} \tag{2.6}$$

对任意的 $u,\ v,\ w\in H^1(\Omega)$, $u_h\in U_h$ 和 $v_h\in V_h$, 定义双线性形式:

$$D(w;u,v)=\int_\Omega D(x,z,w(x,z))\nabla u\nabla v dxdz;$$

$$D^*(w;u_h,v_h)=\sum_{P_0\in\dot{\Omega}_h} v_h(P_0)D^*(w;u_h,\psi_{P_0}),$$

其中 $D^*(w;u_h,\psi_{P_0})=-\int_{\partial K_{P_0}^*} D(x,z,w(x,z))\nabla u_h\cdot\vec{n}ds$, $\vec{n}$ 为边界 $\partial K_{P_0}^*$ 的单位外法向量.

于是问题 (1.1) 的广义弱形式为: 求 $Q(t)\in H^1(\Omega)$, 且满足 $Q|_{\partial\Omega}=Q_0$, 使得 $\forall t\in(0,T)$, 有

$$\left\{\begin{array}{r} \left(\dfrac{\partial Q}{\partial t},v\right)+D(Q;Q,v)=\left(S_r-\dfrac{\partial K(Q)}{\partial z},v\right), \quad \forall v\in H_0^1(\Omega); \\ Q(x,z,0)=Q_0, \quad (x,z)\in\bar{\Omega}. \end{array}\right. \tag{2.7}$$

对 $\forall u\in H^1(\Omega)$, 引入相应于 (2.7) 的广义 Ritz 投影算子 $R_h^*(t):H^1(\Omega)\to U_h$, $0\le t\le T$, 满足:

$$D^*(Q;u-R_h^*u,v_h)=0,\ \forall v_h\in V_h, \tag{2.8}$$

其中 Q 为问题 (1.1) 的广义解.

问题 (1.1) 的半离散有限体积元格式为: 求 $Q_h\in U_h$, 使得

$$\left\{\begin{array}{r} \left(\dfrac{\partial Q_h}{\partial t},\psi_{P_0}\right)+D^*(Q_h;Q_h,\psi_{P_0})=\left(S_r-\dfrac{\partial K(Q_h)}{\partial z},\psi_{P_0}\right), \quad \forall P_0\in\dot{\Omega}_h; \\ Q_h(x,z,0)=R_h^*Q_0, \quad (x,z)\in\bar{\Omega}, \end{array}\right. \tag{2.9}$$

其中

$$\begin{aligned} D^*(Q_h;Q_h,\psi_{P_0}) &= -\int_{\partial K_{P_0}^*} D(x,z,Q_h)\nabla Q_h\cdot\vec{n}ds \\ &= \int_{\partial K_{P_0}^*}\left(-D(x,z,Q_h)\frac{\partial Q_h}{\partial x}dz+D(x,z,Q_h)\frac{\partial Q_h}{\partial z}dx\right), \end{aligned}$$

$$\left(S_r-\frac{\partial K(Q_h)}{\partial z},\psi_{P_0}\right)=\int_{K_{P_0}^*}\left(S_r-\frac{\partial K(Q_h)}{\partial z}\right)dxdz.$$

可将 (2.9) 改写为下列形式:

$$\left\{\begin{array}{r} \left(\dfrac{\partial Q_h}{\partial t},v_h\right)+D^*(Q_h;Q_h,v_h)=\left(S_r-\dfrac{\partial K(Q_h)}{\partial z},v_h\right), \quad \forall v_h\in V_h; \\ Q_h(x,z,0)=R_h^*Q_0, \quad (x,z)\in\bar{\Omega}, \end{array}\right. \tag{2.10}$$

其中

$$D^*(Q_h;Q_h,v_h)=\sum_{P_0\in\dot{\Omega}_h} v_h(P_0)D^*(Q_h;Q_h,\psi_{P_0}),$$

$$\left(S_r-\frac{\partial K(Q_h)}{\partial z},v_h\right)=\sum_{P_0\in\dot{\Omega}_h}v_h(P_0)\left(S_r-\frac{\partial K(Q_h)}{\partial z},\psi_{P_0}\right).$$

3. 重要引理及误差估计

首先, 为了证明的需要, 在 U_h 中引进离散的零模、半模和全模:
对 $\forall u_h\in U_h$,

$$||u_h||_{0,h}=\left(\sum_{K\in T_h}|u_h|^2_{0,h,K}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.1$_1$}$$

$$|u_h|_{1,h}=\left(\sum_{K\in T_h}|u_h|^2_{1,h,K}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.1$_2$}$$

$$||u_h||_{1,h}=\left(||u_h||^2_{0,h}+|u_h|^2_{1,h}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.1$_3$}$$

其中 $K=K_Q=\triangle P_iP_jP_k$, $|u_h|_{0,h,K}=\left[\frac{1}{3}(u_i^2+u_j^2+u_k^2)S_Q\right]^{\frac{1}{2}}$,

$$|u_h|_{1,h,K}=\left\{\left[\left(\frac{\partial u_h(Q)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u_h(Q)}{\partial z}\right)^2\right]\cdot S_Q\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

下面引入几个重要引理 (参见 [4,5,8-10]):

引理 3.1. 对 (2.8) 定义的广义 Ritz 投影算子 R_h^*, 具有如下的性质:

$$\begin{aligned}
&a)\quad \|u-R_h^*u\|_1\le Ch\|u\|_2;\\
&b)\quad \|u-R_h^*u\|_0\le Ch^2\|u\|_3;\\
&c)\quad \|(u-R_h^*u)_t\|_1\le Ch\|u\|_{1,2,2};\\
&d)\quad \|(u-R_h^*u)_t\|_0\le Ch^2\|u\|_{1,3,2},
\end{aligned} \tag{3.2}$$

其中 $\|u(t)\|_{k,s,p}=\sum_{j=0}^{k}\left\{\|\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\|_{s,p}+\int_0^t\|\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\|_{s,p}d\tau\right\}$, $t\in[0,T]$, 如果 $u(t)$ 满足 $u(t)\in H^k$ $(0,T;W^{s,p}(\Omega))=\left\{u\in W^{s,p}(\Omega);\ \frac{\partial^j u}{\partial t^j}\in L^2(0,T;W^{s,p}(\Omega)),\ j=0,1,\cdots,k\right\}$.

引理 3.2. $|\cdot|_{1,h}$ 与 $|\cdot|_1$ 一致; $\|\cdot\|_{0,h}$ 和 $\|\cdot\|_{1,h}$ 分别与 $\|\cdot\|_0$ 和 $\|\cdot\|_1$ 等价, 即对 $\forall u_h\in U_h$, 存在与 h 无关的正常数 C_1, C_2, C_1' 和 C_2', 使得

$$|u_h|_{1,h}=|u_h|_1; \tag{3.3$_1$}$$

$$C_1\|u_h\|_{0,h}\le\|u_h\|_0\le C_2\|u_h\|_{0,h}; \tag{3.3$_2$}$$

$$C_1'\|u_h\|_{1,h}\le\|u_h\|_1\le C_2'\|u_h\|_{1,h}. \tag{3.3$_3$}$$

引理 3.3. 对 $\forall u_h,\ w_h\in U_h$, 有

$$(1)\quad (u_h,\Pi_h^*w_h)=(w_h,\Pi_h^*u_h),$$

(2) 令 $|||u_h|||=(u_h,\Pi_h^*u_h)^{\frac{1}{2}}$, 则 $|||u_h|||$ 和 $||\Pi_h^*u_h||_0$ 均与 $\|u_h\|_0$ 等价, 即存在与 h 无关的正常数 C_3, C_4, C_3' 和 C_4', 使得

$$C_3\|u_h\|_0\le|||u_h|||\le C_4\|u_h\|_0,$$

$$C_3'\|u_h\|_0\le||\Pi_h^*u_h||_0\le C_4'\|u_h\|_0.$$

引理 3.4. 设所有三角单元的内角都不超过 $\dfrac{\pi}{2}$, 且存在 $\theta_1\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 使三角单元的内角 θ 都不小于 θ_1 时, 双线性形式 $D^*(\cdot;\cdot,\cdot)$ 正定且有界, 即对 $\forall q\in H^1(\Omega)$, u_h, $w_h\in U_h$, 都存在与 h 无关的正常数 α, M, 满足

$$\begin{array}{ll} a) & D^*(q;u_h,\Pi_h^*u_h)\ge\alpha\|u_h\|_1^2; \\ b) & |D^*(q;u_h,\Pi_h^*w_h)|\le M\|D(q)\|_{0,\infty}\cdot\|u_h\|_1\cdot\|w_h\|_1. \end{array} \tag{3.4}$$

引理 3.5. 对 $\forall p,\ q\in H^1(\Omega)$, u_h, $w_h\in U_h$, 成立如下估计式:

$$|D^*(q;u_h,\ \Pi_h^*w_h)-D^*(q;w_h,\ \Pi_h^*u_h)|\le Ch||u_h||_1\cdot||w_h||_1; \qquad (3.5)_1$$

$$|D^*(p;u_h,\ \Pi_h^*w_h)-D^*(q;u_h,\ \Pi_h^*w_h)|\le C|u_h|_{1,\infty}\cdot(||p-q||_0+h||p-q||_1)\cdot||w_h||_1. \qquad (3.5)_2$$

注. 在引理 3.4 和引理 3.5 中, 当双线性形式 $D^*(\cdot;\cdot,\cdot)$ 的系数换为其它函数后, 结论仍然成立.

定理 3.1. 问题 (2.10) 存在惟一的解 $Q_h\in U_h$.

证明. i) 存在性. 由于问题 (2.10) 和 (2.9) 等价, 故只需证明 (2.9) 解的存在性.

在 (2.9) 中, 令 $Q_h=\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^n Q_j(t)\phi_j(x,z), & (x,z)\in\Omega\\ \qquad\qquad Q_0, & (x,z)\in\partial\Omega\end{cases}$, 则 (2.9) 可写为

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^n\frac{dQ_j(t)}{dt}(\phi_j,\psi_i)+\sum_{j=1}^n Q_j(t)D^*(Q_h;\phi_j,\psi_i)=\left(S_r-\frac{\partial K(Q_h)}{\partial z},\psi_i\right), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i=1,\ldots,n; \\ Q_h(x,z,0)=\sum\limits_{j=1}^n\alpha_j\phi_j(x,z),\end{cases} \tag{3.6}$$

其中 $\phi_j(x,z)$ 为 U_h 中相应于剖分内节点 P_j 的基函数, $\psi_j(x,z)$ 为 V_h 中相应于剖分内节点 P_j 的基函数, n 为剖分的内节点个数, $Q_j(0)=\alpha_j$, $j=1,\ldots,n$ 为已知.

令 $M=((\phi_j,\psi_i))_{n\times n}$, $Q(t)=(Q_1(t),\ldots,Q_n(t))^T$, $N(Q)=(D^*(Q_h;\phi_j,\psi_i))_{n\times n}$, $F(Q)=((f(Q),\psi_1),\ldots,(f(Q),\psi_n))^T$, $f(Q)=S_r-\dfrac{\partial K(Q_h)}{\partial z}$, $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)^T$, 则 (3.6) 可写为矩阵形式:

$$\begin{cases}M\dfrac{dQ}{dt}+N(Q)Q=F(Q),\\ Q(0)=\alpha.\end{cases} \tag{3.7}$$

又 M 为非奇异矩阵 (参见 [8]), 则 (3.7) 可写为:

$$\begin{cases}\dfrac{dQ}{dt}=M^{-1}\left(F(Q)-N(Q)Q\right),\\ Q(0)=\alpha.\end{cases} \tag{3.8}$$

由于 (3.8) 是一个关于 $Q_j(t)$ 为未知函数的一阶非线性常微分方程组, 由常微分方程组的理论 (Caratheodory 定理) 知, 在 $[0,t]$, $t\leq T$ 内至少存在一个局部的极大解 $Q_j(t)$, $j=1,2,\ldots,n$. 又由 $Q_h(x,z,t)\in U_h\subset C(\Omega)$ 知, $\|Q_h\|_{L^2}\leq\|Q_h\|_{L^\infty}$ 有界, 从而 $\|Q_h\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$ 也有界, 故可把 $Q_j(t)$, $j=1,2,\ldots,n$ 延拓为 $[0,T]$ 上的整体解, 即问题 (2.9) 在 $[0,T]$ 上存在整体解, 进而问题 (2.10) 解的存在性得证.

(ii) 假设还存在 $\bar{Q}_h\in U_h$ 满足 (2.10), 则有

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial(Q_h-\bar{Q}_h)}{\partial t},v_h\right)+D^*(Q_h;Q_h,v_h)-D^*(\bar{Q}_h;\bar{Q}_h,v_h)\\ \qquad\qquad=-\left(\dfrac{\partial K(Q_h)}{\partial z}-\dfrac{\partial K(\bar{Q}_h)}{\partial z},v_h\right),\ \forall v_h\in V_h;\\ Q_h(0)-\bar{Q}_h(0)=0.\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\big((Q_h-\bar{Q}_h)_t,v_h\big)+D^*(Q_h;Q_h-\bar{Q}_h,v_h)=D^*(\bar{Q}_h;\bar{Q}_h,v_h)\\ \qquad -D^*(Q_h;\bar{Q}_h,v_h)-\left(\dfrac{\partial K(Q_h)}{\partial z}-\dfrac{\partial K(\bar{Q}_h)}{\partial z},v_h\right),\ \forall v_h\in V_h;\\ Q_h(0)-\bar{Q}_h(0)=0.\end{cases}\tag{3.9}$$

取 $v_h=\Pi_h^*(Q_h-\bar{Q}_h)_t$, 利用关于 t 的分部积分可得

$$\begin{aligned}&|||(Q_h-\bar{Q}_h)_t|||^2+\frac{d}{dt}D^*\left(Q_h;Q_h-\bar{Q}_h,\Pi_h^*(Q_h-\bar{Q}_h)\right)=D^*\left(\bar{Q}_h;\bar{Q}_h,\Pi_h^*(Q_h-\bar{Q}_h)_t\right)\\ &-D^*\left(Q_h;\bar{Q}_h,\Pi_h^*(Q_h-\bar{Q}_h)_t\right)-\left(\frac{\partial K(Q_h)}{\partial z}-\frac{\partial K(\bar{Q}_h)}{\partial z},\Pi_h^*(Q_h-\bar{Q}_h)_t\right)\\ &+D_t^*\left(Q_h;Q_h-\bar{Q}_h,\Pi_h^*(Q_h-\bar{Q}_h)\right)+D^*\left(Q_h;(Q_h-\bar{Q}_h)_t,\Pi_h^*(Q_h-\bar{Q}_h)\right),\end{aligned}\tag{3.10}$$

其中 $D_t^*(\cdot;\cdot,\cdot)$ 是对 $D^*(\cdot;\cdot,\cdot)$ 的系数关于 t 微分得到的.

由 $(3.5)_2$、逆不等式、引理 3.3(2) 和 ε- 不等式, 可得

$$\begin{aligned}&\left|D^*\left(\bar{Q}_h;\bar{Q}_h,\Pi_h^*(Q_h-\bar{Q}_h)_t\right)-D^*\left(Q_h;\bar{Q}_h,\Pi_h^*(Q_h-\bar{Q}_h)_t\right)\right|\\ \leq\ &C|\bar{Q}_h|_{1,\infty}\left(\|Q_h-\bar{Q}_h\|_0+h\|Q_h-\bar{Q}_h\|_1\right)\|(Q_h-\bar{Q}_h)_t\|_1\\ \leq\ &Ch^{-1}\|\bar{Q}_h\|_1\|Q_h-\bar{Q}_h\|_1\cdot Ch^{-1}\|(Q_h-\bar{Q}_h)_t\|_0\\ \leq\ &Ch^{-4}\|Q_h-\bar{Q}_h\|_1^2+\frac{1}{4}h^4\cdot h^{-2}\cdot h^{-2}|||(Q_h-\bar{Q}_h)_t|||^2\\ \leq\ &Ch^{-4}\|Q_h-\bar{Q}_h\|_1^2+\frac{1}{4}|||(Q_h-\bar{Q}_h)_t|||^2.\end{aligned}\tag{3.11}$$

在这里考虑到 $U_h\subset H^1(\Omega)$, 故利用了 $\|\bar{Q}_h\|_1$ 的有界性.
利用 Hölder 不等式、引理 3.3(2) 和 Cauchy 不等式, 有

$$\begin{aligned}&\left|\left(\frac{\partial K(Q_h)}{\partial z}-\frac{\partial K(\bar{Q}_h)}{\partial z},\Pi_h^*(Q_h-\bar{Q}_h)_t\right)\right|\\ \leq\ &C\|Q_h-\bar{Q}_h\|_0\|(Q_h-\bar{Q}_h)_t\|_0\\ \leq\ &C\|Q_h-\bar{Q}_h\|_1|||(Q_h-\bar{Q}_h)_t|||\\ \leq\ &C\|Q_h-\bar{Q}_h\|_1^2+\frac{1}{4}|||(Q_h-\bar{Q}_h)_t|||^2.\end{aligned}\tag{3.12}$$

再由引理 3.4(b), 逆不等式, 引理 3.3(2) 和 ε- 不等式, 并考虑到式 (1.3) 中 $D(Q)$ 的有界性, 可得

$$\begin{aligned}
& \left|D_t^*\left(Q_h;Q_h-\bar{Q}_h,\Pi_h^*(Q_h-\bar{Q}_h)\right)\right|+\left|D^*\left(Q_h;(Q_h-\bar{Q}_h)_t,\Pi_h^*(Q_h-\bar{Q}_h)\right)\right| \\
\le\ & M\|D_t(Q_h)\|_{0,\infty}\|Q_h-\bar{Q}_h\|_1^2+M\|D(Q_h)\|_{0,\infty}\|(Q_h-\bar{Q}_h)_t\|_1\|Q_h-\bar{Q}_h\|_1 \\
\le\ & C\|Q_h-\bar{Q}_h\|_1^2+Ch^{-1}\|(Q_h-\bar{Q}_h)_t\|_0\|Q_h-\bar{Q}_h\|_1 \\
\le\ & C\|Q_h-\bar{Q}_h\|_1^2+\frac{1}{4}h^2\cdot h^{-2}|||(Q_h-\bar{Q}_h)_t|||^2+Ch^{-2}\|Q_h-\bar{Q}_h\|_1^2 \\
\le\ & C(1+h^{-2})\|Q_h-\bar{Q}_h\|_1^2+\frac{1}{4}|||(Q_h-\bar{Q}_h)_t|||^2.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

将 (3.11)-(3.13) 代入 (3.10), 可得

$$\frac{1}{4}|||(Q_h-\bar{Q}_h)_t|||^2+\frac{d}{dt}D^*\left(Q_h;Q_h-\bar{Q}_h,\Pi_h^*(Q_h-\bar{Q}_h)\right)\le C(2+h^{-2}+h^{-4})\|Q_h-\bar{Q}_h\|_1^2.$$

进而有

$$\frac{d}{dt}D^*\left(Q_h;Q_h-\bar{Q}_h,\Pi_h^*(Q_h-\bar{Q}_h)\right)\le C(2+h^{-2}+h^{-4})\|Q_h-\bar{Q}_h\|_1^2. \tag{3.14}$$

对上式从 0 到 t 积分, 运用引理 (3.4a), 并注意到 $(Q_h-\bar{Q}_h)(0)=0$, 可得

$$\alpha\|Q_h-\bar{Q}_h\|_1^2\le C(2+h^{-2}+h^{-4})\int_0^t\|Q_h-\bar{Q}_h\|_1^2d\tau.$$

由 Gronwall 引理得

$$\|Q_h-\bar{Q}_h\|_1^2=0.$$

又由

$$\|Q_h-\bar{Q}_h\|_1^2=\|Q_h-\bar{Q}_h\|_0^2+|Q_h-\bar{Q}_h|_1^2$$

知, $\|Q_h-\bar{Q}_h\|_0=0$, 即 $Q_h\equiv\bar{Q}_h$, 从而 (2.10) 解的唯一性得证.

为方便误差估计, 令

$$Q_h-Q=(Q_h-R_h^*Q)+(R_h^*Q-Q)=e+\rho.$$

定理 3.2. 设 Q 和 Q_h 分别是问题 (1.1) 和 (2.10) 的解, 若 $Q\in H^1(0,T;H^3(\Omega))$, 则有

$$\|Q-Q_h\|_0\le Ch^2\|Q\|_{H^1(0,T;H^3(\Omega))}. \tag{3.15}$$

证明. 用 $v_h\in V_h$ 与 (1.1) 作积, 并由分部积分可得

$$(Q_t,v_h)+D^*(Q;Q,v_h)=\left(S_r-\frac{\partial K(Q)}{\partial z},v_h\right),\forall v_h\in V_h. \tag{3.16}$$

(2.10)-(3.16), 并由 (2.8) 可得误差方程,

$$\begin{aligned}
(e_t,v_h)+D^*(Q;e,v_h)=\ & -(\rho_t,v_h)+(D^*(Q;Q_h,v_h)-D^*(Q_h;Q_h,v_h)) \\
& +\left(\frac{\partial K(Q)}{\partial z}-\frac{\partial K(Q_h)}{\partial z},v_h\right),\forall v_h\in V_h.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

取 $v_h=\Pi_h^*e$, 由引理 3.3(1) 和引理 3.4(a) 可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|||e|||^2+\alpha\|e\|_0^2 &\le (e_t,\Pi_h^*e)+D^*(Q;e,\Pi_h^*e)\\ &= -(\rho_t,\Pi_h^*e)+(D^*(Q;Q_h,\Pi_h^*e)-D^*(Q_h;Q_h,\Pi_h^*e))\\ &\quad+\left(\frac{\partial K(Q)}{\partial z}-\frac{\partial K(Q_h)}{\partial z},\Pi_h^*e\right).\end{aligned}\tag{3.18}$$

类似于 (3.11) 和 (3.12) 的证明, (3.18) 式可化为

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|||e|||^2 &\le C\|\rho_t\|_0\|e\|_0+C|Q_h|_{1,\infty}\left(\|Q-Q_h\|_0+h\|Q-Q_h\|_1\right)\|e\|_1+C\|Q-Q_h\|_0\|e\|_0\\ &\le C\|\rho_t\|_0^2+C\|e\|_0^2+Ch^{-1}\|Q_h\|_1(\|\rho\|_0+\|e\|_0+h\|\rho\|_1\\ &\quad+h\cdot h^{-1}\|e\|_0)\cdot h^{-1}\|e\|_0+C(\|\rho\|_0+\|e\|_0)\cdot\|e\|_0\\ &\le C\|\rho_t\|_0^2+C|||e|||^2+C\|\rho\|_0^2+Ch^{-4}\|e\|_0^2+Ch^{-2}\|e\|_0^2+Ch^2\|\rho\|_1^2+C\|e\|_0^2\\ &\le C\left(\|\rho_t\|_0^2+\|\rho\|_0^2+h^2\|\rho\|_1^2\right)+C\left(1+h^{-4}+h^{-2}\right)|||e|||^2.\end{aligned}\tag{3.19}$$

对上式从 0 到 t 积分, 并注意到 $e(0)=0$, 可得

$$|||e|||^2\le C\int_0^t\left(\|\rho_t\|_0^2+\|\rho\|_0^2+h^2\|\rho\|_1^2\right)d\tau+C\left(1+h^{-4}+h^{-2}\right)\int_0^t|||e|||^2d\tau.\tag{3.20}$$

由 Gronwall 引理及引理 3.1 可得

$$|||e|||^2\le C\int_0^t\left(\|\rho_t\|_0^2+\|\rho\|_0^2+h^2\|\rho\|_1^2\right)d\tau\le Ch^4\|Q\|_{H^1(0,T;H^3(\Omega))}^2,$$

即

$$||e||_0\le Ch^2\|Q\|_{H^1(0,T;H^3(\Omega))}.\tag{3.21}$$

再由引理 3.1(b),

$$||\rho||_0\le Ch^2\|Q\|_{H^3}.\tag{3.22}$$

结合 (3.21) 和 (3.22), 定理 3.2 结论得证.

定理 3.3. 设 Q 和 Q_h 分别是问题 (1.1) 和 (2.10) 的解, 若 $Q\in H^1(0,T;H^3(\Omega))$, 则有

$$\|Q-Q_h\|_1\le Ch\|Q\|_{H^1(0,T;H^3(\Omega))}.\tag{3.23}$$

证明. 在误差方程 (3.17) 中, 取 $v_h=\Pi_h^*e_t$, 有

$$\begin{aligned}(e_t,\Pi_h^*e_t)+D^*(Q;e,\Pi_h^*e_t)= &-(\rho_t,\Pi_h^*e_t)+(D^*(Q;Q_h,\Pi_h^*e_t)-D^*(Q_h;Q_h,\Pi_h^*e_t))\\ &+\left(\frac{\partial K(Q)}{\partial z}-\frac{\partial K(Q_h)}{\partial z},\Pi_h^*e_t\right).\end{aligned}\tag{3.24}$$

利用关于 t 的分布积分, 上式可写为

$$\begin{aligned}&|||e_t|||^2+\frac{d}{dt}D^*(Q;e,\Pi_h^*e)\\ =\ &-(\rho_t,\Pi_h^*e_t)+(D^*(Q;Q_h,\Pi_h^*e_t)-D^*(Q_h;Q_h,\Pi_h^*e_t))\\ &+\left(\frac{\partial K(Q)}{\partial z}-\frac{\partial K(Q_h)}{\partial z},\Pi_h^*e_t\right)+D_t^*(Q;e,\Pi_h^*e)+D^*(Q;e_t,\Pi_h^*e).\end{aligned}\tag{3.25}$$

类似与 (3.11)-(3.13) 的的证明, 上式可化为

$$
\begin{aligned}
& |||e_t|||^2+\frac{d}{dt}D^*(Q;e,\Pi_h^*e) \\
\leq\ & C\|\rho_t\|_0\|e_t\|_0+C|Q_h|_{1,\infty}\left(\|Q-Q_h\|_0+h\|Q-Q_h\|_1\right)\|e_t\|_1+C\|Q-Q_h\|_0\|e_t\|_0 \\
& +M\|D(Q)\|_{0,\infty}\|e\|_1^2+M\|D(Q)\|_{0,\infty}\|e_t\|_1\|e\|_1 \\
\leq\ & C\|\rho_t\|_0|||e_t|||+C(\|\rho\|_0+h\|\rho\|_1+\|e\|_1)\cdot Ch^{-1}\|e_t\|_0 \\
& +C(\|\rho\|_0+\|e\|_1)|||e|||+C\|e\|_1^2+Ch^{-1}\|e_t\|_0\|e\|_1 \\
\leq\ & C\|\rho_t\|_0^2+\frac{1}{4}|||e_t|||^2+Ch^{-2}(\|\rho\|_0^2+h^2\|\rho\|_1^2+\|e\|_1^2)+\frac{1}{4}h^2\cdot h^{-2}|||e_t|||^2+C(\|\rho\|_0^2+\|e\|_1^2) \\
& +\frac{1}{4}|||e_t|||^2+C\|e\|_1^2+\frac{1}{4}h^2\cdot h^{-2}|||e_t|||^2+C\|e\|_1^2 \\
\leq\ & |||e_t|||^2+C(\|\rho\|_0^2+h^2\|\rho\|_1^2+\|\rho_t\|_0^2)+Ch^{-2}(\|\rho\|_0^2+h^2\|\rho\|_1^2)+C(3+h^{-2})\|e\|_1^2,
\end{aligned}
$$

这里 $\frac{\partial Q_h}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial Q_h}{\partial z}$ 在剖分单元上均为常数, 可知 $|Q_h|_{1,\infty}$ 为常数.
整理上式得

$$
\frac{d}{dt}D^*(Q;e,\Pi_h^*e)\leq C(\|\rho\|_0^2+h^2\|\rho\|_1^2+\|\rho_t\|_0^2)+Ch^{-2}(\|\rho\|_0^2+h^2\|\rho\|_1^2)+C\|e\|_1^2. \tag{3.26}
$$

对上式从 0 到 t 积分, 并注意到 $e(0)=0$, 可得

$$
\begin{aligned}
\alpha\|e\|_1^2 &\leq D^*(Q;e,\Pi_h^*e) \\
&\leq C\int_0^t\left[(\|\rho\|_0^2+h^2\|\rho\|_1^2+\|\rho_t\|_0^2)+h^{-2}(\|\rho\|_0^2+h^2\|\rho\|_1^2)\right]d\tau+C\int_0^t\|e\|_1^2d\tau.
\end{aligned} \tag{3.27}
$$

由 Gronwall 引理及引理 3.1 可得

$$
||e||_1^2\leq C\int_0^t\left[(\|\rho_t\|_0^2+\|\rho\|_0^2+h^2\|\rho\|_1^2)+h^{-2}(\|\rho\|_0^2+h^2\|\rho\|_1^2)\right]d\tau\leq Ch^2\|Q\|_{H^1(0,T;H^3(\Omega))}^2,
$$

即

$$
||e||_1\leq Ch\|Q\|_{H^1(0,T;H^3(\Omega))}. \tag{3.28}
$$

又由引理 3.1(a) 知,

$$
\|\rho\|_1\leq Ch\|Q\|_2. \tag{3.29}
$$

结合式 (3.28) 和式 (3.29), 定理 3.3 结论得证.

4. 数值算例

用本文所建立的有限体积元格式对一沟灌条件下的土壤水分运动问题 [3] 进行数值模拟. 不妨设 $S_r=0$, 所研究的土壤是均质轻壤土, 该土壤水分运动参数为

$$
D(Q)=278.3(Q/Q_s)^{8.05}(cm^2/min), \tag{5.1}
$$

$$
K(Q)=1.42(Q/Q_s)^{10.24}(cm/min). \tag{5.2}
$$

土壤初始含水率为 $0.03cm^3/cm^3$, 饱和含水率为 $0.41cm^3/cm^3$. 根据对称性, 取半平面进行实验和模拟计算. 在数值模拟时, 对区域 $\Omega=[0,25]\times[0,25]$ 进行三角剖分, 所有的三角形单元

都是全等的等腰直角三角形, 直角边长为 1cm, 共有内节点 $24 \times 24 = 576$ 个, 依次联结这些三角单元的重心和边的中点即可得到相应的对偶剖分. 利用上面的参数, 编程计算可得到该沟灌条件下的土壤水分运动问题的有限体积元数值解.

在图 1-4 中, 分别给出了入渗 10 分钟、20 分钟、30 分钟和 40 分钟时半平面内含水率的分布图. 比较这四个图可以看出, 随着入渗时间的不断增加, 土壤的湿润锋面逐渐扩大, 即土壤含水率随着时间推移不断增大. 同时可以看到, 沟附近的土壤含水率随时间变化不大, 并逐步接近饱和含水率, 而离沟较远的土壤含水率曲面变化陡峭, 且竖直方向的含水率比水平方向增幅略大, 这些都是与实际情况相符的.

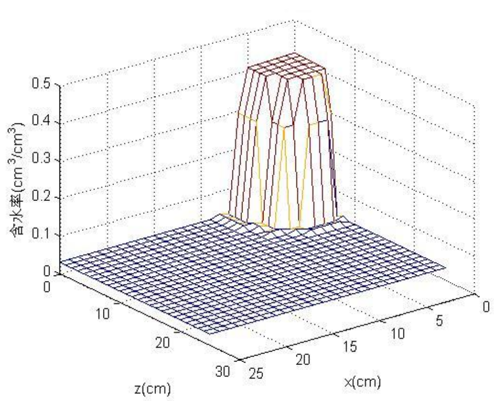

图 1　入渗 10 分钟时

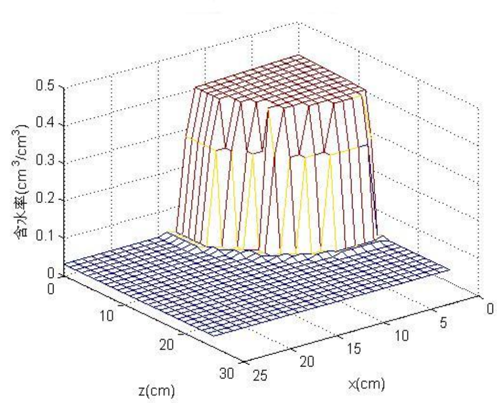

图 2　入渗 20 分钟时

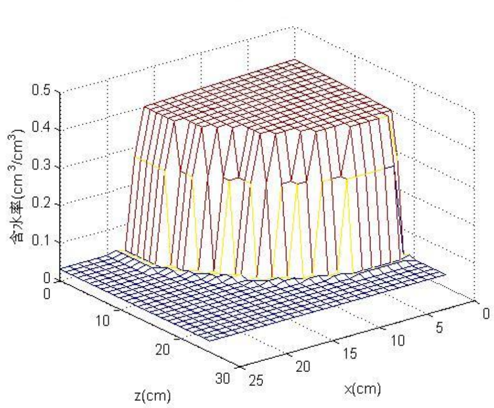

图 3　入渗 30 分钟时

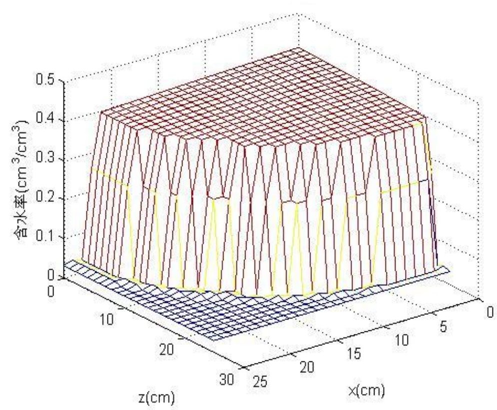

图 4　入渗 40 分钟时

由此可见, 利用本文有限体积元格式来求解二维水分运动问题是可靠的, 该格式不仅计算简单, 且具有稳定性和可实用性, 避免了用有限元法和有限差分法模拟所产生的数值振荡现象, 因此可以用来数值模拟更加复杂的二维水分运动的物理过程, 例如地下管道渗灌、喷灌等等.

致谢: 作者衷心感谢编委和审稿专家提出的宝贵的修改意见!

参 考 文 献

[1] 叶笃正, 曾庆存, 郭裕福. 当代气候研究 [M]. 北京: 气候出版社, 1991.

[2] Dai Y J, Zeng Q C. A land surface model(IAP94) for climate studies, Part I:formulation and validation in off-line experiments[J]. Advances in Atmospheric Sciences, 1997, 14: 433-460

[3] 雷志栋, 杨诗秀, 谢森传. 土壤水动力学 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1998.

[4] 李焕荣, 罗振东, 谢正辉等. 非饱和土壤水流问题的广义差分法及其数值模拟 [J]. 计算数学, 2006, 28(3): 321-336.

[5] 李焕荣, 罗振东, 李潜. 二维粘弹性问题的广义差分法及其数值模拟 [J]. 计算数学, 2007, 29(3): 251-262.

[6] 张蔚榛. 地下水与土壤水动力学 [M]. 北京: 中国水利水电出版社, 1996.

[7] 李荣华, 陈仲英. 微分方程广义差分法 [M]. 长春: 吉林大学出版社, 1994.

[8] Li Q. Generalized difference method[M]. Lecture Notes of the Twelfth Mathematical Workshop, Taejon, Korea, 1997.

[9] Li H R, Li Q. Finite volume element methods for nonlinear parabolic integro-differential problems[J]. J. KSIAM, 2003, 7(2): 35-47.

[10] Li H R. Generalized difference method for one-dimensional viscoelastic problems[J]. J. KSIAM, 2005, 9(2): 55-64.