第 29 卷 第 3 期 应 用 力 学 学 报 Vol.29 No.3
2012 年 6 月 CHINESE JOURNAL OF APPLIED MECHANICS Jun. 2012
文章编号：1000- 4939(2012) 03-0335-06

公路桥梁车辆耦合系统随机最优控制研究

孙燕军 冷小磊
（南京航空航天大学振动工程研究所 210016 南京）

摘要：为了研究公路桥梁车辆耦合系统随机振动的控制策略，本文基于 1/4 车辆-桥梁模型，采用随机最优控制中随机最优输出调节器对系统进行控制。算例分析表明：采用随机最优控制的系统竖向位移响应方差较无控制情况减小量达 90%。该控制方法的应用可大大降低系统竖向位移响应方差，有效提高车辆行驶的平稳性。

关键词：车桥耦合；最优控制；动态响应；方差
中图分类号：U441.3; O32 **文献标识码**： A

1 引 言

随着公路交通的日益繁忙、车辆速度的提高及其荷载标准的加大，公路桥梁-车辆耦合系统振动研究得到了极大的推动和发展[1-2]，并形成了车辆与桥梁相互作用研究的一系列前沿性课题[3]。同时，车辆-桥梁系统的振动控制研究亦越来越受关注[2-3]。路面不平整度作为车辆-桥梁系统振动重要影响因素之一，通过车桥系统的耦合作用极大程度上影响了桥梁的安全性和车辆行驶的舒适性与稳定性。本文在考虑随机路面不平整度的基础上，建立了 1/4 车辆-桥梁耦合系统模型振动微分方程，采用随机最优控制中随机最优输出调节器对系统进行控制，应用 Runge-kutta 法和高斯积分数值计算系统竖向位移响应方差，并以此作为系统平稳性的评价指标。

2 车桥耦合系统模型

本文采用 Eule -Bernoulli 梁模型，桥梁跨长为 L，单位长度质量为 m，抗弯刚度为 EI，由均质各向同性材料做成，不考虑剪切变形和转动惯量的影响，车桥耦合系统模型图[3]如图 1 所示。车辆简化为两自由度的弹簧-阻尼-质量系统，车辆轮胎不离开桥面。图 1 中：m_t 为车体质量；m_b 为车架质量与轮对质量之和；k_t 为车体垂向刚度；c_t 为车体垂向阻尼；k_b 为车架垂向刚度；c_b 为车架垂向阻尼；$\varepsilon(t)$ 为车辆通过桥梁时的运动规律；Y 、y_t 、y_b 分别为桥梁、车辆车体、车架竖向位移；u_1 、u_2 为控制力，分别由放置在车体和转向架、转向架和车轮之间的作用器产生；$r(x)$ 为车轮处路面不平整度。

基金项目：南京航空航天大学基本科研业务费专项科研项目（201008） 来稿日期：2010-12-27 修回日期：2012-04-27
第一作者简介：孙燕军，男，1987 年生，南京航空航天大学振动工程研究所，研究生；研究方向——噪声、振动与控制。
通讯作者：冷小磊， E-mail：lengxl@nuaa.edu.cn

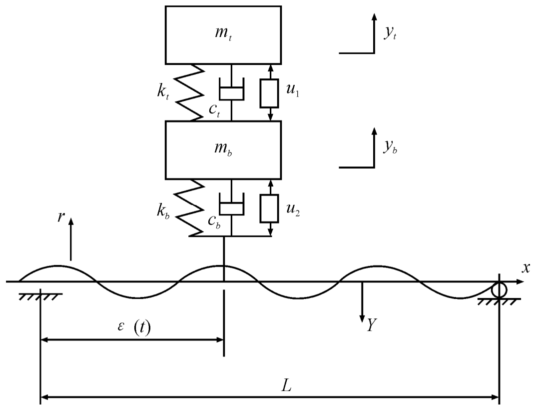


图 1 车桥耦合系统模型图

车桥耦合系统振动方程式如下

$$m_t\ddot{y}_t+c_t(\dot{y}_t-\dot{y}_b)+k_t(y_t-y_b)=u_1 \tag{1}$$

$$\begin{aligned}&m_b\ddot{y}_b+c_b(\dot{y}_b-\dot{r}+\dot{Y}(x,t))+k_b(y_b-r+Y(x,t))\\&\quad=c_t(\dot{y}_t-\dot{y}_b)+k_t(y_t-y_b)+u_2-u_1\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}&m\frac{\partial^2Y(x,t)}{\partial t^2}+EI\frac{\partial^4Y(x,t)}{\partial x^4}+c\frac{\partial Y(x,t)}{\partial t}\\&\quad=\{(m_b+m_t)g-c_b[\dot{y}_b-\dot{r}+\dot{Y}(x,t)]-\\&\qquad k_b[y_b-r+Y(x,t)]-u_2\}\delta(x-\varepsilon(t))\end{aligned} \tag{3}$$

其中： $r(x)$为随机路面不平顺，本文中假设随机路面不平整度为平稳随机过程；g 为重力加速度；δ 为狄拉克函数。

为简化分析，近似地将该简支梁模型的前 n 阶模态作为车桥耦合振动分析中桥梁的模态。将移动车辆作用下的桥梁的竖向振动模态展开为

$$Y(x,t)=\sum_i^n y_i(x)q_i(t) \tag{4}$$

其中：$y_i(x)$ 是均匀简支梁的第 i 阶模态函数；$q_i(t)$ 是第 i 阶模态响应；取 $y_i(x)=\sqrt{\dfrac{2}{mL}}\sin(\dfrac{i\pi x}{L})$ 为桥梁的正则化振型[4]。

把式（4）代入式（1）~式（3）并在式（1）两端乘以 $y_i(x)$，然后对式（1）中 $y_i(x)$ 从 0 到 L 积分。利用 $y_i(x)$ 的正交性质，可得

$$\begin{aligned}&\ddot{q}_i+2\varsigma_i\omega_i\dot{q}_i+\omega_i^2q_i\\&\quad=y_i(\varepsilon(t))\left\{(m_b+m_t)g-c_b\left[\dot{y}_b-\dot{r}+\sum_i^n y_i(x)\dot{q}_i(t)\right]-\right.\\&\qquad\left.k_b(y_b-r+\sum_i^n y_i(x)q_i(t))-u_2\right\}\end{aligned} \tag{5}$$

$$m_t\ddot{y}_t+c_t(\dot{y}_t-\dot{y}_b)+k_t(y_t-y_b)=u_1 \tag{6}$$

$$\begin{aligned}&m_b\ddot{y}_b+c_b\left[\dot{y}_b-\dot{r}+\sum_i^n y_i(x)\dot{q}_i(t)\right]+k_b\left[y_b-r+\sum_i^n y_i(x)q_i(t)\right]\\&\quad=c_t(\dot{y}_t-\dot{y}_b)+k_t(y_t-y_b)+u_2-u_1\end{aligned} \tag{7}$$

其中：$\omega_i^2=\dfrac{EI}{m}\left(\dfrac{i\pi}{L}\right)^4$；$2\varsigma_i\omega_i=\dfrac{c}{m}$（其中 i=1,⋯,n）。

将式(5)~式(7)用矩阵形式表示[3]为

$$\dot{\boldsymbol{z}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{H}\dot{\boldsymbol{r}}+\boldsymbol{F} \tag{8}$$

其中

$$\boldsymbol{z}=\begin{bmatrix}q_1 & q_2 & \cdots & q_n & y_t & y_b & \dot{q}_1 & \dot{q}_2 & \cdots & \dot{q}_n & \dot{y}_t & \dot{y}_b\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{13} & \boldsymbol{A}_{14}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \boldsymbol{A}_{23} & \boldsymbol{A}_{24}\\ \boldsymbol{A}_{31} & \boldsymbol{A}_{32} & \boldsymbol{A}_{33} & \boldsymbol{A}_{34}\\ \boldsymbol{A}_{41} & \boldsymbol{A}_{42} & \boldsymbol{A}_{43} & \boldsymbol{A}_{44}\end{bmatrix},\boldsymbol{A}_{11}=\boldsymbol{0}_{n\times n},$$

$$\boldsymbol{A}_{12}=\boldsymbol{0}_{n\times 2}\ ,\ \boldsymbol{A}_{13}=I_{n\times n}\ ,\ \boldsymbol{A}_{14}=\boldsymbol{0}_{n\times 2}\ ,\ \boldsymbol{A}_{21}=\boldsymbol{0}_{2\times n}\ ,$$

$$\boldsymbol{A}_{22}=\boldsymbol{0}_{2\times 2},\boldsymbol{A}_{23}=\boldsymbol{0}_{2\times n},\boldsymbol{A}_{24}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_{31}=\begin{bmatrix}-\omega_1^2-k_by_1y_1 & -k_by_1y_2 & \cdots & -k_by_1y_n\\ -\omega_2^2-k_by_2y_1 & -k_by_2y_2 & \cdots & -k_by_2y_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -\omega_n^2-k_by_ny_1 & -k_by_ny_2 & \cdots & -k_by_ny_n\end{bmatrix}_{n\times n},$$

$$\boldsymbol{A}_{32}=\begin{bmatrix}0 & -k_by_1\\ \vdots & \vdots\\ 0 & -k_by_n\end{bmatrix}_{n\times 2},\quad \boldsymbol{A}_{34}=\begin{bmatrix}0 & -c_by_1\\ \vdots & \vdots\\ 0 & -c_by_n\end{bmatrix}_{n\times 2},$$

$$\boldsymbol{A}_{33}=\begin{bmatrix}-2\varsigma_1\omega_1-c_b y_1 y_1 & -c_b y_1 y_2 & \cdots & -c_b y_1 y_n\\ -2\varsigma_2\omega_2-c_b y_2 y_1 & -c_b y_2 y_2 & \cdots & -c_b y_2 y_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -2\varsigma_n\omega_n-c_b y_n y_1 & -c_b y_n y_2 & \cdots & -c_b y_n y_n\end{bmatrix}_{n\times n},$$

$$\boldsymbol{A}_{41}=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0\\ -\dfrac{k_b}{m_b}y_1 & \cdots & -\dfrac{k_b}{m_b}y_n\end{bmatrix}_{2\times n},$$

$$\boldsymbol{A}_{42}=\begin{bmatrix}-\dfrac{k_t}{m_t} & 0\\ -\dfrac{k_t}{m_b} & -\dfrac{k_b}{m_b}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_{43}=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0\\ -\dfrac{c_b}{m_b}y_1 & \cdots & -\dfrac{c_b}{m_b}y_n\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_{44}=\begin{bmatrix}-\dfrac{c_t}{m_t} & \dfrac{c_t}{m_t}\\ \dfrac{c_t}{m_b} & -\dfrac{c_t+c_b}{m_b}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_1\\ \boldsymbol{B}_2\\ \boldsymbol{B}_3\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{0}_{(n+2)\times 2},\quad \boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix}0 & -y_1\\ \vdots & \vdots\\ 0 & -y_n\end{bmatrix}_{n\times 2},$$

$$\boldsymbol{B}_3=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{m_t} & 0\\ -\dfrac{1}{m_b} & \dfrac{1}{m_b}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}_1\\ \boldsymbol{H}_2\\ \boldsymbol{H}_3\end{bmatrix},\ H_1=\boldsymbol{0}_{(n+1)\times 1},$$

$$\boldsymbol{H}_2=\begin{bmatrix}-1\ c_b y_1 & \cdots & c_b y_n\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{H}_3=\begin{bmatrix}0 & \dfrac{c_b}{m_b}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{F}_1\\ \boldsymbol{F}_2\\ \boldsymbol{F}_3\end{bmatrix},\ \boldsymbol{F}_1=\boldsymbol{0}_{(n+2)\times 1},$$

$$\boldsymbol{F}_2=(m_t+m_b)g\begin{bmatrix}y_1 & \cdots & y_n\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{F}_3=\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}$$

本文中采用滤过白噪声生成随机路面不平顺[4]，可表示如下

$$\dot{r}=-2\pi n_{00}vr+2\pi n_0\sqrt{G_q(n_0)v}\,w(t) \tag{9}$$

式中：n_{00} 为下截止空间频率，$n_{00}=0.011\mathrm{m}^{-1}$；$n_0$ 为参考空间频率，$n_0=0.1\mathrm{m}^{-1}$；$G_q(n_0)$ 为路面不平整系数，本文取 C 级路面 $G_q(n_0)=256\times10^{-6}\,\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{cycle}^{-1}$。

由此可令系统状态变量为 $\boldsymbol{z}_r$，且状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{z}}_r=\boldsymbol{A}_r\boldsymbol{z}_r+\boldsymbol{B}_r\boldsymbol{u}+\boldsymbol{H}_r w(t)+\boldsymbol{F}_r \tag{10}$$

其中

$$\boldsymbol{z}_r=\begin{bmatrix}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{r}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{A}_r=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & -2\pi n_0 v\boldsymbol{H}\\ \boldsymbol{0}_{1\times n} & -2\pi n_0 v\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_r=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{0}_{1\times 2}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{H}_r=2\pi n_0\sqrt{G_q(n_0)v}\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}\\ 1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{F}_r=\begin{bmatrix}F\\ 0\end{bmatrix}$$

3　最优输出调节器[1]

由随机最优输出调节器理论可知，需建立系统最优输出。本文以桥梁跨中动挠度、车体竖向位移、车架竖向位移为输出，有

$$f_1=Y,\ f_2=y_t,\ f_3=y_b \tag{11}$$

其中 f_1、f_2、f_3 为输出。系统输出方程表示为矩阵形式

$$\boldsymbol{f}=[f_1\quad f_2\quad f_3]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{z}_r$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}[y_1\ \cdots\ y_n] & 0 & 0 & \boldsymbol{0}_{1\times n} & 0 & 0 & 0\\ \boldsymbol{0}_{1\times n} & 1 & 0 & \boldsymbol{0}_{1\times n} & 0 & 0 & 0\\ \boldsymbol{0}_{1\times n} & 0 & 1 & \boldsymbol{0}_{1\times n} & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{12}$$

考虑最优输出调节器问题，令最优控制 $\boldsymbol{u}=[u_1\quad u_2]^{\mathrm{T}}$，使如下性能指标为极小

$$J=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{f}(t)+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}(t)\boldsymbol{u}(t)]\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(t_f)\boldsymbol{S}_f\boldsymbol{f}(t_f) \tag{13}$$

式中：$\boldsymbol{S}_f$、$\boldsymbol{Q}(t)$ 为对称非负定矩阵；$\boldsymbol{R}(t)$ 为对称

正定矩阵。由此可得最优控制律

$$\boldsymbol{u}(t)=-\boldsymbol{K}(t)\boldsymbol{z}_r \tag{14}$$

其中 $K(t)=\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}(t)$。

式（14）中 $\boldsymbol{S}(t)$ 满足下列时变Riccati矩阵微分方程

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{S}}(t)=&-\boldsymbol{S}(t)\boldsymbol{A}_r(t)-\boldsymbol{A}_r^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{S}(t)+\\&\boldsymbol{S}(t)\boldsymbol{B}_r(t)\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}_r^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{S}(t)-\bar{\boldsymbol{Q}}(t)\quad,\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{S}(t_f)=\bar{\boldsymbol{S}}_f \tag{15}$$

其中

$\bar{\boldsymbol{Q}}(t)=\boldsymbol{C}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{C}(t)$，$\bar{\boldsymbol{S}}_f=\boldsymbol{C}(t_f)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_f\boldsymbol{C}(t_f)$

公式(8)输出方差满足以下方程

$$\dot{P}_{z_r}=\boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{P}_{z_r}+\boldsymbol{P}_{z_r}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}(t)+\boldsymbol{G}(t)\boldsymbol{W}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(t),$$

$$\boldsymbol{P}_{z_r}(0)=\boldsymbol{P}_{z_{r0}} \tag{16}$$

式中：$\boldsymbol{D}(t)=\boldsymbol{A}_r(t)-\boldsymbol{B}_r(t)\boldsymbol{R}^{-1}(t)\boldsymbol{B}_r^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{S}(t)$；

$\boldsymbol{G}(t)=\boldsymbol{H}(t)$；$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{G}_q(n_0)$ 为白噪声$w(t)$的强度。

由式（12）可知系统输出方差阵为

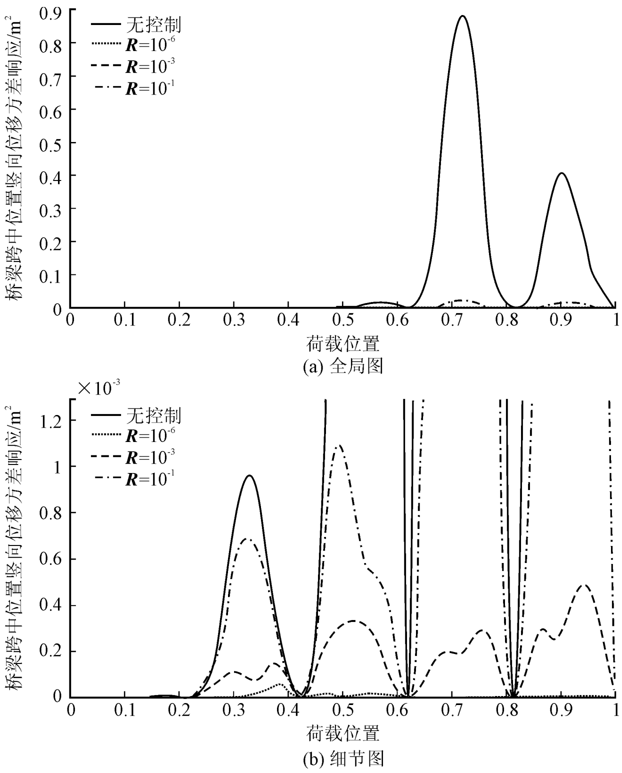
$$\dot{\boldsymbol{P}}_f=\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{P}}_z\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \tag{17}$$

4 算 例

桥梁参数[5]：L=24m；m=9360kg/m；EI=2.05×10^{10}N·m^2。车辆参数：m_t=8660kg；m_b=38500kg；k_t=8.56×10^{4}N/m；k_b=5.07×10^4 N/m；c_t=1.96×10^{3}N/m；c_b=3.82×10^{3}N/m。算例中取车辆运行规律$\varepsilon(t)=vt$ 为匀速运动，取权矩阵 $\boldsymbol{Q}$=1×10^{10}，$\boldsymbol{S}_f$=100。应用数值积分Runge-Kutta 法进行计算分析。

4.1 考虑权矩阵 R 对系统竖向位移方差响应的影响

取车速 v=25m/s，考察权矩阵 $\boldsymbol{R}$ 对系统竖向位移方差响应的影响。图2~图4分别为桥梁跨中位置、车体和车架竖向位移方差响应受权矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的影响。由图可见：随着 $\boldsymbol{R}$ 的增大，系统方差响应减小，控制效果越明显。



(a) 全局图

(b) 细节图

图 2 桥梁跨中竖向位移方差响应受权矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的影响

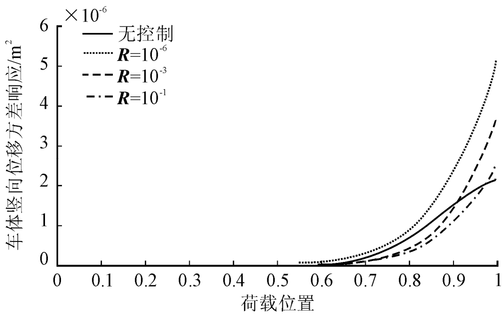


图 3 车体竖向位移方差响应受权矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的影响

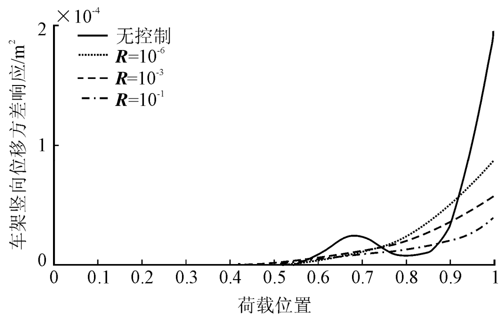


图 4 车架竖向位移方差响应受权矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的影响

4.2 考虑权矩阵 R 对最优控制律 u 最大方差的影响

取车速 v=25m/s，考察权矩阵 $\boldsymbol{R}$ 对最优控制律 u 最大方差的影响。图 5 为最优控制律 u 最大方差

受权矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的影响对数图，图中纵坐标为最优控制律最大方差 Pu 对数值。由图 5 可见，随着 $\boldsymbol{R}$ 的增大，最优控制律 u 最大方差减小。本文取加权 $\boldsymbol{R}$=0.1，对系统进行分析，最优控制律在物理可实现范围内。

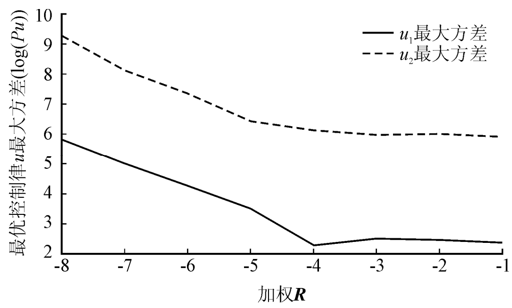


图 5　最优控制律 u 最大方差受权矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的影响对数图

4.3　取加权 R 为 0.1 时考察车速对系统最大竖向位移方差响应的影响

图 6~图 8 分别为车速对桥梁跨中位置、车体和车架竖向位移方差响应影响曲线图。由图可见：①随车速增大，系统竖向位移方差响应减小（LQG 控制下桥梁跨中位置竖向位移方差响应出现波动，且为随车速增大而增大趋势）；②由系统在无控制和 LQG 控制下的各响应的对比可见，LQG 控制效果很明显。

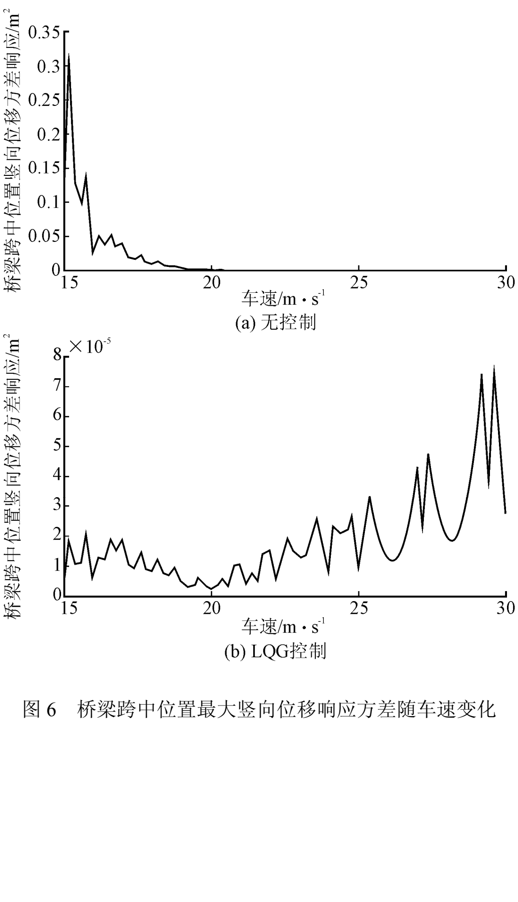


图 6　桥梁跨中位置最大竖向位移响应方差随车速变化

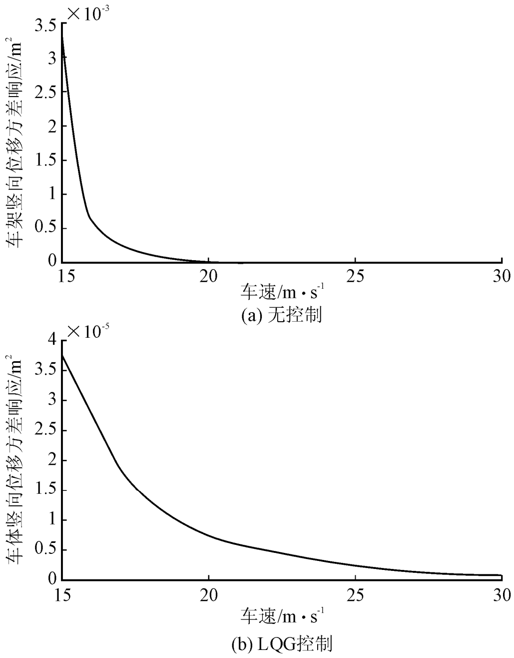


图 7　车体最大竖向位移方差响应

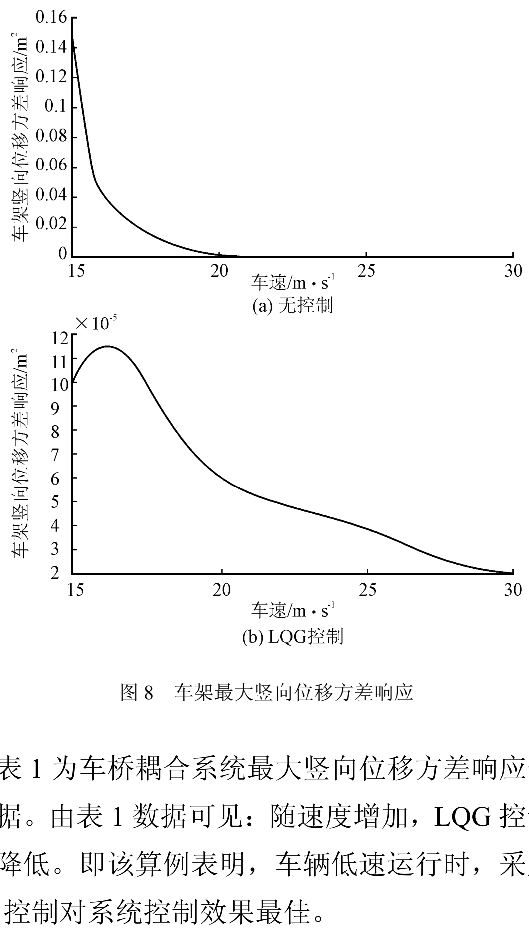


图 8　车架最大竖向位移方差响应

表 1 为车桥耦合系统最大竖向位移方差响应部分数据。由表 1 数据可见：随速度增加，LQG 控制效果降低。即该算例表明，车辆低速运行时，采用 LQG 控制对系统控制效果最佳。

表 1 系统最大竖向位移方差响应控制效果

车速/$\mathrm{m\cdot s^{-1}}$	最大竖向位移方差响应/$\mathrm{m^2}$								
	桥梁跨中位置			车体质量			车架质量		
	LQG控制	无控制	减少量	LQG控制	无控制	减少量	LQG控制	无控制	减少量
30	2.5212×10^{-5}	2.6141×10^{-4}	90.36%	9.9740×10^{-7}	7.9969×10^{-7}	-24.72%	2.0135×10^{-5}	1.5925×10^{-4}	87.36%
25	8.9796×10^{-6}	1.1904×10^{-4}	92.46%	2.5217×10^{-6}	2.1206×10^{-6}	-18.91%	3.7619×10^{-5}	1.9515×10^{-4}	80.72%
20	2.6952×10^{-6}	5.7951×10^{-4}	99.53%	7.9601×10^{-6}	2.6898×10^{-5}	70.41%	5.8962×10^{-5}	1.7983×10^{-3}	96.72%
15	4.7202×10^{-6}	1.0723×10^{-1}	99.99%	3.7372×10^{-5}	3.3190×10^{-3}	98.87%	9.9217×10^{-5}	1.4890×10^{-1}	99.93%

5 结束语

本文将随机最优输出调节器理论应用于车辆-桥梁耦合系统竖向减振控制，其难度之一在于求解时变 Riccati 微分方程，且车桥耦合系统为包含随机因素的时变系统；算例分析表明：采用随机最优控制的系统竖向位移响应方差较无控制情况减小量达 90%。该控制方法的应用可大大降低系统竖向位移响应方差，有效提高车辆行驶平稳性和舒适性。

参 考 文 献

[1] 胡寿松，王执铨，胡维礼．最优控制理论与系统[M]．2 版．北京:科学出版社，2005：297-310．

[2] 宋娟，熊冶平，王锡平.移动荷载下桥梁的振动主动控制[J]．振动工程学报，2001，14（s）：83-85．

[3] 宋刚，谭述君，林家浩.基于保辛摄动的车桥耦合系统时变 LQG 控制[C]//第九届全国震动理论及应用学术会议论文集，2007，296-305．

[4] 陈杰平，陈无畏，祝辉，等．基于 Matlab/Simulink 的随机路面建模与不平度仿真[J]．农业机械学报，2010，41（3）：11-15．

[5] 王贵春，潘家英．轨道不平顺导致的车桥耦合振动分析[J]．铁道工程学报，2006，8：30-33．