

文章编号: 1000-4750(2012)07-0341-06

参数不确定性细长火箭弹随机特征值问题研究

戎 保, 芮筱亭, 王国平, 尹志嘉

(南京理工大学发射动力学研究所, 南京 210094)

摘 要: 固有振动特性分析已成为大长径比火箭弹研制与动态设计的重要环节之一。系统的加工测量误差、几何、材料以及约束条件等的不确定性对火箭弹动态特性具有显著影响。该文基于传递矩阵法和摄动方法, 建立了含不确定参数的细长火箭弹随机特征值问题分析方法, 研究了参数不确定性对火箭弹振动特性的影响。该方法无需建立系统总体动力学方程, 可大幅度提高随机特征值问题的计算效率、降低系统存储需求。分别应用该文方法与 Monte Carlo 方法对某大长径比火箭弹随机特征值问题进行了分析, 两种方法计算结果吻合较好, 证明了该方法的有效性。

关键词: 传递矩阵法; 随机特征值; 火箭弹; 有限元; 不确定性; 摄动

中图分类号: O313.7; TJ7 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2010.10.0737

STUDY ON RANDOM EIGENVALUE PROBLEMS OF SLENDER ROCKET WITH UNCERTAIN PARAMETERS

RONG Bao, RUI Xiao-ting, WANG Guo-ping, YIN Zhi-jia

(Institute of Launch Dynamics, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

Abstract: The analysis of natural vibration characteristics has become one of important steps of the manufacture and dynamic design of a slender rocket. The inherent inaccuracies existing in manufacturing, measurements, uncertainties of geometry and material, statistical variability of constraints and other factors, have remarkable effects on the dynamic performance of the rocket. In this paper, based on the transfer matrix method and perturbation method, a new method for random eigenvalue problems of a slender rocket with uncertain parameters is studied, and the effect of parameter uncertainty on the vibration characteristic of the rocket is presented. This method does not need the global dynamic equations of a system, and has the high computational efficiency and low memory requirement. It has more advantages for the dynamic design of an uncertain rocket. The random eigenvalue problems of a slender rocket with uncertain parameters are studied by using the proposed method and Monte Carlo method, respectively. The computational results obtained by the two methods have a good agreement, which validate the feasibility of the proposed method.

Key words: transfer matrix method; random eigenvalue problems; rocket; finite element; uncertainty; perturbation

火箭弹振动特性对其飞行性能及武器系统射击精度影响显著。在实际的工程问题中由于制造、测量误差及施工水平和条件限制等因素, 导致了诸

如系统几何参数、材料性能参数、边界条件、初始条件以及外载荷等存在着许多不确定因素。将系统全部参数均视为确定性量所建立的确定性模型将

收稿日期: 2010-10-13; 修改日期: 2011-03-06

基金项目: 国家自然科学基金项目(10902051); 江苏省自然科学基金攀登计划项目(BK2008046)

通讯作者: 戎 保(1984—), 男, 安徽阜南人, 讲师, 博士, 从事多体系统动力学与控制研究(E-mail: rongbao_nust@sina.com.cn).

作者简介: 芮筱亭(1956—), 男, 江苏镇江人, 教授, 博士, 博导, 从事多体系统动力学、发射动力学研究(E-mail: ruixt@163.net);

王国平(1976—), 男, 山西临县人, 副教授, 博士, 从事发射动力学研究(E-mail: wgp1976@163.com);

尹志嘉(1988—), 男, 江苏南京人, 助工, 学士, 从事发射动力学研究(E-mail: 300158@163.com).

无法反映出各参数的随机性对系统振动特性和动态响应的影响,甚至在某些情况下会造成系统的不稳定^[1-2]。准确估计不确定参数对系统动态特性的影响,对提高火箭武器系统动态性能具有重要意义。

目前,不确定性参数系统的分析方法一般可分为两类^[1-2]:一类是以 Monte Carlo 方法为代表的统计方法,其需要进行大量的样本试验和数据处理工作,计算工作量很大;另一类是非统计的方法,其利用现代数学分析和计算工具(如:摄动方法、子空间迭代方法、区间分析、模糊法等)直接分析不确定性参数系统的随机特性和随机响应。随机有限元方法是不确定性系统建模的常用方法和分析工具。当采用随机有限元方法分析复杂系统动态特性时,须处理非常大的矩阵,计算工作量十分庞大,大刚度梯度系统往往伴随计算“病态”,导致计算困难。

传递矩阵法以其建模灵活、计算效率高等优点,在诸多工程技术领域得到了广泛应用。针对确定性模型,余旭东等^[3]应用 Riccati 传递矩阵法分析了导弹固有特性;Xue^[4]、戎保^[5]、Abbas^[6]等结合有限元和传递矩阵法实现了结构动力学问题的快速计算;芮筱亭等^[7-9]建立了多体系统传递矩阵法用于多体系统动力学问题研究,并利用有限元传递矩阵法成功实现了对舰炮、大长径比火箭弹等工程系统振动特性分析。董满才等^[10]利用传递矩阵法,研究了含不确定参数多体系统随机特征值问题。上述研究为实现高效便捷的参数不确定性系统动态特性研究提供了有益的思路。

本文基于传递矩阵法和摄动方法,建立含不确定性参数的细长火箭弹随机特征值问题分析方法,研究了参数不确定性对火箭弹振动特性的影响。本文方法充分利用了传递矩阵法建模灵活、计算效率高、无需建立系统总体动力学方程等优点,大幅度提高了不确定性系统的计算速度,降低了系统存储需求。分别应用本文方法与 Monte Carlo 方法对某大长径比火箭弹随机特征值问题进行了分析,两种方法计算结果吻合较好,证明了本方法的有效性。

1 火箭弹动力学模型

对图 1 所示某大长径比火箭弹,为叙述方便,假设火箭弹振动服从如下基本假设^[8]: 1) 火箭弹为沿弹轴截面复杂变化的梁,并且弹性中心线与质量中心线重合; 2) 长径比大,不考虑剪切的影响; 3)

轴向刚度远大于横向弯曲刚度,可忽略拉压变形的影响。根据有限元法,采用二节点 Hermite 梁单元将火箭弹体分成若干微元段。对任意单元 i , 其轴线上任意点的横向位移可表示为:

$$u = \psi_i(x)\delta_i, \quad x = [0, l_i] \quad (1)$$

式中: $\psi_i = [\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4]$,

$$\delta_i = [\delta_{i,1}^T, \delta_{i,2}^T]^T = [u_1, u_1', u_2, u_2']^T,$$

$$\psi_1(x) = (l_i^3 - 3l_i x^2 + 2x^3) / l_i^3,$$

$$\psi_2(x) = (l_i^2 x - 2l_i x^2 + x^3) / l_i^2,$$

$$\psi_3(x) = (3l_i x^2 - 2x^3) / l_i^3,$$

$$\psi_4(x) = (-l_i x^2 + x^3) / l_i^2.$$

l_i 为单元 i 的长度, u_1 、 u_2 分别为节点 1、节点 2 处的横向振动位移。 u_1' 、 u_2' 分别为节点 1、节点 2 处微元的转角。

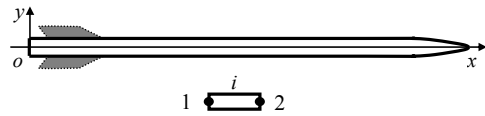


图 1 大长径比火箭弹横向振动力学模型

Fig.1 Transverse vibration model for a slender rocket

弯曲梁的应变能和动能可表示为:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EI u''^2 dx, \quad T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A \dot{u}^2 dx \quad (2)$$

式中: EI 为抗弯刚度; ρ 为质量密度; A 为横截面面积; $u'' = \partial^2 u / \partial x^2$; $\dot{u} = du / dt$, t 为时间。

将式(1)代入式(2),由 Lagrange 方法可得火箭弹单元 i 的单元刚度矩阵 K_i 和单元质量矩阵 M_i , 其元素分别为^[3,11]:

$$\begin{cases} k_{ij} = \int_0^l EI \psi_i'' \psi_j'' dx \\ m_{ij} = \int_0^l \rho A \psi_i \psi_j dx \end{cases}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4 \quad (3)$$

根据式(3)计算所得的单元刚度矩阵和单元质量矩阵,可得火箭弹单元 i 的自由振动方程为:

$$M_i \ddot{\delta}_i + K_i \delta_i = F_i \quad (4)$$

式中, F_i 为单元 i 节点内力列阵。

对于特征值问题,令:

$$\delta_i = \bar{\delta}_i \exp(j\omega t), \quad F_i = \bar{F}_i \exp(j\omega t) \quad (5)$$

式中: $\bar{\delta}_i$ 和 \bar{F}_i 分别是 δ_i 和 F_i 对应的模态矢量; j 为虚数单位; ω 为火箭弹振动频率。

将式(5)代入式(4)可得:

$$S_i \begin{bmatrix} \bar{\delta}_{i,1} \\ \bar{\delta}_{i,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \bar{\delta}_{i,1} \\ \bar{\delta}_{i,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_{i,1} \\ \bar{F}_{i,2} \end{bmatrix} \quad (6)$$

式中, $S_i = K_i - \lambda M_i$ 为火箭弹单元 i 的动力矩阵, $\lambda = \omega^2$ 为火箭弹特征值。

经过简单运算后得火箭弹单元 i 的传递方程为:

$$\begin{bmatrix} \bar{\delta} \\ \bar{F} \end{bmatrix}_{i,2} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \bar{\delta} \\ -\bar{F} \end{bmatrix}_{i,1} = U_i \begin{bmatrix} \bar{\delta} \\ -\bar{F} \end{bmatrix}_{i,1} \quad (7)$$

式中, U_i 为单元 i 的传递矩阵。

$$\begin{aligned} U_{11,i} &= -S_{12,i}^{-1} S_{11,i}, & U_{12,i} &= -S_{12,i}^{-1}, \\ U_{21,i} &= S_{21,i} - S_{22,i} S_{12,i}^{-1} S_{11,i}, & U_{22,i} &= -S_{22,i} S_{12,i}^{-1}. \end{aligned} \quad (8)$$

由于不同单元上的两联接截面位移连续, 内力大小相等、方向相反, 可得:

$$\begin{bmatrix} \bar{\delta} \\ -\bar{F} \end{bmatrix}_{i+1,1} = \begin{bmatrix} \bar{\delta} \\ \bar{F} \end{bmatrix}_{i,2} \quad (9)$$

由式(7)和式(9)得火箭弹总传递方程:

$$\begin{bmatrix} \bar{\delta} \\ \bar{F} \end{bmatrix}_{n+1,1} = U_n \mathbf{L} U_2 U_1 \begin{bmatrix} \bar{\delta} \\ \bar{F} \end{bmatrix}_{1,1} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\delta} \\ \bar{F} \end{bmatrix}_{1,1} \quad (10)$$

其中, n 为火箭弹的单元总数。

代入系统边界条件, 可得频率方程。对于自由飞行大长径比火箭弹, 可得:

$$U_{21} \bar{\delta}_{1,1} = 0 \quad (11)$$

频率方程:

$$|U_{21}| = 0 \quad (12)$$

2 火箭弹随机特征值分析

2.1 参数不确定性火箭弹传递方程的摄动描述

若火箭弹的几何和材料特性存在不确定性, 令 $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \mathbf{L}, X_r]^T$ 为火箭弹不确定参数矢量, r 为火箭弹不确定参数总数。对于小参数摄动系统, 由摄动方法^[1-2], 不确定性可描述为:

$$X_j = X_j^{(0)} (1 + \varepsilon_j), \quad j = 1, 2, \mathbf{L}, r \quad (13)$$

式中: $X_j^{(0)}$ 为不确定参数 X_j 的初值; ε_j 为用于描述 X_j 不确定性的随机变量, 且 $|\varepsilon_j| \ll 1$ 。

由 Taylor 展开, 系统特征值 λ 可表示为:

$$\lambda(\mathbf{X}) = \lambda^{(0)} + \sum_{l=1}^r \lambda^{(l)} \varepsilon_l + \sum_{l=1}^r \sum_{m=1}^l \lambda^{(lm)} \varepsilon_l \varepsilon_m \quad (14)$$

式中: $(*)^{(0)}$ 表示变量 $(*)$ 的初始值; $(*)^{(l)}$ ($l=1, 2, \mathbf{L}, r$) 表示变量 $(*)$ 相对于不确定参数 X_l 的一阶摄动; $(*)^{(lm)}$ 表示变量 $(*)$ 相对于不确定参数 X_l 和 X_m 的二阶摄动。

同理, 考虑系统参数的不确定性, 对第 1 节所述火箭弹单元 i 的传递矩阵 U_i 可表示为:

$$U_i = U_i^{(0)} + \sum_{l=1}^r U_i^{(l)} \varepsilon_l + \sum_{l=1}^r \sum_{m=1}^l U_i^{(lm)} \varepsilon_l \varepsilon_m \quad (15)$$

任意节点的状态变量可表示为:

$$\begin{aligned} \bar{\delta} &= \bar{\delta}^{(0)} + \sum_{l=1}^r \bar{\delta}^{(l)} \varepsilon_l + \sum_{l=1}^r \sum_{m=1}^l \bar{\delta}^{(lm)} \varepsilon_l \varepsilon_m, \\ \bar{F} &= \bar{F}^{(0)} + \sum_{l=1}^r \bar{F}^{(l)} \varepsilon_l + \sum_{l=1}^r \sum_{m=1}^l \bar{F}^{(lm)} \varepsilon_l \varepsilon_m. \end{aligned} \quad (16)$$

将式(15)和式(16)代入式(10), 令:

$$\begin{aligned} U^{(0)} &= U_n^{(0)} U_{n-1}^{(0)} \mathbf{L} U_2^{(0)} U_1^{(0)}, \\ U_i^{(l)} &= U_n^{(0)} U_{n-1}^{(0)} \mathbf{L} U_{i+1}^{(0)} U_i^{(l)} U_{i-1}^{(0)} \mathbf{L} U_2^{(0)} U_1^{(0)}, \\ U_i^{(lm)} &= U_n^{(0)} U_{n-1}^{(0)} \mathbf{L} U_{i+1}^{(0)} U_i^{(lm)} U_{i-1}^{(0)} \mathbf{L} U_2^{(0)} U_1^{(0)}, \\ U_{ij}^{(lm)} &= U_n^{(0)} U_{n-1}^{(0)} \mathbf{L} U_{i+1}^{(0)} U_i^{(l)} U_{i-1}^{(0)} \mathbf{L} \\ &\quad U_{j+1}^{(0)} U_j^{(m)} U_{j-1}^{(0)} \mathbf{L} U_2^{(0)} U_1^{(0)}. \end{aligned} \quad (17)$$

忽略高阶小量, 并令等式两边不确定性随机变量 ε 的同阶次项相等, 可得:

$$\begin{bmatrix} \bar{\delta} \\ \bar{F} \end{bmatrix}_{n+1,1}^{(0)} = U^{(0)} \begin{bmatrix} \bar{\delta} \\ \bar{F} \end{bmatrix}_{1,1}^{(0)} \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\delta} \\ \bar{F} \end{bmatrix}_{n+1,1}^{(l)} = U^{(0)} \begin{bmatrix} \bar{\delta} \\ \bar{F} \end{bmatrix}_{1,1}^{(l)} + \sum_{i=1}^n U_i^{(l)} \mathbf{Z} \begin{bmatrix} \bar{\delta} \\ \bar{F} \end{bmatrix}_{1,1}^{(0)} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{\delta} \\ \bar{F} \end{bmatrix}_{n+1,1}^{(lm)} &= U^{(0)} \begin{bmatrix} \bar{\delta} \\ \bar{F} \end{bmatrix}_{1,1}^{(lm)} + \sum_{i=1}^n U_i^{(lm)} \begin{bmatrix} \bar{\delta} \\ \bar{F} \end{bmatrix}_{1,1}^{(0)} + \\ &\quad \sum_{i=1}^n U_i^{(l)} \begin{bmatrix} \bar{\delta} \\ \bar{F} \end{bmatrix}_{1,1}^{(m)} + \sum_{i=1, i \neq j}^n \sum_{j=1}^n U_{ij}^{(lm)} \begin{bmatrix} \bar{\delta} \\ \bar{F} \end{bmatrix}_{1,1}^{(0)} + \\ &\quad \delta_{lm}^{\%} \sum_{i=1}^n U_i^{(m)} \begin{bmatrix} \bar{\delta} \\ \bar{F} \end{bmatrix}_{1,1}^{(l)} \end{aligned} \quad (20)$$

式中, $\delta_{lm}^{\%} = \begin{cases} 1, & l \neq m \\ 0, & l = m \end{cases}$ 。

2.2 参数不确定性火箭弹特征值分析

对于自由飞行大长径比火箭弹, 代入系统边界条件, 由式(11)、式(18)~式(20), 可得含随机参数的火箭弹特征方程^[1,12]为:

$$0 = U_{21}^{(0)} \bar{\delta}_{1,1}^{(0)} \quad (21)$$

$$0 = U_{21}^{(0)} \bar{\delta}_{1,1}^{(l)} + \sum_{i=1}^n U_{21,i}^{(l)} \bar{\delta}_{1,1}^{(0)} \quad (22)$$

$$0 = U_{21}^{(0)} \bar{\delta}_{1,1}^{(lm)} + \sum_{i=1}^n U_{21,i}^{(lm)} \bar{\delta}_{1,1}^{(0)} + \sum_{i=1}^n \bar{U}_{21,i}^{(l)} \bar{\delta}_{1,1}^{(m)} +$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n U_{21,ij}^{(lm)} \bar{\delta}_{1,1}^{(0)} + \delta_{lm} \sum_{i=1}^n \bar{U}_{21,i}^{(m)} \bar{\delta}_{1,1}^{(l)} \quad (23)$$

式中, $U_{21}^{(0)}$ 、 $U_{21,i}^{(l)}$ 、 $U_{21,i}^{(lm)}$ 和 $U_{21,ij}^{(lm)}$ 分别为代入系统边界条件后由 $\bar{U}^{(0)}$ 、 $\bar{U}_i^{(lm)}$ 、 $\bar{U}_i^{(l)}$ 和 $\bar{U}_{ij}^{(lm)}$ 获得的子矩阵。

对式(21)~式(23)所示随机特征值问题, 首先求解零阶特征方程式(21)即可得不确定性火箭弹特征值的零阶摄动 $\lambda_k^{(0)}$ ($k=1, 2, \mathbf{L}$)。对于实特征值问题, 该频率方程可用二分法、抛物线法、弦截法、黄金分割法等多种方法求解^[4]。将所获得的每一阶特征值零阶摄动 $\lambda_k^{(0)}$ 依次代入矩阵 $\bar{U}_{21}^{(0)}$, 并对其作奇异值分解^[1]可得:

$$\bar{U}_{21}^{(0)} = T D \bar{V}^T \quad (24)$$

式中: T 和 V 为酉矩阵, 即 $T \bar{T}^T = I$, $V \bar{V}^T = I$, \bar{T}^T 和 \bar{V}^T 为 T 和 V 的共轭转置矩阵; D 为对角矩阵。

将式(24)代入式(21)可得:

$$T D \bar{V}^T \bar{\delta}_{1,1}^{(0)} = 0 \quad (25)$$

令

$$\bar{\delta}_{1,1}^{(0)} = \bar{V}^T \bar{\delta}_{1,1}^{(0)} \quad (26)$$

将式(26)代入式(25), 并在等式两边左乘以矩阵 \bar{T}^T , 可得:

$$D \bar{\delta}_{1,1}^{(0)} = 0 \quad (27)$$

如果 $\lambda_k^{(0)}$ 为系统 p 重特征值, 则对角阵 D 最后 p 个对角元素为零, 即 D 有如下形式:

$$D = \text{diag}[d_1 \quad d_2 \quad \mathbf{L} \quad d_{t-p} \quad \underbrace{0 \quad \mathbf{L} \quad 0}_{p} \quad \mathbf{L} \quad 0] \quad (28)$$

式中: p 为 $\lambda_k^{(0)}$ 对应的系统重根数; t 为对角阵 D 的阶次。对于孤立特征值问题, $p=1$ 。

结合式(27)、式(28)可得 $\bar{\delta}_{1,1}^{(0)}$ 有 p 个非零解, 设这些非零解为:

$$\begin{cases} \bar{\delta}_{1,1}^{(0),1} = [0 \quad 0 \quad \mathbf{L} \quad 0 \quad 0 \quad \mathbf{L} \quad 0 \quad 1]^T \\ \bar{\delta}_{1,1}^{(0),2} = [0 \quad 0 \quad \mathbf{L} \quad 0 \quad 0 \quad \mathbf{L} \quad 1 \quad 0]^T \\ \mathbf{L} \\ \bar{\delta}_{1,1}^{(0),p} = [0 \quad 0 \quad \mathbf{L} \quad 0 \quad 1 \quad \mathbf{L} \quad 0 \quad 0]^T \end{cases} \quad (29)$$

将式(29)各非零解依次代入式(26), 并在等式两边左乘以矩阵 V , 可得:

$$\bar{\delta}_{1,1}^{(0),s} = V \bar{\delta}_{1,1}^{(0),s}, \quad s=1, 2, \mathbf{L}, p \quad (30)$$

利用式(30)和火箭弹各单元的传递方程, 可求得作自由振动时系统第 k 阶 p 重特征值对应的各

剖面状态矢量的零阶摄动。

将上述过程获得的各零阶摄动矢量 $\bar{\delta}_{1,1}^{(0),s}$ 和特征值零阶摄动 $\lambda_k^{(0)}$ 依次代入式(22), 可得:

$$T D \bar{V}^T \bar{\delta}_{1,1}^{(l),s} + \sum_{i=1}^n \bar{U}_{21,i}^{(l)} \bar{\delta}_{1,1}^{(0),s} = 0 \quad (31)$$

或

$$D \bar{V}^T \bar{\delta}_{1,1}^{(l),s} + \sum_{i=1}^n \bar{T}^T \bar{U}_{21,i}^{(l)} \bar{\delta}_{1,1}^{(0),s} = 0 \quad (32)$$

式(31)可写成如下矩阵形式:

$$T D \bar{V}^T A_{O,n}^{(l)} u + \sum_{i=1}^n \bar{U}_{21,i}^{(l)} B_{O,n}^{(0)} u = 0 \quad (33)$$

式中:

$$\begin{aligned} A_{O,n}^{(l)} &= [\bar{\delta}_{1,1}^{(l),1}, \bar{\delta}_{1,1}^{(l),2}, \mathbf{L}, \bar{\delta}_{1,1}^{(l),p}], \\ B_{O,n}^{(0)} &= [\bar{\delta}_{1,1}^{(0),1}, \bar{\delta}_{1,1}^{(0),2}, \mathbf{L}, \bar{\delta}_{1,1}^{(0),p}], \\ u &= [u_1, u_2, \mathbf{L}, u_p]^T. \end{aligned}$$

u_s ($s=1, 2, \dots, p$) 为任意非零实数。

令

$$\mathcal{A}_{O,n}^{(l)} = \bar{V}^T A_{O,n}^{(l)} \quad (34)$$

将式(34)代入式(33), 并在方程两边同时乘以 \bar{T}^T , 可得:

$$D \mathcal{A}_{O,n}^{(l)} u + \bar{T}^T \sum_{i=1}^n \bar{U}_{21,i}^{(l)} B_{O,n}^{(0)} u = 0 \quad (35)$$

根据式(28), 式(35)需满足下述条件:

$$W^{(l)} u = 0 \quad (36)$$

式中, $W^{(l)}$ 为提取矩阵 $\bar{T}^T \sum_{i=1}^n \bar{U}_{21,i}^{(l)} B_{O,n}^{(0)}$ 最后 p 行所获得的子矩阵。

则系统一阶摄动频率方程可表示为:

$$\det W^{(l)} = 0 \quad (37)$$

求解式(37), 可得 $\lambda_k^{(0)}$ 对应特征值的一阶摄动 $\lambda_k^{(l),s}$ 。一旦获得 $\lambda_k^{(l),s}$, 利用式(28)和式(32), 可得:

$$\begin{aligned} \{\bar{V}^T \bar{\delta}_{1,1}^{(l),s}\}_j &= -\left\{ \sum_{i=1}^n \bar{T}^T \bar{U}_{21,i}^{(l)} \bar{\delta}_{1,1}^{(0),s} \right\}_j / d_j, \\ & \quad j=1, 2, \mathbf{L}, t-p, \\ \{\bar{V}^T \bar{\delta}_{1,1}^{(l),s}\}_j &= 0, \quad j=t-p+1, \mathbf{L}, t. \end{aligned} \quad (38)$$

式中, $\{*\}_j$ 为矢量 $\{*\}$ 的第 j 个元素。

由式(38)可得一阶摄动 $\bar{\delta}_{1,1}^{(l),s}$ 。再利用火箭弹单元的传递方程, 可求得作自由振动时系统第 k 阶 p 重特征值对应的各剖面状态矢量的一阶摄动。

将式(24)、式(30)和式(38)代入式(23)可得:

$$TD\bar{V}^T \bar{\delta}_{1,1}^{(lm),s} + \sum_{i=1}^n \bar{U}_{21,i}^{(l)} \bar{\delta}_{1,1}^{(m),s} + \sum_{i=1, i \neq j}^n \sum_{j=1}^n \bar{U}_{21,ij}^{(lm)} \bar{\delta}_{1,1}^{(0),s} + \delta_{lm} \sum_{i=1}^n \bar{U}_{21,i}^{(m)} \bar{\delta}_{1,1}^{(l),s} + \sum_{i=1}^n \bar{U}_{21,i}^{(lm)} \bar{\delta}_{1,1}^{(0),s} = 0 \quad (39)$$

或

$$D\bar{V}^T \bar{\delta}_{1,1}^{(lm),s} + T^T \left[\sum_{i=1}^n \bar{U}_{21,i}^{(l)} \bar{\delta}_{1,1}^{(m),s} + \sum_{i=1, i \neq j}^n \sum_{j=1}^n \bar{U}_{21,ij}^{(lm)} \bar{\delta}_{1,1}^{(0),s} + \delta_{lm} \sum_{i=1}^n \bar{U}_{21,i}^{(m)} \bar{\delta}_{1,1}^{(l),s} + \sum_{i=1}^n \bar{U}_{21,i}^{(lm)} \bar{\delta}_{1,1}^{(0),s} \right] = 0 \quad (40)$$

式(39)可写成如下矩阵形式:

$$[TD\bar{V}^T A_{1,0}^{(lm)} + \sum_{i=1}^n \bar{U}_{21,i}^{(l)} B_{1,0}^{(m)} + \delta_{lm} \sum_{i=1}^n \bar{U}_{21,i}^{(m)} B_{1,0}^{(l)} + \sum_{i=1}^n \bar{U}_{21,i}^{(lm)} B_{1,0}^{(0)} + \sum_{i=1, i \neq j}^n \sum_{j=1}^n \bar{U}_{21,ij}^{(lm)} B_{1,0}^{(0)}] \mathbf{u} = 0 \quad (41)$$

式中:

$$A_{1,0}^{(lm)} = [\bar{\delta}_{1,1}^{(lm),1}, \bar{\delta}_{1,1}^{(lm),2}, \mathbf{L}, \bar{\delta}_{1,1}^{(lm),p}],$$

$$B_{1,0}^{(*)} = [\bar{\delta}_{1,1}^{(*),1}, \bar{\delta}_{1,1}^{(*),2}, \mathbf{L}, \bar{\delta}_{1,1}^{(*),p}],$$

$$\mathbf{u} = [u_1, u_2, \mathbf{L}, u_p]^T.$$

$u_s (s=1, 2, \dots, p)$ 为任意非零实数。

令

$$\mathcal{A}_{1,0}^{(lm)} = \bar{V}^T A_{1,0}^{(lm)} \quad (42)$$

将式(42)代入式(41),并在方程两边同时乘以 \bar{T}^T , 可得:

$$D\mathcal{A}_{1,0}^{(lm)} \mathbf{u} + \mathbf{J} \mathbf{u} = 0 \quad (43)$$

式中:

$$\mathbf{J} = \bar{T}^T \left[\sum_{i=1}^n \bar{U}_{21,i}^{(l)} B_{1,0}^{(m)} + \delta_{lm} \sum_{i=1}^n \bar{U}_{21,i}^{(m)} B_{1,0}^{(l)} + \sum_{i=1}^n \bar{U}_{21,i}^{(lm)} B_{1,0}^{(0)} + \sum_{i=1, i \neq j}^n \sum_{j=1}^n \bar{U}_{21,ij}^{(lm)} B_{1,0}^{(0)} \right]$$

根据式(28), 式(43)需满足下述条件:

$$\mathbf{W}^{(lm)} \mathbf{u} = 0 \quad (44)$$

式中, $\mathbf{W}^{(lm)}$ 为矩阵 \mathbf{J} 最后 p 行所组成的子矩阵。

则系统二阶摄动频率方程可表示为:

$$\det \mathbf{W}^{(lm)} = 0 \quad (45)$$

求解式(45), 可得 $\lambda_k^{(0)}$ 对应特征值的二阶摄动 $\lambda_k^{(lm),s}$ 。一旦获得 $\lambda_k^{(lm),s}$, 利用式(28)和式(40)可得:

$$\{\bar{V}^T \bar{\delta}_{1,1}^{(lm),s}\}_j = -\{\bar{T}^T [\sum_{i=1}^n \bar{U}_i^{(l)} \bar{\delta}_{1,1}^{(m),s} + \sum_{i=1, i \neq j}^n \sum_{j=1}^n \bar{U}_{ij}^{(lm)} \bar{\delta}_{1,1}^{(0),s} + \delta_{lm} \sum_{i=1}^n \bar{U}_i^{(m)} \bar{\delta}_{1,1}^{(l),s} + \sum_{i=1}^n \bar{U}_i^{(lm)} \bar{\delta}_{1,1}^{(0),s}]\}_j / d_j, \quad j=1, 2, \mathbf{L}, t-p,$$

$$\{\bar{V}^T \bar{\delta}_{1,1}^{(lm),s}\}_j = 0, \quad j=t-p+1, \mathbf{L}, t. \quad (46)$$

由式(46), 可得二阶摄动 $\bar{\delta}_{1,1}^{(lm),s}$ 。再利用火箭弹单元的传递方程, 可得作自由振动时系统第 k 阶 p 重特征值对应的各剖面状态矢量的二阶摄动。

结合特征值各阶摄动值, 由式(14)可得不确定系统特征值 $\lambda(\mathbf{X})$ 的均值和方差^[1-2,12]分别为:

$$E[\lambda] = \lambda^{(0)} + \sum_{l=1}^r \lambda^{(l)} E[\varepsilon_l] + \sum_{l=1}^r \sum_{m=1}^l \lambda^{(lm)} E[\varepsilon_l \varepsilon_m] \quad (47)$$

$$Var[\lambda] = E[\lambda^2] - \{E[\lambda]\}^2 \quad (48)$$

系统特征矢量的均值和方差可同理获得。

3 数值仿真

为验证本文方法的可行性, 本节分析了含随机参数的某自由飞行大长径比火箭弹的特征值问题。按弹体的结构特性将其划分为二十个微元段。假设弹体的抗弯刚度 EI 和质量密度 ρ 分别在区间 $[EI, EI(1+5\%)]$ 和 $[\rho, \rho(1+5\%)]$ 均匀分布。根据已知某型弹体的参数, 分别采用 Monte Carlo 方法和本文方法获得的其前 5 阶固有频率的均值如表 1 所示。由表 1 可见, 两种方法所得结果吻合较好, 证明了本文方法有效可行。

表 1 某火箭弹固有频率均值计算结果 /Hz

Table 1 Computational results of the means of natural frequencies for a rocket

	1 阶	2 阶	3 阶	4 阶	5 阶
Monte Carlo	15.00	41.36	81.10	134.10	200.44
本文方法	15.01	41.33	81.16	134.13	200.11

4 结论

固有振动特性分析是大长径比火箭弹研制与动态设计的重要环节之一。参数不确定性对火箭弹动态特性具有显著影响。本文利用传递矩阵法和摄动方法, 建立了火箭弹各单元的摄动传递方程, 获得了火箭弹的总传递方程和摄动特征方程, 实现了对含不确定性参数的细长火箭弹随机特征值问题的分析。利用本文方法, 无需建立系统总体动力学方程, 摄动特征方程的矩阵阶次与系统自由度数无关。因此, 本方法可大幅度降低随机特征值问题涉及的矩阵阶次, 提高计算效率, 降低存储需求。分别应用本文方法与 Monte Carlo 方法对某大长径比火箭弹随机特征值问题进行了分析, 两种方法计算

结果吻合较好,证明了本方法的有效性。本文研究对火箭弹动态性能分析和结构优化设计具有参考意义。

参考文献:

- [1] 刘保国. 一维不定参数结构系统的摄动 Riccati 传递矩阵方法及其应用[D]. 重庆: 重庆大学, 2002.
Liu Baoguo. Perturbation riccati transfer matrix method for one dimensional structure with parameter uncertainties and its applications [D]. Chongqing: Chongqing University, 2002. (in Chinese)
- [2] 陈塑寰. 结构动态设计的矩阵摄动理论[M]. 北京: 科学出版社, 1999: 1—200.
Chen Suhuan. Matrix perturbation theory for structural dynamic design [M]. Beijing: Science Press, 1999: 1—200. (in Chinese)
- [3] 余旭东, 段德高, 赵伟. 导弹固有特性分析中的 Riccati 法[J]. 火箭弹与制导学报, 1994, 14(2): 47—55.
Yu Xudong, Duan Degao, Zhao Wei. Riccati method for vibration characteristics analysis of the missile [J]. Journal of Projectiles, Rockets, Missiles and Guidance, 1994, 14(2): 47—55. (in Chinese)
- [4] Xue Huiyu. A combined finite element-stiffness equation transfer method for steady state vibration response analysis of structures [J]. Journal of Sound and Vibration, 2003, 265(4): 783—793.
- [5] Rong Bao, Rui Xiaoting, Wang Guoping, et al. Modified finite element transfer matrix method for eigenvalue problem of flexible structures [J]. Journal of Applied Mechanics, 2011, 78(2), 021016.
- [6] Abbas Laith K, Ma Lei, Rui Xiaoting. Natural vibrations of open-variable thickness circular cylindrical shells in high temperature field [J]. Journal of Aerospace Engineering, 2010, 23(3): 205—210.
- [7] 芮筱亭, 贡来峰, 陆毓琪, 等. 多体系统传递矩阵法及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2008: 60—280.
Rui Xiaoting, Yun Laifeng, Lu Yuqi, et al. Transfer matrix method for multibody system and its applications [M]. Beijing: Science Press, 2008: 60—280. (in Chinese)
- [8] 何斌, 芮筱亭, 于海龙. 细长火箭弹固有振动特性分析的有限元传递矩阵法[J]. 动力学与控制学报, 2005, 3(4): 66—70.
He Bin, Rui Xiaoting, Yu Hailong. Finite element transfer matrix method for analyzing natural vibration characteristics of slender rocket/projectile [J]. Journal of Dynamics and Control, 2005, 3(4): 66—70. (in Chinese)
- [9] 芮筱亭, 于海龙, 何斌, 等. 舰炮振动分析的多体系统有限元传递矩阵法[J]. 兵工学报, 2007, 28(9): 1036—1040.
Rui Xiaoting, Yu Hailong, He Bin, et al. Finite element transfer matrix method of multibody system for naval gun vibration analysis [J]. Acta Armamentarii, 2007, 28(9): 1036—1040. (in Chinese)
- [10] 董满才, 芮筱亭, 王国平. 随机参数多体系统特征值随机特性分析方法研究[J]. 南京理工大学学报, 2006, 30(4): 458—461.
Dong Mancai, Rui Xiaoting, Wang Guoping. Analysis methods of random eigenvalue of multibody system with random parameters [J]. Journal of Nanjing University Science and Technology, 2006, 30(4): 458—461. (in Chinese)
- [11] Zienkiewicz O C. The finite element method its basis and fundamentals [M]. 6th ed. Singapore: Elsevier (Singapore) Pte Ltd, 2008: 1—300.
- [12] Fang Z. Dynamic analysis of structures with uncertain parameter using the transfer matrix method [J]. Computers & Structures, 1995, 55(6): 1037—1044.