

各向异性矩形板的剪切屈曲分析

杨端生¹ 黄炎² 李广利²

(长沙理工大学 410114 长沙)¹ (国防科技大学 410073 长沙)²

摘要: 根据各向异性矩形薄板剪切屈曲横向位移函数的微分方程建立了一般性的解析解。该一般解包括三角函数和双曲线函数组成的解, 它能满足四个边为任意边界条件的问题; 该一般解还包括代数多项式解, 它能满足四个角的边界条件问题。因此, 这一解析解可用于精确地求解任意边界的各向异性矩形板的剪切屈曲问题。其中待定常数可由四边和四角的边界条件来确定, 由此得出的齐次线性代数方程系数矩阵行列式等于零可以求得各阶临界载荷及其屈型。结合配点法, 利用变形的对称和反对称性, 以及对称迭层正方形板均可使计算更简单。以四边平夹的对称角铺设复合材料迭层板为例进行了计算和讨论。

关键词: 各向异性板; 稳定性; 一般解析解法; 临界载荷; 剪切屈曲
中图分类号: O343.9 **文献标识码:** A

1 引言

对称迭层角铺设复合材料板为各向异性板, 已广泛应用于航空、航天、土木、化学工程领域。目前, 可以用各种解析和数值的方法来研究不同边界的各向异性矩形板的振动和屈曲问题^[1-6]。文献[7]用解析解法求解了各向同性板剪切屈曲的临界载荷问题。文献[8]~[9]采用一般解析解法求解了各种不同边界条件各向同性和正交异性矩形板的稳定性问题。文献[10]~[11]采用一般解析解法求解了各向同性和各向异性矩形板的自由振动问题。首先求出偏微分方程所有类型的特解, 然后选取一个能满足任意不同边界的一般解。本文仍采用这一方法来研究各向异性矩形板的剪切屈曲问题以得出其一般解析解。

2 微分方程的解

各向异性矩形薄板(见图1)剪切屈曲位移函数的微分方程为^[12]

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2t \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \quad (1)$$

式中: w 为板的挠度; D_{11} 、 D_{12} 、 D_{16} 、 D_{22} 、 D_{26} 、 D_{66} 为挠曲刚度系数; t 为切向力。设

$$w = e^{i\alpha x} e^{i\alpha' y}$$

或

$$w = e^{-i\alpha x} e^{-i\alpha' y} \quad (2)$$

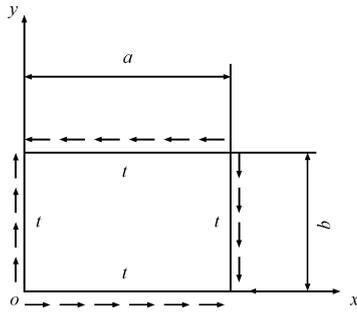


图1 板的坐标系

式中: $i = \sqrt{-1}$; $\alpha = m\pi/a (m=1,2,3,\dots,M)$ 。将上式代入式(1)可得

$$D_{22}\alpha'^4 + 4D_{26}\alpha\alpha'^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\alpha'^2 + (4D_{16}\alpha^2 - 2T)\alpha\alpha' + D_{11}\alpha^4 = 0 \quad (3)$$

当 $m < M_0$ 、 $\alpha' = \alpha_1 \pm i\alpha_2$ 、 $\alpha' = \alpha_3 + \alpha_4$ 时, 令: $\alpha_3' = \alpha_3 + \alpha_4$; $\alpha_4' = \alpha_3 - \alpha_4$, 故有

$$\alpha_3 = (\alpha_3' + \alpha_4') / 2, \alpha_4 = (\alpha_3' - \alpha_4') / 2 \quad (4)$$

由此可得

$$w = e^{i(\alpha x + \alpha_1 y)} e^{\pm \alpha_2 y}, \quad w = e^{i(\alpha x + \alpha_3 y)} e^{\pm i\alpha_4 y}$$

或

$$w = e^{-i(\alpha x + \alpha_1 y)} e^{\pm \alpha_2 y}, \quad w = e^{-i(\alpha x + \alpha_3 y)} e^{\pm i\alpha_4 y} \quad (5)$$

式(5)的解可用三角函数和双曲线函数表示为

$$w = [A \sin(\alpha x + \alpha_1 y) + B \cos(\alpha x + \alpha_1 y)] \cdot (C \sinh \alpha_2 y + D \cosh \alpha_2 y) + [E \sin(\alpha x + \alpha_3 y) + F \cos(\alpha x + \alpha_3 y)] \cdot (G \sin \alpha_4 y + H \cos \alpha_4 y) \quad (6)$$

当 $m > M_0$ 、 $\alpha' = \alpha_1 \pm i\alpha_2$ 、 $\alpha' = \alpha_3 \pm i\alpha_4$ 时, 同样可设

$$w = e^{i\beta y} e^{i\beta' x}, \quad w = e^{-i\beta y} e^{-i\beta' x} \quad (7)$$

式中 $\beta = n\pi/b (n=1,2,3,\dots,N)$, 可得另一类与以上相似的解。此外, 还有代数多项式解

$$w_1 = a_{00}(1-\zeta)(1-\eta) + a_{01}(1-\zeta)\eta + a_{10}\zeta(1-\eta) + a_{11}\zeta\eta \quad (8)$$

式中: $\zeta = \frac{x}{a}$; $\eta = \frac{y}{b}$ 。

3 一般解的建立

求解满足四边和四角为任意边界条件的各向异性矩形板的剪切屈曲问题, 本文建议的一般解取下列形式。

$$w = \sum_m \{A_m \sin[\alpha(a-x) + \alpha_1(b-y)] \sinh \alpha_2 y + B_m \sin(ax + \alpha_1 y) \sinh \alpha_2(b-y)\} / \sinh \alpha_2 b + \sum_{m < M_0} \{C_m \sin[\alpha(a-x) + \alpha_3(b-y)] \sin \alpha_4 y + D_m \sin(\alpha x + \alpha_3 y) \sin \alpha_4(b-y)\} / \sin \alpha_4 b + \sum_{m > M_0} \{C_m \sin[\alpha(a-x) + \alpha_3(b-y)] \sinh \alpha_4 y + D_m \sin(\alpha x + \alpha_3 y) \sinh \alpha_4(b-y)\} / \sinh \alpha_4 b + \sum_n \{E_n \sin[\beta(b-y) + \beta_1(a-x)] \sinh \beta_2 x + F_n \sin(\beta y + \beta_1 x) \sinh \beta_2(a-x)\} / \sinh \beta_2 a + \sum_{n < N_0} \{G_n \sin[\beta(b-y) + \beta_3(a-x)] \sin \beta_4 x + H_n \sin(\beta y + \beta_3 x) \sin \beta_4(a-x)\} / \sin \beta_4 a + \sum_{n > N_0} \{G_n \sin[\beta(b-y) + \beta_3(a-x)] \sinh \beta_4 x + H_n \sin(\beta y + \beta_3 x) \sinh \beta_4(a-x)\} / \sinh \beta_4 a + w_1 \quad (9)$$

式中共有 $4M + 4N + 4$ 个待定常数, 其中: 第一部分能满足 $y=0$ 和 $y=b$ 两个边界的边界条件; 第二部分能满足 $x=0$ 和 $x=a$ 两个边的边界条件; 第三部分能满足四个角的边界条件。对于每个边来说, 有两个边界条件即挠度或等效剪力和斜度或弯矩应等于边界的已知值, 采用配点法^[13], 将 $y=0$ 和 $y=b$ 两个边等分为 M 段。令配点的位置 $x = (i-0.5)a/M$ (其中 $i=1,2,3,\dots,M$), 可得 $2 \times 2M$ 个方程式。将 $x=0$ 和 $x=a$ 两个边等分为 N 段, 令 $y = (j-0.5)b/N$, (其中 $j=1,2,3,\dots,N$) 可得

$2 \times 2N$ 个方程式。通常取 $M/N = a/b$ 。对于每个角则有一个边界条件即挠度或反力应等于角点的已知值，故又有 4 个方程式。令所有方程式待定常数的系数矩阵行列式等于零可以求得临界载荷及其屈型。

4 算例

以四边平夹的板为例，四边和四角的边界条件为

$$w|_{x=0} = 0, w|_{x=a} = 0, w|_{y=0}, w|_{y=b} \quad (10)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}|_{x=0} = 0, \frac{\partial w}{\partial x}|_{x=a} = 0, \frac{\partial w}{\partial y}|_{y=0} = 0, \frac{\partial w}{\partial y}|_{y=b} = 0 \quad (11)$$

$$w_{(0,0)} = 0, w_{(a,b)} = 0, w_{(0,b)} = 0, w_{(a,0)} = 0 \quad (12)$$

如果利用变形的对称或反对称条件将使求解稳定问题更加简化。对于各向异性矩形板来说^[11]，两对边的变形与板的中心为对称或反对称时，两对边和两对角的边界条件是相同的，即式(10)、式(11)、式(12)的第二式和第四式可不应用，且

$$B_m = \pm A_m, D_m = \pm C_m, F_n = \pm E_n, H_n = \pm G_n \quad (13)$$

$$a_{11} = \pm a_{00}, a_{10} = \pm a_{01}$$

正负号同时书写时，正号为对称屈型，负号为反对称屈型。

将式(8)代入式(9)，然后代入以上各式，首先由式(12)的前二式可得

$$a_{00} = a_{01} = 0 \quad (14)$$

由式(10)和式(11)的第一式，可得

$$\sum_m [A_m \cos m\pi \sin \alpha_1 (b-y) \sinh \alpha_2 y + B_m \sin \alpha_1 y \sinh \alpha_2 (b-y)] / \sinh \alpha_2 b + \sum_{m < M_0} [C_m \cos m\pi \sin \alpha_3 (b-y) \sin \alpha_4 y + D_m \sin \alpha_3 y \sin \alpha_4 (b-y)] / \sin \alpha_4 b + \sum_{m > M_0} [C_m \cos m\pi \sin \alpha_3 (b-y) \sinh \alpha_4 y + D_m \sin \alpha_3 y \sinh \alpha_4 (b-y)] / \sinh \alpha_4 b + \sum_n (F_n + H_n) \sin \beta y = 0 \quad (15)$$

$$\sum_m [A_m \cos m\pi \cos \alpha_1 (b-y) \sinh \alpha_2 y - B_m \cos \alpha_1 y \sinh \alpha_2 (b-y)] \alpha / \sinh \alpha_2 b + \sum_{m < M_0} [C_m \cos m\pi \cos \alpha_3 (b-y) \sin \alpha_4 y - D_m \cos \alpha_3 y \sin \alpha_4 (b-y)] \alpha / \sin \alpha_4 b + \sum_{m > M_0} [C_m \cos m\pi \cos \alpha_3 (b-y) \sinh \alpha_4 y - D_m \cos \alpha_3 y \sinh \alpha_4 (b-y)] \alpha / \sinh \alpha_4 b - \sum_n [(E_n \beta_2 \cos n\pi \sin(\beta_1 a - \beta y) / \sinh \beta_2 a + F_n (\beta_1 \cos \beta y - \beta_2 \coth \beta_2 a \sin \beta y))] - \sum_{n < N_0} G_n \beta_4 \cos n\pi \sin(\beta_3 a - \beta y) / \sin \beta_4 a + H_n (\beta_3 \cos \beta y - \beta_4 \coth \beta_4 a \sin \beta y)] - \sum_{n > N_0} G_n \beta_4 \cos n\pi \sin(\beta_3 a - \beta y) / \sinh \beta_4 a + H_n (\beta_3 \cos \beta y - \beta_4 \coth \beta_4 a \sin \beta y)] = 0 \quad (16)$$

式中 $y = (j-0.5)b/N$ (这里 $j=1,2,3,\dots,N$)。

采用石墨/环氧制成的对称迭层角铺设 $45^\circ/-45^\circ/-45^\circ/45^\circ$ 复合材料迭层正方形板^[12]，泊桑比 $\nu_{12} = 0.25$ 、杨氏模量 $G_{12} = 0.5E_2$ 、 $E_1 = 40E_2$ ，故有 $D_{22} = D_{11}$ 、 $D_{12} = 0.9082D_{11}$ 、 $D_{16} = D_{26} = 0.6724D_{11}$ 、 $D_{66} = 0.9341D_{11}$ 、 $a = b$ ，此时变形将对称或反对称于对角线 $x = y$ ，故又有 $E_n = \pm A_n$ 、 $G_n = \pm C_n$ 。式(10)和式(11)的第三式将不应用。仅由以上两个方程式经过无量纲化即可求得临界载荷参数 T 及屈型。取 M 和 N 为 16 时，求得各种类型的前四阶临界载荷见表 1 ($T = a\sqrt{t/D_{11}}/\pi$)，相应的曲型等高线图见图 2。图 2 的解答是由自编 C++ 语言程序计算出结果，输出数据文件保存为 ANSYS 的格式，利用 ANSYS 的后处理功能绘图而成。边界上均匀配点，个数为 4×16 。

$$T_{11}: B_m = A_m, D_m = C_m, F_n = E_n = A_n, H_n = G_n = C_n$$

$$T_{12}: B_m = -A_m, D_m = -C_m, F_n = -E_n = -A_n, H_n = -G_n = -C_n$$

$$T_{21}: B_m = -A_m, D_m = -C_m, F_n = -E_n = A_n, H_n = -G_n = C_n$$

$$T_{22}: B_m = A_m, D_m = C_m, F_n = E_n = -A_n, H_n = G_n = -C_n$$

由图 2 可以看出所有屈型对 $x = y$ 和

$x + y = a$ 两对角线对称或反对称, 而对 $x = a/2$ 和 $y = b/2$ 不对称。这是因为本例题的材料恰好是以正方形对角线 $x = y$ 和 $x + y = a$ 为主轴的正交异性板的缘故。由表 1 可以看出各阶 T_{21} 的值均大于 T_{12} 相应的值。这是因为沿对角线 $x = y$ 的弯曲刚度大于沿 $x + y = a$ 的弯曲刚度的缘故^[11]。

表 1 各种屈型的前四阶临界载荷的 T 值

阶数	T_{11}	T_{12}	T_{21}	T_{22}
1	5.614	6.925	7.132	7.452
2	11.927	12.236	12.726	12.935
3	22.456	23.236	23.784	24.216
4	30.619	31.235	32.102	32.847

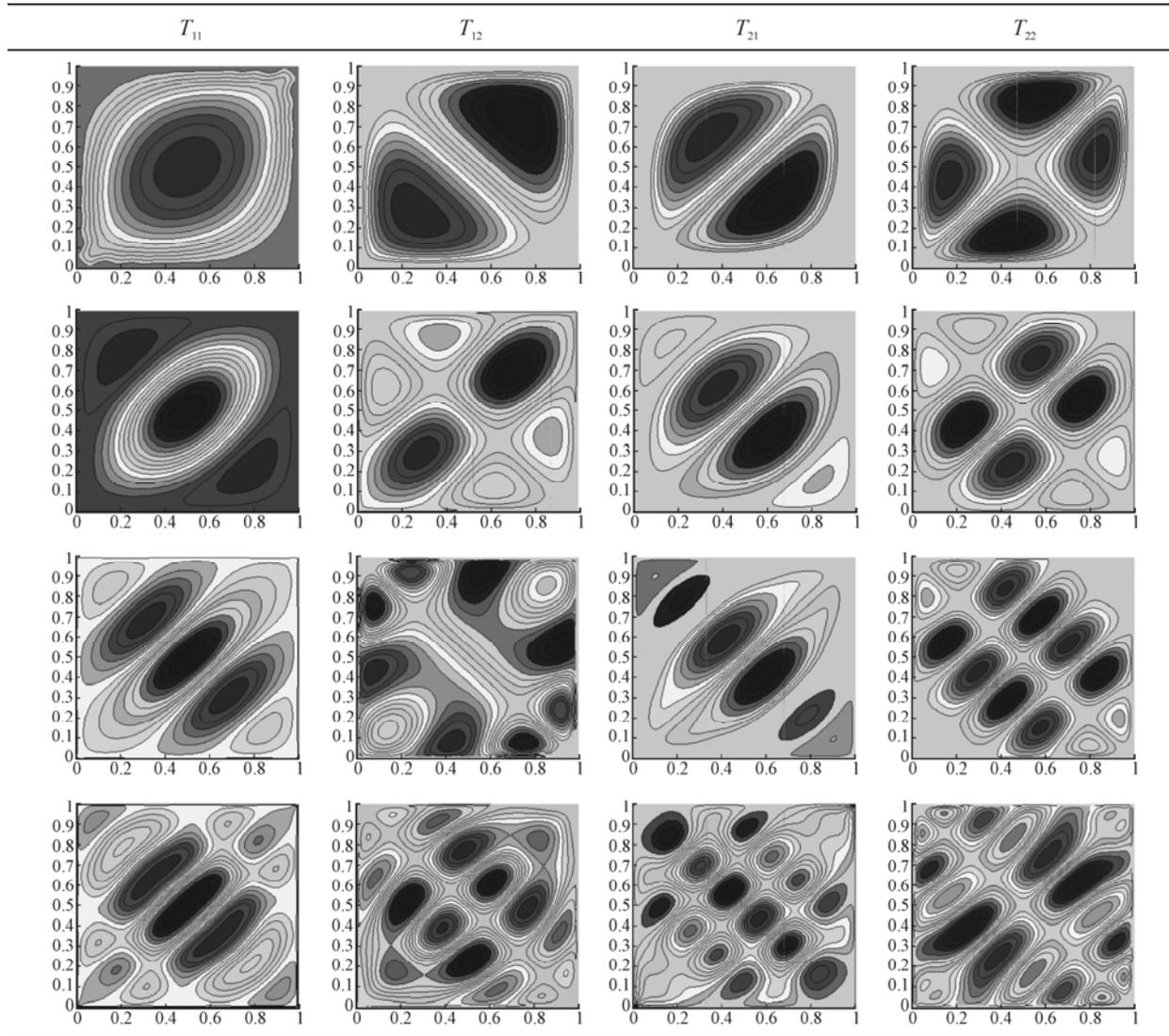


图 2 各种屈型的前四阶临界载荷等高线图

5 讨论和结论

各向异性矩形薄板的剪切屈曲问题和自由振动问题的微分方程相差无几, 因而许多内容是相同的。文献[11]中的 M_0 、 N_0 、 α' 与本文是相同的。 M_0 和 N_0 是 1, 2, 3, ..., M 中的一个值, 具体

由边界情况来定。这些值不能由数学公式显示出来(各向同性或正交异性则可以^[8-10]), 而是由计算机算出。文献[11]将 M_0 、 N_0 写成 M 、 N 是印刷书写错误。另外本文将两个实根 α_3' 、 α_4' 变换成两者和、差形式, 使一般解适用有效。在算例中, 由于角点的挠度变为零, 使 $a_{00} = a_{01} = 0$, 大大地简化了计算。

用解析解来求解弹性矩形薄板的各类力学问题,起初只有迭加法,随后有一般解析解法。在求解边界条件方程式时,一般将其中的非正弦函数展开成正弦级数。近年来包括本文改用配点法,即可免除寻求所需的正弦级数公式,又使求解算式大大简化,如本文的式(15)和式(16)比文献[11]的式(22)和式(23)简单了很多。

本文的解能满足边界条件和基本方程,因此它是解析解。本文用一般解析解法结合配点法求解了各向异性矩形板的剪切屈曲问题,求解过程为:①根据各向异性矩形薄板的屈曲位移函数的微分方程求出各种类型的特解;②建立满足四边和四角为任意边界条件的一般解;③写出算例四边和四角的边界条件;④将一般解分别代入全部条件方程式,采用配点法,令全部条件方程式待定常数的系数矩阵行列式等于零,即可求得各阶临界载荷和屈型;⑤利用变形的对称和反对称条件可以使求解大大得到简化,如本文算例。

本文精确地建立了一般解析解,可用以求解任意边界各向异性矩形板的剪切屈曲问题。利用变形的对称和反对称条件将使求解稳定问题大大简化,尤其是本文算例的正方形板。本文的理论分析简单,计算方法容易,便于工程应用。

参 考 文 献

- [1] Dave D J, Craig T J. The vibration and stability of symmetrically laminated rectangular plate subjected to in-plane stresses[J]. *Composite Structures*, 1986, 11(5): 281-307.
- [2] Palardy R F, Palazotto A N. Buckling and vibration of composite plates using the levy method[J]. *Composite structures*, 1990, 14(1): 61-68.
- [3] Sherbourne A N, Pandey M D. Differential quadrature method in the buckling analysis of beams and composite plates[J]. *Computers and Structures*, 1991, 40(3): 903-913.
- [4] Hu H R, Badir A R, Abutan A. Bucking behavior of a graphite/epoxy composite plate under parabolic variation of axial loads[J]. *International Journal of Mechanical Science*, 2003, 45(6):1135-1147.
- [5] Nemeth M P. Bucking of long compression-loaded anisotropic plates restrained against in plane lateral and shear deformations [J]. *Thin-Walled Structures*, 2004,42(5):639-685.
- [6] 熊渊博, 龙述尧. 局部彼得洛夫-伽辽金法分析各向异性板屈曲[J]. *力学与实践*, 2005,2(27):50-53.
- [7] Timoshenko S, Gere J. *Theory of elastic stability*[M]. 2nd ed. New York: McGraw-Hill,1961.
- [8] 黄炎. 矩形薄板弹性稳定的一般解[J]. *力学季刊*, 1988, 9 (4): 43-50.
- [9] 杨端生, 廖瑛, 黄炎. 正交异性矩形薄板的稳定性分析[J]. *工程力学*, 2002, 19 (3): 55-58.
- [10] Huang Y. A general analytical solution for elastic vibration of rectangular plates[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1988, 9(11):1057-1065.
- [11] Huang Y, Lei Y J, Shen H J. Free vibration of anisotropic rectangular plates by general analytical method[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2006,27(4):461-467.
- [12] Reddy J N. *Mechanics of laminated composite plate and shells*[M]. Boca Raton, FL: CRC Press, 2004.
- [13] Sun W M, Yang G S, Li D X. Exact analysis of wave propagation in an infinite rectangular beam[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2004, 25(7): 701-710.