DOI: 10.3969/j.issn.1007-5461. 2012.04.005

(2+1) 维非线性发展方程的对称约化和显式解

张颖元， 刘希强， 王岗伟

（ 聊城大学数学科学学院， 山东 聊城 252059 ）

摘 要： 利用相容方法，得到了 (2+1) 维非线性发展方程的对称，并根据相应的特征方程组得到了 (2+1) 维非线性发展方程的相似约化，同时得到了一些新的显式解。

关 键 词： (2 + 1) 维非线性发展方程；对称约化；显式解

中 图 分 类 号： O175.2 **文 献 标 识 码：** A **文章编号：** 1007-5461(2012)04-0411-06

Symmetry reductions and explicit solutions of (2+1)-dimensional nonlinear evolution equation

ZHANG Ying-yuan, LIU Xi-qiang, WANG Gang-wei

(School of Mathematical Science, Liaocheng University, Liaocheng 252059, China)

Abstract: Using the compatibility method, symmetry of the nonlinear evolution equation was obtained. By solving the corresponding characteristic equations associated with symmetry equations, symmetry reductions of the (2+1)-dimensional nonlinear evolution equation were given first, then some special type of new explicit solutions were presented.

Key words: (2+1)-dimensional nonlinear evolution equation; symmetry reduction; explicit solutions

1 引 言

非线性发展方程广泛地描述了众多领域的复杂现象，如物理学、化学等。非线性发展方程的精确解在分析物理现象中起着重要的作用，因此求非线性发展方程的精确解具有较大的应用价值。为了得到非线性发展方程的精确解，已经提出了许多有效的方法，例如，齐次平衡法，雅可比椭圆函数方法，广义的 tanh 函数法和对称群方法 [1~5] 。本文的目的是考虑下述 (2+1) 维非线性发展方程的显式解

$$w_t = -aw^2w_x + bww_y + cw_{xxx} - d\partial_x^{-1}w_{yy}\ , \tag{1}$$

其中 a,b,c,d 是任意常数， $\partial_x^{-1} = \int \mathrm{d}x$ 。把 $\partial_x^{-1}w = u$ 代入方程 (1), 方程 (1) 可表示为

$$u_{xt} + au_x^2u_{xx} - bu_xu_{xy} - cu_{xxxx} + du_{yy} = 0\ , \tag{2}$$

方程 (1) 是基于 (1+1) 维 Jaulent-Miodek 方程 [6] 提出的推广。当 $a=3,\ b=-\dfrac{3}{2},\ c=-\dfrac{1}{2},\ d=\dfrac{3}{8}$ 时特殊情况的某些显式解已经通过双线性法求出 [6] 。相容性方法是求解非线性发展方程对称的一种有效方法，该方法极大简化了计算过程。相容性方法的主要思想是假定方程 (2) 为具有形式

$$u_t = \alpha(t,x,y)u_x + \beta(t,x,y)u_y + \gamma(t,x,y)u + \theta(t,x,y) \tag{3}$$

基金项目： 国家自然科学基金和中国工程物理研究院联合基金资助项目 (11076015)
作者简介： 张颖元 女，山东济南人，硕士，研究方向为微分方程理论与应用。 **E-mail:** zhangyingyuanok@126.com
导师简介： 刘希强 (1957 -), 山东菏泽人，博士，教授，研究方向为非线性微分方程系统。 **E-mail:** liuxiqiang@sina.com.cn
收稿日期： 2011–06–21; **修改日期：** 2011–10–17

的非经典对称，其中 α, β, γ 和 θ 为可由方程 (2) 和 (3) 的相容性确定的函数。本文将利用相容方法，讨论方程 (2) 的非经典对称，通过对称进而得到非线性发展方程 (2) 的一些新的显式解。

2 (2+1) 维非线性发展方程的对称

把方程 (3) 代入方程 (2) 得到方程 (2) 的最高阶导数项 u_{xxxx} 的表达式

$$u_{xxxx}=(\alpha_x u_x+\alpha u_{xx}+\beta_x u_y+\beta u_{xy}+\gamma_x u+\gamma u_x+\theta_x+au_x^2u_{xy}-bu_xu_{xy}+du_{yy})/c\ , \tag{4}$$

其中 c 是非零常数。根据方程 (2) 和方程 (3), 由 $u_{xtt}=u_{txt}$ 得

$$(-au_x^2u_{xx}+bu_xu_{xy}+cu_{xxxxx}-du_{yy})_t=(\alpha u_x+\beta u_y+\gamma u+\theta)_{xt}\ . \tag{5}$$

展开上述方程，且在展开方程中遇到 u_t 和最高阶导数项 u_{xxxx} 分别用方程 (3) 和 (4) 代替，可得方程

$$4c\beta_x u_{xxxy}-2a\gamma u_x^2u_{xx}+F_1(t,x,y,u,u_t,\cdots)=0\ , \tag{6}$$

其中函数 F_1 不依赖于 u_{xxxy} 和 $u_x^2u_{xx}$ 。为了保证方程 (6) 对任意解 u 都成立，则必须 u_{xxxy} 和 $u_x^2u_{xx}$ 的系数为零，因此可得

$$\beta_x=0\ ,\ \gamma=0\ . \tag{7}$$

应用方程 (7), 方程 (6) 能进一步被约化为

$$-a\alpha_{xx}u_x^3-d\beta_{yy}u_y+F_2(t,x,y,u,u_t,\cdots)=0\ , \tag{8}$$

其中函数 F_2 不依赖于 u_x^3 和 u_y 。则方程 (8) 中 u_x^3 和 u_y 的系数为零可得

$$\alpha_{xx}=0\ ,\ \beta_{yy}=0\ . \tag{9}$$

重复以上步骤，可以得到下述决定方程组

$$-2a\theta_x+b\alpha_y=0\ , \tag{10}$$

$$b\beta_y-2b\alpha_x=0\ , \tag{11}$$

$$b\theta_x-2d\alpha_y-\beta_t+3\alpha_x\beta=0\ , \tag{12}$$

$$-\alpha_{xt}-d\alpha_{yy}+3\alpha_x^2+b\theta_{xy}=0\ , \tag{13}$$

$$-\alpha_t+3\alpha_x\alpha=0\ , \tag{14}$$

$$-2d\beta_y+4d\alpha_x=0\ , \tag{15}$$

$$b\alpha_{xy}-a\theta_{xx}=0\ , \tag{16}$$

解方程 (10)~(16), 可得非线性发展方程 (2) 的非经典对称可以表示为

$$\sigma=\left(\frac{c_1}{3}x-\frac{2ac_3}{4da-b^2}y+c_5\right)u_x+\left(\frac{2c_1}{3}y+c_3t+c_4\right)u_y+(c_1t+c_2)u_t-\frac{bc}{4da-b^2}x-h_1(t)y-h_2(t)\ , \tag{17}$$

其中 $h_1(t)$ 和 $h_2(t)$ 是关于 t 的任意函数，c_1, c_2, c_3, c_4 和 c_5 是任意常数, 并且 $\alpha=\frac{c_1}{3}x-\frac{2ac_3}{4da-b^2}y+c_5$, $\beta=\frac{2c_1}{3}y+c_3t+c_4$, $\theta=-\frac{bc_3}{4da-b^2}x-h_1(t)y-h_2(t)$ 。

3 (2+1) 维非线性发展方程的对称约化和显式解

利用 $\sigma=0$ 与方程 (2) 的相容性，讨论方程 (2) 的相似约化和显式解。方程 (2) 的对称 (17) 所对应的特征方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\alpha}=\frac{\mathrm{d}y}{\beta}=\frac{\mathrm{d}t}{c_1t+c_2}=\frac{\mathrm{d}u}{-\theta}\ . \tag{18}$$

现在讨论下述几种情况：

情况 1 $c_1=0,\ c_2=0,\ c_3=0,\ c_4\neq 0,\ c_5\neq 0,\ h_1(t)\neq 0,\ h_2(t)\neq 0$ 。解相应的特征方程组得

$$u=\frac{1}{c_2}\int h_1(t)\Big(y-\frac{c_4}{c_2}t\Big)\mathrm{d}t+\frac{c_4}{c_2^2}\int h_1(t)t\mathrm{d}t+\frac{1}{c_2}\int h_2(t)\mathrm{d}t+f(v,z)\ , \tag{19}$$

其中不变量 $v=x-\dfrac{c_5}{c_2}t,\ z=y-\dfrac{c_4}{c_2}t$, 且 $f(v,z)$ 满足约化方程

$$-c_5f_{vv}-c_4f_{vz}+c_2af_v^2f_{vv}-c_2bf_{vz}f_v-c_2cf_{vvvv}+dc_2f_{zz}=0\ , \tag{20}$$

设 $f=f(\xi)$, 其中 $\xi=lv+gz$, 且积分一次方程 (20) 可以被约化为

$$k_1f'+k_2f^{'3}-k_3f^{'2}-k_4f^{'''}+D=0\ , \tag{21}$$

其中 $k_1=-c_5l^2-c_4lg+dc_2g,\ k_2=\dfrac{1}{3}c_2al^4,\ k_3=\dfrac{1}{2}c_2bl^2g,\ k_4=c_2cl^4$, D 是积分常数。作变换 $f'(\xi)=p$, 方程 (21) 进一步约化为

$$k_1p+k_2p^3-k_3p^2-k_4p^{''}+D=0\ , \tag{22}$$

为了得到方程 (22) 的解，应用广义的 tanh 函数展开方法 [7] 。设方程 (22) 有下述形式的显式解

$$p=\sum_{i=0}^{n}q_iY(\xi)^i+\sum_{i=1}^{n}q_{-i}Y(\xi)^{-i}\ , \tag{23}$$

其中 $\xi=lv+gz$, l, g 是任意常数， n, q_i, q_{-i} 是待定常数，且 Y 是满足 Riccati 方程的解

$$Y'(\xi)=A+BY(\xi)+CY^2(\xi)\ , \tag{24}$$

平衡方程 (22) 中的最高阶导数项和非线性项，可得 $n=1$ 。因此方程 (22) 的显式解可以表示为

$$p=q_0+q_1Y(\xi)+\frac{q_{-1}}{Y(\xi)}\ , \tag{25}$$

把方程 (25) 代入方程 (22) 且令 $Y(\xi)$ 的系数为零，得到关于 q_0, q_1 和 q_{-1} 的超定方程组，解超定方程组并利用 Riccati 方程的解就可得到方程 (22) 的下述形式的解

$$\begin{aligned}p_1\ =&\ \frac{k_3+\sqrt{k_3^2-12k_2k_4AC-3k_1k_2+3k_2k_4B^2}}{3k_2}+\\&\sqrt{\frac{2k_4}{k_2}}C[\sec(\xi)-\tan(\xi)]+\sqrt{\frac{2k_4}{k_2}}A[\sec(\xi)-\tan(\xi)]^{-1}\ ,\\p_2\ =&\ \frac{k_3+\sqrt{k_3^2-12k_2k_4AC-3k_1k_2+3k_2k_4B^2}}{3k_2}+\\&\sqrt{\frac{2k_4}{k_2}}C\frac{\tan\xi}{1\pm\sec\xi}+\sqrt{\frac{2k_4}{k_2}}A\Big(\frac{\tan\xi}{1\pm\sec\xi}\Big)^{-1}\ ,\\p_3\ =&\ \frac{k_3+\sqrt{k_3^2-12k_2k_4AC-3k_1k_2+3k_2k_4B^2}}{3k_2}+\\&\sqrt{\frac{2k_4}{k_2}}C\frac{\exp(B\xi)-A}{B}+\sqrt{\frac{2k_4}{k_2}}A\Big[\frac{\exp(B\xi)-A}{B}\Big]^{-1}\ ,\end{aligned}$$

其中 $\xi=lv+gz$, 根据变换就可以得到 f, 从而也就利用 (19) 式得到 u, 并进一步得到原方程的解。为了得到原方程的孤立波解，利用扩展的雅可比椭圆函数展开法 [8], 设方程 (22) 有下述形式的解

$$G=p(\xi)=\sum_{i=0}^{n}a_i\mathrm{sn}^i(\xi)+\sum_{i=1}^{n}b_i\mathrm{sn}^{-i}(\xi)\ , \tag{26}$$

平衡方程 (22) 中的最高阶导数项和非线性项，可得 $n=1$ 。因此方程 (22) 的显式解可以表示为

$$P(\xi)=a_0+a_1\mathrm{sn}(\xi)+b_1\mathrm{sn}^{-1}(\xi)\ , \tag{27}$$

其中 a_0，a_1，b_1 是待定常数。把方程 (27) 代入方程 (22), 令 $\mathrm{sn}\xi$ 的系数为零，可得到 a_i，b_i，k_1，k_2，k_3，k_4 和 D 的代数方程组，解代数方程组可以得到显式解

$$p_1=\frac{k_3+\sqrt{k_3^2-3k_2k_1-18k_2k_4m-3k_2k_4-3k_2k_4m^2}}{3k_2}-\sqrt{\frac{2k_4}{k_2}}[\mathrm{sn}(\xi)-\mathrm{sn}^{-1}(\xi)]\ , \tag{28}$$

$$p_2=\frac{k_3+\sqrt{k_3^2-3k_2k_1-3k_2k_4-3k_2k_4m^2}}{3k_2}+\sqrt{\frac{2k_4}{k_2}}m\mathrm{sn}(\xi)\ . \tag{29}$$

特别地，当 $m\to 1$, $\mathrm{sn}(\xi)=\tanh(\xi)$, 可得到下述形式的孤立波解

$$p_1=\frac{k_3+\sqrt{k_3^2-3k_2k_1-24k_2k_4}}{3k_2}-\sqrt{\frac{2k_4}{k_2}}[\tanh(\xi)-\coth(\xi)]\ ,$$

$$p_2=\frac{k_3+\sqrt{k_3^2-3k_2k_1-6k_2k_4}}{3k_2}+\sqrt{\frac{2k_4}{k_2}}\tanh(\xi)\ ,$$

其中 $\xi=lv+gz$, 根据变换就可以得到 f, 从而也就可以得到原方程的显式解。经过验证方程 (22) 也可以具有下述解的形式

$$G=p(\xi)=\sum_{i=0}^{n}a_i\mathrm{cn}^i(\xi)+\sum_{i=1}^{n}b_i\mathrm{cn}^{-i}(\xi)\ , \tag{30}$$

$$G=p(\xi)=\sum_{i=0}^{n}a_i\mathrm{ds}^i(\xi)+\sum_{i=1}^{n}b_i\mathrm{ds}^{-i}(\xi)\ , \tag{31}$$

$$G=p(\xi)=\sum_{i=0}^{n}a_i\mathrm{cs}^i(\xi)+\sum_{i=1}^{n}b_i\mathrm{cs}^{-i}(\xi)\ , \tag{32}$$

其中在文献 [8] 中已经证明方程 (31) 使用变换 $\mathrm{cn}(\xi)\to\dfrac{\mathrm{ids}(\xi)}{m}$, 方程 (32) 使用变换 $\mathrm{dn}(\xi)\to\mathrm{ics}(\xi)$ 。利用上述同样的解法就可以得到原方程更多新的解。

情况 2 $c_1\neq 0$，$c_2=0$，$c_5=0$，$c_3=0$，$c_4=0$，$h_1(t)=0$，$h_2(t)\neq 0$, 解相应的特征方程组可得不变量 v，z 和函数 u 。

$$v=xt^{-\frac{1}{3}},\ z=yt^{-\frac{2}{3}},\ u=\frac{1}{c_1}\int\frac{h_2(t)}{t}\mathrm{d}t+f(v,z)\ . \tag{33}$$

把方程 (33) 代入方程 (2), 可得约化方程

$$vf_{vv}+f_v+2zf_{vz}-3af_v^2f_{vv}+3bf_{vz}f_v+3cf_{vvvv}-3df_{zz}=0\ , \tag{34}$$

显然 $f=b_0+b_1z$ 是方程 (34) 的解，其中 b_0，b_1 是任意常数，则原方程的解为

$$u=\frac{1}{c_1}\int\frac{h_2(t)}{t}\mathrm{d}t+b_1yt^{-\frac{2}{3}}+b_0\ .$$

另外设 $f=s_1(z)v+s_2(z)$, 代入方程 (34) 可得 $f=z_1v+\dfrac{z_1}{6d}z^2+z_2w+z_3$, 其中 z_1，z_2 和 z_3 是积分常数，则原方程的解为

$$u=\frac{1}{c_1}\int\frac{h_2(t)}{t}\mathrm{d}t+z_1xt^{-\frac{1}{3}}+\frac{z_1}{6d}y^2t^{-\frac{4}{3}}+z_2yt^{-\frac{2}{3}}+z_3\ .$$

情况 3 $c_1=0,\ c_2=0,\ c_3=0,\ c_5=0,\ c_4\neq 0,\ h_1(t)=0,\ h_2(t)=d_1$, 解相应的特征方程组得

$$u=\frac{d_1}{c_4}y+f(v,z)\ ,\tag{35}$$

其中 $v=x,\ z=t$ 且函数 $f(v,z)$ 满足约化方程

$$f_{xt}+af_x^2f_{xx}-cf_{xxxx}=0\ .\tag{36}$$

把 $f=f(\xi)$ 代入方程 (36) 可得常微分方程

$$A_1f''+A_2f^{'2}f''-A_3f^{(4)}=0\ ,\tag{37}$$

其中 $\xi=lx+\lambda t,\ l,\ \lambda$ 是任意非零常数， $A_1=l\lambda,\ A_2=al^4,\ A_3=cl^4$ 。对方程 (37) 积分一次可得

$$A_1f'+\frac{A_2}{3}f^{'3}-A_3f'''=0\ ,\tag{38}$$

作变换 $p(\xi)=f'$, 则方程 (38) 进一步约化为

$$A_1p+\frac{A_2}{3}p^3-A_3p''=0\ .\tag{39}$$

设方程 (39) 有下述形式的解

$$p=a_0+a_1\varphi(\xi)+a_2\varphi^2(\xi)+\cdots+a_m\varphi^m(\xi)+\frac{a_{m+1}}{\varphi(\xi)}+\frac{a_{m+2}}{\varphi^2(\xi)}+\cdots+\frac{a_{2m}}{\varphi^m(\xi)}\ ,\tag{40}$$

利用辅助方程

$$\varphi'(\xi)=k+\varphi^2(\xi)\ ,\tag{41}$$

其中 k 是参数， a_i 是待定常数， $m\geq 1$ 。方程 (41) 的 Riccati 方程有广义解

$$\varphi(\xi)=-\sqrt{-k}\tanh(\sqrt{-k}\xi)=-\sqrt{-k}\coth(\sqrt{-k}\xi)\ ,\ (k<0)\ ,$$

$$\varphi(\xi)=\sqrt{k}\tan(\sqrt{k}\xi)=\sqrt{k}\cot(\sqrt{k}\xi)\ ,\ (k>0)\ .$$

平衡方程 (39) 的最高阶导数项和非线性项得 $n=1$ 。所以方程 (39) 的解可以表示为

$$p=a_0+a_1\varphi(\xi)+\frac{a_2}{\varphi(\xi)}\ .\tag{42}$$

把方程 (41) 和方程 (42) 代入方程 (39) 并令 φ^i 的系数为零，得到关于 a_0, a_1, a_2 和 k 的超定方程组，解得

$$a_1=\sqrt{\frac{6A_3}{A_2}}\ ,\ a_2=\sqrt{\frac{3A_3}{A_2}}k\ ,\ k=\frac{A_1}{(2-3\sqrt{2})A_3}\ ,\tag{43}$$

其中 $a_0=0,\ A_2\neq 0$ 。

当 $k<0$, 即 $A_1A_3>0$, 则方程 (39) 的显式解为

$$\begin{aligned}p_1=&-\sqrt{\frac{6A_3}{A_2}}\sqrt{-\frac{A_1}{(2-3\sqrt{2})A_3}}\tanh\left(\sqrt{-\frac{A_1}{(2-3\sqrt{2})A_3}}(lx+\lambda t)\right)-\\&\sqrt{\frac{3A_3}{A_2}}\sqrt{-\frac{A_1}{(2-3\sqrt{2})A_3}}\coth\left(\sqrt{-\frac{A_1}{(2-3\sqrt{2})A_3}}(lx+\lambda t)\right)\ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_2=&-\sqrt{\frac{6A_3}{A_2}}\sqrt{-\frac{A_1}{(2-3\sqrt{2})A_3}}\coth\left(\sqrt{-\frac{A_1}{(2-3\sqrt{2})A_3}}(lx+\lambda t)\right)-\\&\sqrt{\frac{3A_3}{A_2}}\sqrt{-\frac{A_1}{(2-3\sqrt{2})A_3}}\tanh\left(\sqrt{-\frac{A_1}{(2-3\sqrt{2})A_3}}(lx+\lambda t)\right)\ .\end{aligned}$$

当 $k>0$, 即 $A_1A_3<0$, 则方程 (39) 的显式解为

$$p_3=\sqrt{\frac{6A_1}{(2-3\sqrt{2})A_2}}\tan\left(\sqrt{\frac{A_1}{(2-3\sqrt{2})A_3}}(lx+\lambda t)\right)+\sqrt{\frac{3A_1}{(2-3\sqrt{2})A_2}}\cot\left(\sqrt{\frac{A_1}{(2-3\sqrt{2})A_3}}(lx+\lambda t)\right)\ ,$$

$$p_4=\sqrt{\frac{6A_1}{(2-3\sqrt{2})A_2}}\cot\left(\sqrt{\frac{A_1}{(2-3\sqrt{2})A_3}}(lx+\lambda t)\right)+\sqrt{\frac{3A_1}{(2-3\sqrt{2})A_2}}\tan\left(\sqrt{\frac{A_1}{(2-3\sqrt{2})A_3}}(lx+\lambda t)\right)\ ,$$

根据相应的变换以及方程 (35) 可以得到方程 (2) 的显式解。

方程 (38) 可以进一步约化为 $G'=\varepsilon\sqrt{c_2G^2+c_4G^4}$, 其中 $f'(\xi)=G$, $c_2=\dfrac{A_1}{A_3}$, $c_4=\dfrac{6A_2}{A_3}$, 且 $m\to 1$ 时原方程有钟状孤立子解和扭状孤立子解

$$u=\frac{d_1}{c_4}y+\sqrt{-\frac{A_1}{6A_2}}\ln\left\{\mathrm{sech}\left[\sqrt{\frac{A_1}{A_3}}(lx+\lambda t)\right]+\tanh\left[\sqrt{\frac{A_1}{A_3}}(lx+\lambda t)\right]\right\}\ ,$$

$$u=\frac{d_1}{c_4}y+\sqrt{-\frac{A_3}{12A_2}}\ln\left\{1+\tan^2\mathrm{h}\left[\sqrt{\frac{A_1}{2A_3}}(lx+\lambda t)\right]\right\}\ .$$

4 结 论

应用相容方法得到了非线性发展方程 (2) 的对称和相似约化方程，可以看出应用相容方法可直接得到原方程 (2) 的非经典对称。并通过求解约化方程获得了一些新的显式解。

参考文献：

[1] Liu Xiqiang. New explicit solutions of the $(2+1)$-dimensional Broer-Kaup equations [J]. *J. Partial Diff. Eqs.*, 2004, 17: 1-9.

[2] Tian Guichen, Liu Xiqiang. Exact solutions of the general variable coefficient KdV equation with external force term [J]. *Chinese Journal of Quantum Electronics* (量子电子学报), 2005, 22: 339-343 (in Chinese).

[3] Fan Engui, *et al.* Applications of the Jacobi elliptic function method to special-type nonlinear equations [J]. *Phys. Lett. A*, 2002, 305: 383-392.

[4] Dong Zhongzhou, Yu Xichang, *et al.* Exact traveling wave solutions of the nonlinear coupled KdV equations [J]. *Chinese Journal of Quantum Electronics* (量子电子学报), 2006, 23: 31-34 (in Chinese).

[5] Olver P J. *Applications of Lie Groups to Differential Equations* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1986.

[6] Wazwaz Abdul-Majid. Multiple kink solutions and multiple singular kink solutions for $(2+1)$-dimensional nonlinear models generated by the Jaulent-Miodek hierarchy [J]. *Phys. Lett. A*, 2009, 373: 1844-1846.

[7] Chen Huaitang, Zhang Hongqing. New multiple soliton solutions to the general Burgers-Fisher equation and the Kuramoto-Sivashinsky equation [J]. *Chaos, Solitions & Fractals*, 2004, 19: 71-76.

[8] Abdou M A, Elhanbaly A. Construction of periodic and solitary wave solutions by the extended Jacobi elliptic function expansion method [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2007, 12: 1229-1241.

[9] Liu Na, Liu Xiqiang. Symmetries, new exact solutions and conservation laws of $(2+1)$-dimensional Boiti-Leon-Manna-Pempinelli equation [J]. *Chinese Journal of Quantum Electronics* (量子电子学报), 2008, 25(5): 546-552 (in Chinese).