

# 基于应力分析的桁架结构双向拓扑优化方法

何林伟 蔡国平

(上海交通大学工程力学系海洋工程国家重点实验室 200240 上海)

**摘要:** 结构拓扑优化问题的研究多是采用基结构的思路, 通过删除在设计区域内的不必要单元来得到结构的最优拓扑构型。本文探索了一种增加单元与删除单元相结合的双向拓扑优化方法, 采用了网格与杆件两类单元对桁架进行分析: 在高应力杆件单元周围生成新网格单元, 并且删除低应力的杆单元, 结构逐渐进化, 从而得到优化的拓扑构型。文章最后通过数值算例, 表明该方法是可行的。

**关键词:** 桁架结构; 双向拓扑优化; 应力  
**中图分类号:** O342      **文献标识码:** A

## 1 引 言

结构优化对于实际工程具有重要意义, 如何能在满足性能要求的前提下设计出尽可能合理、先进、经济的结构已经成为机械、船舶海洋、航空航天等工程领域的重要研究课题。传统的靠设计人员经验和模型试验结果来调整结构设计参数的方法已经不能满足实际工程的需要, 必须采用优化的方法来获得结构的优化拓扑构型。

桁架结构拓扑优化是在已知外力、支撑情况的条件下, 确定桁架中杆件的连接形式及杆件截面积, 使结构的某种性能指标最优(如结构重量最轻), 同时满足应力等结构性能要求。其主要困难在于桁架的节点可以取设计区域内任何点, 结构的拓扑形式无法定量描述, 从而给优化计算带来很大困难。为了克服此困难, 一般利用基结构: 先设定结构中一系列可能的节点位置并用杆件连

接这些节点及支座, 把杆件的截面面积作为设计变量进行优化迭代计算; 在迭代过程中, 如果某杆件的截面面积足够小, 就将其从结构中删除, 从而得到优化的结构。文献[1]~[2]成功地求解了桁架的一系列优化问题, 提出并解决了在桁架拓扑优化中遇到的奇异最优解问题。然而在优化计算前, 可能的节点位置很难确定。对于一些问题, 为了保证优化的效果, 在基结构中选取的可能节点一般较多, 从而导致杆件的连接情况复杂、变量的数目也随之迅速增加。很多研究工作都将节点位置作为已知条件, 即在可能节点确定的情况下进行拓扑优化计算。这种优化思路往往是单向优化, 即优化的过程是不断删除杆件与节点, 而未考虑新杆件, 尤其是新节点的添加。

文献[3]提出了一种针对桁架结构的结合单元增加与删除的拓扑优化方法。该方法在迭代中可以增加或删除 6 杆铰接的框架结构(同下文中的网格单元)。但该方法没有对单独的杆件进行

删除与增加,其基本单元为框架结构,因而该方法可看作是对连续体结构的拓扑优化。为了探讨桁架结构拓扑优化计算中添加新杆件、新节点的一些方法,本文参考 BESO (Bi-Directional Evolutionary Structural Optimization)等一些针对连续体结构拓扑优化中的双向优化策略<sup>[4-6]</sup>、参照文献[3]介绍的优化方法,探索了一种针对桁架结构的双向优化方法。该方法包含了单元的删除与增加策略,以实现桁架结构中新节点与新杆件的生成。

## 2 优化方法

本文的结构采用连续体和离散体结合的形式。以图1所示桁架结构为例:方形网格定义为网格单元,亦即连续体单元,由6根杆件铰接而成;组成网格单元的杆件定义为杆单元,亦即离散体单元。单元的生长是以连续体单元为基本单位,即生长出新网格,而单元的删除是以离散体单元为基本单位,即删除杆件。定义结构的生长方向为结构外表面背离结构的法线方向,即外法线方向(如图1“生长方向”中的虚线箭头所示)。可以看出结构外表面由杆件组成,于是把生长方向所在的外表面杆件标记为生长关联杆单元。

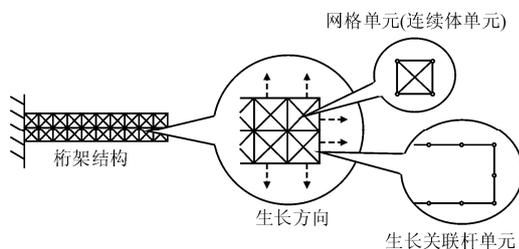


图1 桁架结构示意图

本文中采用逐步迭代的方式使结构逐步进化,为方便描述,作如下定义

$$T_{k+1} = T_k + \nabla T_k, \quad T_{k+1} \in \Omega \quad (1)$$

其中:  $T_k$  为第  $k$  阶拓扑构型;  $\Omega$  为结构约束条件;  $\nabla T_k$  是第  $k$  次迭代中结构的进化方向,包含单元的增加与删除。可以看出,  $\nabla T_k$  的确定是结构进化的核心。本文参考连续体拓扑优化方法 ESO 中关于准则优化的理论<sup>[7-8]</sup>,根据结构应力一致的准则确定  $\nabla T_k$ 。通过在高应力杆单元周围增加网格单元以减小结构中最大应力,同时删除应力较小的杆单元,使结构中的应力分布趋于均匀,从而使结构的拓扑

构型具有优化的应力分布。其具体的确定过程如下。

首先,对结构进行分析,得出所有杆单元的应力大小并按应力值大小对杆单元进行排序。在所有杆单元中应力较大的  $\gamma_{\text{sup}}\%$  的杆单元被标记为生长状态,应力较小的  $\gamma_{\text{des}}\%$  的杆单元被标记为削弱状态;剩下的杆单元被标记为强化状态;需要指出,本文中所介绍的算法为启发式算法,  $\gamma_{\text{sup}}$  与  $\gamma_{\text{des}}$  的选取并无严格的数学公式推导,无法得出精确的数值。考虑到在计算中杆单元增加与删除的平衡,有效的  $\gamma_{\text{sup}}$  与  $\gamma_{\text{des}}$  应为两个较小的并且相差不大的数值。若  $\gamma_{\text{sup}}$  过大(大于或等于 50),则结构生长过剩,导致冗余的杆单元增多(如图 2(b)中:  $\gamma_{\text{sup}}=90$ ,  $\gamma_{\text{des}}=10$ );若  $\gamma_{\text{des}}$  取值过大,计算中结构的变化很大,计算很难收敛(如图 2(c)中:  $\gamma_{\text{sup}}=50$ ,  $\gamma_{\text{des}}=50$ )。本文中,  $\gamma_{\text{sup}}$ 、 $\gamma_{\text{des}}$  分别取为 20、30,即在结构中有 20% 的杆单元被标记为生长状态,30% 的杆单元被标记为削弱状态,剩下的 50% 的杆单元被标记为强化状态(如图 2(c)所示)。

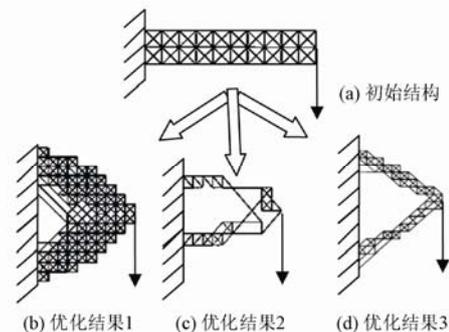


图2 参数的选取对结果的影响

其次,根据杆单元标记的不同状态进行不同的处理。对于标记为强化状态的杆单元,进行强化处理:通过该杆单元获得其所在的网格单元信息,恢复该网格单元的所有杆单元。即如果该网格单元中有些杆单元已经删除,那么恢复这些杆单元(如果该杆单元是两个网格单元共用的,则恢复这两个网格单元中所有杆单元);对于标记为生长状态的杆单元,先进行上述的强化处理。如果该杆单元同时是生长关联杆单元,则获得其生长方向,并在其生长方向上生成新的网格单元;对于所有标记为削弱状态的杆单元  $i(i=1,2,\dots)$  进行如下三个阶段的处理。

1) 削弱阶段。利用下式修改杆单元  $i$  的刚度

$$E_i = E_{i0} \times p \quad (2)$$

其中:  $E_i$  为第  $i$  杆单元的修改刚度;  $E_{i0}$  为第  $i$  杆单元的初始刚度;  $p$  为削弱常数,本文取 0.001。需要

指出,  $p$  的选取并无数学公式推导。可见,  $p$  过大或过小都会直接影响削弱的效果。

2) 删除阶段。对修改刚度后的结构重新进行结构计算, 并重新对所有杆单元标记状态。如果杆单元  $i$  在第二次标记中仍然为削弱状态, 则删除该杆单元, 否则将该杆单元刚度还原为  $E_{i0}$ 。

3) 修剪阶段。如果杆单元的应力接近于零, 则直接删除。

最后, 对网格进行校正。检查删除杆单元所在的网格单元的信息, 如果该网格单元中已经没有杆单元存在, 则删除网格单元。这样,  $\nabla T_k$  得以确定。

需要说明的是, 通过增加网格单元, 结构高应力杆单元所承担的载荷可能由新增的杆单元共同承担, 因此使应力得以减小。为避免误删除杆单元, 采用了先弱化后删除的办法。其实质是伪删除, 将结构大部分的应力分布在未被弱化的杆单元上, 即在不改变拓扑构型的情况下改变结构的应力分布。如果已削弱的杆单元  $i$  是可以删除的, 那么在应力重分布后不会使杆单元  $i$  的应力有较大的提升, 因而杆单元  $i$  会再次被标记为削弱状态; 反之, 如果在应力重分布后杆单元  $i$  的应力有很大提升, 说明该杆单元并不可删除。如果删除, 将会显著提升其他杆单元的应力, 甚至造成结构间断出现畸形。因此, 该过程有效的避免结构的刚度在进化过程中出现奇异。

此外, 由于删除与削弱都是根据  $\gamma_{des}$  按杆件数的百分比进行的, 而  $\gamma_{des}$  一般不能过大, 因此, 如果结构中有相当多的杆单元应力值过低, 删除阶段无法将这些单元全部删除。为了最大程度上删除杆件以减小单元数、提高计算效率, 本文在删除阶段之后采用修剪阶段来消除零杆。如无该阶段, 结构将出现毛刺状的零杆。

另一方面,  $\nabla T_k$  是根据应力一致的准则确定的, 是减少结构中最大应力与最小应力差值的可行方向之一。本文中, 一次迭代中包含单元的增加与删除, 其实质是通过单元的更新使结构的承载力逐步提升, 因此在恒定荷载作用下, 结构的最大应力将下降。于是, 新生成的单元需要比删除的单元在提高结构承载力方面更有优势。新增的单元出现在结构高应力区域, 并且没有空间的限制。但这并不意味着这些新单元会持续地增加。因为如果结构新增加的单元无法进一步提高结构承载力, 这些新单元将会在删除过程中被删除。如果结构中所有新增单元几乎都被删除, 结构在连续几次迭代中均没有新增单

元时, 可以认为结构停止进化, 此时优化计算结束。本文所给优化方法的计算迭代流程图如图3所示。

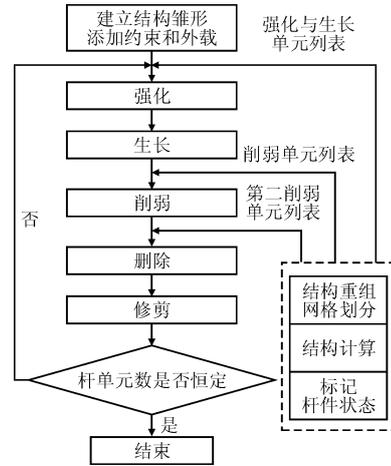


图3 优化方法迭代流程图

### 3 算例

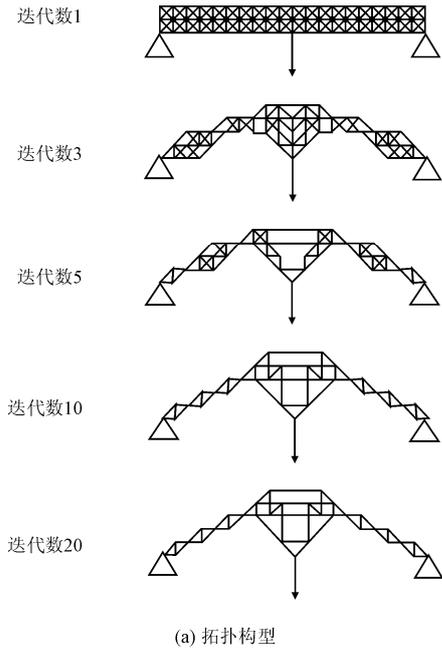
本节通过数值算例验证所提拓扑优化方法的可行性。

#### 3.1 算例1

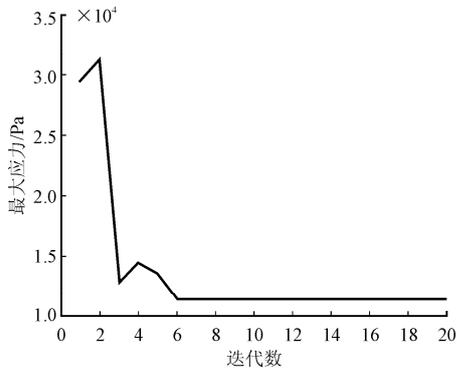
算例1为两端铰支、中间受向下集中力的桁架结构, 结构基本数据如表1所示。优化的目标是通过改变结构的拓扑构型, 使结构在尽可能轻的重量下, 对该集中力拥有较强的承载力。采用本文所介绍的方法对该结构进行优化, 以结构中杆单元数不再变化为计算中止条件。计算结果如图4中结果所示。由图4(a)结构迭代的拓扑构型可以看出: 结构向着较为合理的方向进化。从第10次迭代开始, 新单元无法进一步提高结构承载力, 结构的拓扑构型不再变化。从图4(b)最大应力迭代曲线可以看出: 随着计算的进行, 结构的最大应力减小, 满足优化目标的要求。需要指出, 在本例中, 结构的杆件数同时也得到了减少(如图4(c)杆件数迭代曲线)。然而, 本文方法会使结构逐渐生长出新的单元以减小结构的局部高应力, 杆件单元数有增有减。因此, 并不能保证杆件数在迭代过程中是一定下降的。

表1 结构优化基本数据

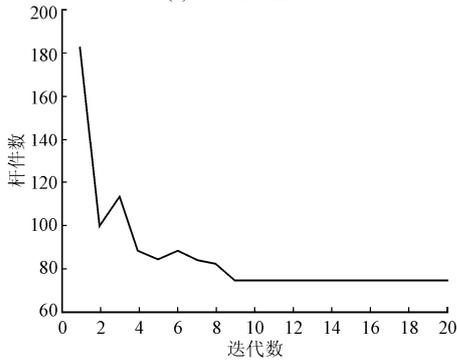
铰支间距/ m	杆件面积/ m <sup>2</sup>	杆件刚度/ Pa	集中力大小/ N
20	0.01	6.90 × 10 <sup>10</sup>	4.45 × 10 <sup>5</sup>



(a) 拓扑构型



(b) 最大应力迭代曲线



(c) 杆件数迭代曲线

图4 计算过程

文献[4]使用 ESO (Evolutionary Structural Optimization)计算的拓扑优化结果如图5所示。

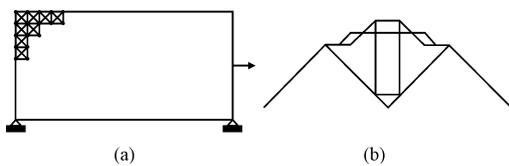


图5 文献[4]采用 ESO 方法的计算结果

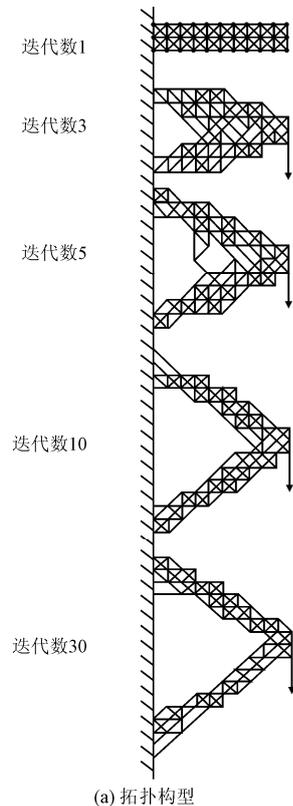
由图5(a)可以看出, Querin 的优化计算是基于基结构的: 预先给定了设计区域与节点, 节点之间用杆件连接(考虑计算量, 并未两两连接); 通过删除杆件, 经过83次迭代, 得到了图5(b)的拓扑结构。图5(b)中的拓扑结构比本文结果更为简洁, 这是因为其优化过程仅删除杆件, 并未增加杆件, 因而结构两侧连接支座的斜支撑承受较大的压力。而采用本文的方法, 该支撑得到了加强。同时也需指出, 图5采用 ESO 方法结构计算初期杆件数很多, 计算量很大。

### 3.2 算例2

算例2为悬臂梁结构的拓扑优化。梁的左侧为固定约束, 右侧受向下的集中力, 结构的基本数据如表2所示。采用本文所介绍的方法对该结构进行优化, 优化的目标与优化终止条件与算例1相同, 计算结果如图6所示。由图6计算结果可看出: 结构的最终拓扑形式为直角支承, 最大应力减小; 但杆件数目增多, 这是因为初期的结构拓扑形式不合理, 计算过程对结构的拓扑构型进行了很大的调整。

表2 结构优化基本数据

臂长 / m	杆件面积 / m <sup>2</sup>	杆件刚度 / Pa	集中力大小 / N
10	0.01	$6.90 \times 10^{10}$	$4.45 \times 10^5$



(a) 拓扑构型

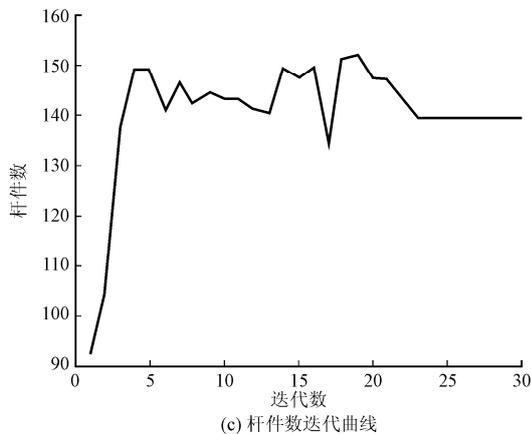
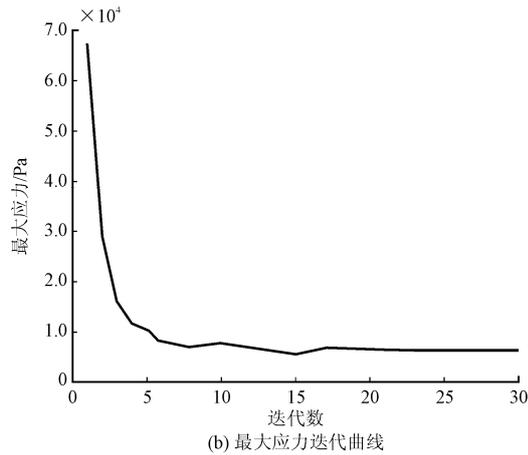


图6 计算过程

## 4 结束语

本文对桁架结构的双向拓扑优化策略进行了探讨,设计了一种结合单元生长与单元删除的方案使结构逐渐进化。数值仿真结果验证了该方法的可行性和有效性。

有几点问题需要在此说明与讨论。首先,因为 $\nabla T_k$ 并不具备严格的数学表达,且涉及一些假设,本文尚未得出其收敛速度以及收敛性的证明。与BESO (Bi-Directional Evolutionary Structural Optimization)方法一样,本文中所提出的方法存在一些不足:结构是逐渐进化的,在结构计算中无法

计算到拓扑结构以外的单元。因此需要根据当前结构的情况预测出新单元的增加,以及单元增加后对结构性能的影响。这些分析与预测均为局部性的(最终拓扑构型的大部分单元均为新生单元,不在初期结构的计算范围之内)。本文采用的单元生长方案,即在高应力单元周围生成新单元的办法,并不是十分有效,无法保证结构的进化方向是最优方向,无法保证获得全局最优解。其次,优化过程中并没有涉及结构许可最大应力,尽管结构的最大应力持续下降,但该应力是否一定能降低至许可范围之内,并没有进行论证。以上问题仍有待于进一步的深入研究。

## 参 考 文 献

- [1] Cheng G D, Guo X.  $\epsilon$ -relaxed approach in structural topology optimization [J]. Structural Optimization, 1997, 13 (4): 258-266.
- [2] 程耿东. 关于桁架结构拓扑优化中的奇异最优解[J]. 大连理工大学学报, 2000, 40 (4): 479-383.
- [3] Liu Jingsheng, Parks G, Clarkson J. Metamorphic development: a new topology optimization method for truss structures[C]//The 40th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference. St Louis, Missouri, USA: AIAA, 1999.
- [4] Querin O M. Evolutionary structural optimization: stress based formulation and implementation[D]. Sydney: University of Sydney, 1997.
- [5] 荣见华, 姜节胜, 徐飞鸿, 等. 一种基于应力的双向结构拓扑优化算法[J]. 计算力学学报, 2004, 21 (3): 322-329.
- [6] 王明强, 姚峰. 基于应力刚度约束的连续体双向渐进结构优化[J]. 机械设计, 2008, 25 (9): 38-40.
- [7] Steven G P, Xie Y M. A simple evolutionary procedure for structural optimization[J]. Computer and Structures, 1993, 49 (5): 885-896.
- [8] Tanskanen P. The evolutionary structural optimization method: theoretical aspects[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2002, 191: 5485-5498.