

文章编号: 1000-4750(2012)07-0320-08

# SH 波入射双相介质半空间浅埋任意位置 圆形夹杂的动力分析

齐 辉, 杨 杰

(哈尔滨工程大学航天与建筑工程学院, 哈尔滨 150001)

**摘 要:** 采用 Green 函数及复变函数方法研究了 SH 波入射到双相介质半空间时, 浅埋任意位置圆形夹杂的动力响应问题。首先, 利用“镜像”法构造满足直角平面自由边界条件的散射波场解答, 进而求出该文所需的 Green 函数; 其次, 利用“契合”思想, 将模型沿着垂直界面剖分为两个直角域, 并利用界面连续性条件及 Green 函数建立待解外力系的第一类 Fredholm 积分方程组; 最后, 通过具体算例给出了圆形弹性夹杂周边的动应力集中系数。结果显示: 界面、自由边界、圆形夹杂、入射波数等因素均对动应力集中系数有影响。

**关键词:** 双相介质界面; 直角平面; 圆形夹杂; Green 函数; 动应力集中系数

**中图分类号:** O343.1; P315.3 **文献标志码:** A **doi:** 10.6052/j.issn.1000-4750.2010.09.0680

## DYNAMIC ANALYSIS FOR SHALLOWLY BURIED CIRCULAR INCLUSIONS OF ARBITRARY POSITIONS IMPACTED BY SH-WAVE IN BI-MATERIAL HALF SPACE

QI Hui, YANG Jie

(College of Aerospace and Civil Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

**Abstract:** Green's function and complex function methods are used here to investigate the problem of the dynamic response for shallowly buried circular inclusions of arbitrary positions impacted by SH-wave in a bi-material half space. Firstly, the expression of the scattering wave field was constructed, satisfying the free boundary conditions in a right-angle plane by the method of 'image', then Green's function was constructed. Secondly, the bi-material media was divided into two parts along the vertical interface using the idea of interface 'conjunction', then a series of Fredholm integral equations of first kind for determining the unknown forces could be set up through continuity conditions on the surface and Green's function. Finally, some examples for the dynamic stress concentration factor of the cylindrical elastic inclusion are given. Numerical results show that the dynamic stress concentration factor is influenced by the interface, free boundary, circular inclusion, incident wave and so on.

**Key words:** bi-material interfaces; right-angle plane; circular inclusion; Green's function; dynamic stress concentration factor

SH 波作用下局部地形对其附近浅埋结构的动力影响问题, 作为地震工程学及地下结构抗震与抗爆理论研究的基础课题之一, 具有重要的理论意义

和应用价值。对 SH 波作用下浅埋结构动力问题的解析解研究, 人们已经做了大量的工作<sup>[1-6]</sup>, 如浅埋孔洞、夹杂、衬砌结构。而对于浅埋结构中含有

收稿日期: 2010-09-21; 修改日期: 2010-12-10

基金项目: 国家自然科学基金项目(10972064)

通讯作者: 杨杰(1985—), 女, 吉林磐石人, 博士生, 从事固体波动理论及应用研究(E-mail: yangjie04024218@163.com).

作者简介: 齐辉(1963—), 男, 黑龙江佳木斯人, 教授, 博士, 博导, 从事固体波动理论及应用研究(E-mail: qihui205@sina.com).

双相介质界面问题的研究并不多见<sup>[7-8]</sup>，且以往对双相介质界面的研究多集中在全空间中<sup>[9-13]</sup>。因此，本文采用复变函数及 Green 函数方法研究了 SH 波作用下双相介质弹性半空间内浅埋任意位置圆形夹杂的散射问题。由于双相介质界面的存在，故在分析时需按照“契合”的思想，将半空间沿界面处剖分，此时问题将转化为两个直角域。考虑到由夹杂产生的散射波将在直角域两个自由边界产生多次反射与折射，则需采用文献[14]提到的“镜像叠加”原理构造一个自动满足直角域应力自由边界条件的散射波解。最后给出了圆形夹杂周边动应力集中系数的算例和数值结果，并对其进行了讨论。

### 1 构造 Green 函数

本文采用的 Green 函数是一个含有圆形弹性夹杂的均匀、各向同性的二维直角平面区域垂直边界表面上任意一点承受时间谐和的出平面线源荷载  $\delta(z-z_{01})$  时位移的基本解，如图 1 所示。

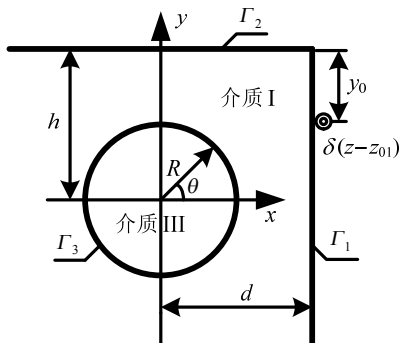


图 1 线源荷载作用的直角区域

Fig.1 The right-angle plane model impacted by a line source force

引入复变量  $z = x + iy$ ， $\bar{z} = x - iy$ ，位移函数  $G(z, z_0)$  与时间的关系为  $\exp(-i\omega t)$ 。在复平面  $(z, \bar{z})$  上，介质内位移场满足控制方程：

$$\frac{\partial^2 G}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{1}{4} k^2 G = 0 \tag{1}$$

式中： $k = \omega / c_s$  为波数； $c_s = \sqrt{\mu / \rho}$  为介质的剪切波速； $\omega$  为位移函数的圆频率； $\mu$ 、 $\rho$  分别为介质的剪切弹性模量和密度。

在极坐标下的应力表达式为：

$$\begin{cases} \tau_{rz} = \mu \left( \frac{\partial G}{\partial z} e^{i\theta} + \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} e^{-i\theta} \right) \\ \tau_{\theta z} = i\mu \left( \frac{\partial G}{\partial z} e^{i\theta} - \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} e^{-i\theta} \right) \end{cases} \tag{2}$$

边界条件可以表述为：

$$\begin{cases} \Gamma_1 : \tau_{xz} |_{x=d} = \delta(z - z_{01}) \\ \Gamma_2 : \tau_{yz} |_{y=h} = 0 \\ \Gamma_3 : \tau_{rz}^I |_{r=R} = \tau_{rz}^{III} |_{r=R}, G^I |_{r=R} = G^{III} |_{r=R} \end{cases} \tag{3}$$

其中： $\delta(\cdot)$  为 Dirac-Delta 函数； $\tau_{rz}^I$ 、 $\tau_{rz}^{III}$  为夹杂内外总径向剪切应力； $G^I$ 、 $G^{III}$  为夹杂内外总位移。

满足控制方程式(1)和边界条件式(3)的位移场基本解，由两部分构成：直角平面区域垂直边界表面线源荷载产生的扰动和圆形弹性夹杂所激发的散射波。对于线源荷载  $\delta(z-z_{01})$  在一个完整的直角域内的扰动，可将其视为入射波  $G^{(i)}$ ，使其满足不含圆形弹性夹杂的直角平面域边界应力自由条件，采用文献[14]中提到的“虚设点源”及多极坐标移动技术来构造，因此入射波可以表述为：

$$G^{(i)}(z, \bar{z}) = \frac{i}{2\mu_1} [H_0^{(1)}(k_1 |z - z_{01}|) + H_0^{(1)}(k_1 |z - z_{02}|)] \tag{4}$$

式中： $z_{01} = d + i(h - y_0)$ ； $z_{02} = d + i(h + y_0)$ ； $H_0^{(1)}(\cdot)$  为零阶第一类 Hankel 函数； $z_0$ 、 $z$  分别代表源点和像点的位置。

入射波相应的应力表达式为：

$$\begin{cases} \tau_{rz}^{(i)} = -\frac{ik_1}{4} (\phi_1 \cdot e^{i\theta} + \phi_2 \cdot e^{-i\theta}) \\ \tau_{\theta z}^{(i)} = \frac{k_1}{4} (\phi_1 \cdot e^{i\theta} - \phi_2 \cdot e^{-i\theta}) \end{cases} \tag{5}$$

式中：

$$\begin{cases} \phi_1 = H_1^{(1)}(k_1 |z - z_{01}|) \frac{|z - z_{01}|}{z - z_{01}} + H_1^{(1)}(k_1 |z - z_{02}|) \frac{|z - z_{02}|}{z - z_{02}} \\ \phi_2 = H_1^{(1)}(k_1 |z - z_{01}|) \frac{z - z_{01}}{|z - z_{01}|} + H_1^{(1)}(k_1 |z - z_{02}|) \frac{z - z_{02}}{|z - z_{02}|} \end{cases}$$

由于圆形弹性夹杂所激发的散射波将会在弹性夹杂和直角平面区域自由表面上发生多次反射，致使能满足直角域边界应力自由条件的波场解析解很难给出。为了克服这一难点，采用“镜像”法及多极坐标移动技术将其构造为：

$$G^{(s)}(z, \bar{z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \sum_{j=1}^4 S_n^{(j)} \tag{6}$$

式中：

$$\begin{cases} S_n^{(1)} = H_n^{(1)}(k|z_1|)[z_1/|z_1|]^n \\ S_n^{(2)} = H_n^{(1)}(k|z_2|)[z_2/|z_2|]^{-n} \\ S_n^{(3)} = (-1)^n H_n^{(1)}(k|z_3|)[z_3/|z_3|]^{-n} \\ S_n^{(4)} = (-1)^n H_n^{(1)}(k|z_4|)[z_4/|z_4|]^n \\ z_1 = z, \quad z_2 = z_1 - 2d, \quad z_3 = z_1 - i2h, \quad z_4 = z_2 - i2h \end{cases},$$

$A_n$  为未知的求解系数, 由边界条件确定。同时, 通过验证, 上述表达式能够满足直角边界应力自由条件。

散射波场相应的应力表达式为:

$$\begin{cases} \tau_{rz}^{(s)} = \frac{k_1 \mu_1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n (\phi_{n1} \cdot e^{i\theta} - \phi_{n2} \cdot e^{-i\theta}) \\ \tau_{\theta z}^{(s)} = \frac{ik_1 \mu_1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n (\phi_{n1} \cdot e^{i\theta} + \phi_{n2} \cdot e^{-i\theta}) \end{cases} \quad (7)$$

式中:

$$\begin{cases} \phi_{n1} = H_{n-1}^{(1)}(k_1|z_1|) \left(\frac{z_1}{|z_1|}\right)^{n-1} - \\ H_{n+1}^{(1)}(k_1|z_2|) \left(\frac{z_2}{|z_2|}\right)^{-n-1} - \\ (-1)^n H_{n+1}^{(1)}(k_1|z_3|) \left(\frac{z_3}{|z_3|}\right)^{-n-1} + \\ (-1)^n H_{n-1}^{(1)}(k_1|z_4|) \left(\frac{z_4}{|z_4|}\right)^{n-1} \\ \phi_{n2} = H_{n+1}^{(1)}(k_1|z_1|) \left(\frac{z_1}{|z_1|}\right)^{n+1} - \\ H_{n-1}^{(1)}(k_1|z_2|) \left(\frac{z_2}{|z_2|}\right)^{-n+1} - \\ (-1)^n H_{n-1}^{(1)}(k_1|z_3|) \left(\frac{z_3}{|z_3|}\right)^{-n+1} + \\ (-1)^n H_{n+1}^{(1)}(k_1|z_4|) \left(\frac{z_4}{|z_4|}\right)^{n+1} \end{cases}$$

在圆形弹性夹杂内产生驻波, 其驻波表达式为:

$$G^{(t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n J_n(k_3|z|) \left(\frac{z}{|z|}\right)^n \quad (8)$$

其中:  $B_n$  为未知求解系数, 由边界条件确定;  $k_3 = \omega / c_3$  是弹性夹杂内 SH 波的波数,  $c_3 = \sqrt{\mu_3 / \rho_3}$  是 SH 波在弹性夹杂介质内的传播速度;  $J_n(\cdot)$  是  $n$  阶第一类 Bessel 函数。

驻波相应的应力表达式为:

$$\begin{cases} \tau_{rz}^{(t)}(z_1, \bar{z}_1) = \frac{\mu_3 k_3}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n [\psi_{n1} \cdot e^{i\theta} - \psi_{n2} \cdot e^{-i\theta}] \\ \tau_{\theta z}^{(t)}(z_1, \bar{z}_1) = \frac{i\mu_3 k_3}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n [\psi_{n1} \cdot e^{i\theta} + \psi_{n2} \cdot e^{-i\theta}] \end{cases} \quad (9)$$

式中:

$$\begin{cases} \psi_{n1} = J_{n-1}(k_3|z|) \cdot \left(\frac{z}{|z|}\right)^{n-1} \\ \psi_{n2} = J_{n+1}(k_3|z|) \cdot \left(\frac{z}{|z|}\right)^{n+1} \end{cases}$$

利用夹杂边界处位移和应力连续性条件:

$$\begin{cases} G^{(t)} + G^{(s)} = G^{(t)} \\ \tau_{rz}^{(i)} + \tau_{rz}^{(s)} = \tau_{rz}^{(t)} \end{cases} \quad (10)$$

得到确定待定系数  $A_n$ 、 $B_n$  的方程组, 即:

$$\begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \xi_{n1} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \eta_{n1} = \zeta_1 \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \xi_{n2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \eta_{n2} = \zeta_2 \end{cases}, \quad n = 0, \pm 1, \dots \quad (11)$$

其中:

$$\begin{cases} \xi_{n1} = H_n^{(1)}(k_1|z_1|) \left(\frac{z_1}{|z_1|}\right)^n + H_n^{(1)}(k_1|z_2|) \left(\frac{z_2}{|z_2|}\right)^{-n} + \\ (-1)^n H_n^{(1)}(k_1|z_3|) \left(\frac{z_3}{|z_3|}\right)^{-n} + \\ (-1)^n H_n^{(1)}(k_1|z_4|) \left(\frac{z_4}{|z_4|}\right)^n \\ \eta_{n1} = -J_n(k_3|z|) \left(\frac{z}{|z|}\right)^n \\ \zeta_1 = -\frac{i}{2\mu} [H_0^{(1)}(k_1|z-z_{01}|) + H_0^{(1)}(k_1|z-z_{02}|)] \\ \xi_{n2} = \frac{k_1 \mu_1}{2} (\phi_{n1} \cdot e^{i\theta} - \phi_{n2} \cdot e^{-i\theta}) \\ \eta_{n2} = -\frac{\mu_3 k_3}{2} [\psi_{n1} \cdot e^{i\theta} - \psi_{n2} \cdot e^{-i\theta}] \\ \zeta_2 = \frac{ik_1}{4} (\phi_1 \cdot e^{i\theta} + \phi_2 \cdot e^{-i\theta}) \end{cases}$$

为了求解方程式(11), 需在式(11)两边同乘  $e^{-im\theta}$ , 并在  $(-\pi, \pi)$  上积分, 则得到一系列的代数方程组:

$$\begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \xi_{mn1} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \eta_{mn1} = \zeta_{m1} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \xi_{mn2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \eta_{mn2} = \zeta_{m2} \end{cases}, \quad m = 0, \pm 1, \dots \quad (12)$$

其中:

$$\begin{cases} \xi_{mnl} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \xi_{nl} \cdot e^{-im\theta} d\theta, \eta_{mnl} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \eta_{nl} \cdot e^{-im\theta} d\theta \\ \zeta_{m1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \zeta_1 \cdot e^{-im\theta} d\theta, \xi_{mn2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \xi_{n2} \cdot e^{-im\theta} d\theta \\ \eta_{mn2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \eta_{n2} \cdot e^{-im\theta} d\theta, \zeta_{m2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \zeta_2 \cdot e^{-im\theta} d\theta \end{cases}$$

对方程组式(12)通过有项截断得到有限个未知数的方程组并求解。在本文算例中, 对于上述无穷代数方程组中的每一个级数分别选取 7 项即可很好满足预先给定的计算精度( $10^{-6}$ )。

因此, 可得本问题的 Green 函数:

$$G(z, z_0) = G^{(i)}(z, z_0) + G^{(s)}(z, z_0) \quad (13)$$

## 2 理论模型与分析

界面附近任意位置圆形夹杂的双相介质半空间模型如图 2 所示。直角空间 I 中介质的密度和剪切弹性模量分别为  $\rho_1$  和  $\mu_1$ , 直角空间 II 中相应的值为  $\rho_2$  和  $\mu_2$ 。其中介质 I、介质 II 中分别含半径为  $R_1$ 、 $R_2$  的圆形弹性夹杂, 其介质的密度和剪切弹性模量分别为  $\rho_3$  和  $\mu_3$  及  $\rho_4$  和  $\mu_4$ , 圆形夹杂圆心到水平边界和垂直界面的距离分别为  $h_1$ 、 $d_1$  和  $h_2$ 、 $d_2$ 。建立局部坐标系  $x_1O_1y_1$  和  $x_2O_2y_2$ , 其与整体坐标系  $xOy$  的关系为  $z_1 = z + d_1$ ,  $z_2 = z - d_2 - i(h_1 - h_2)$ 。

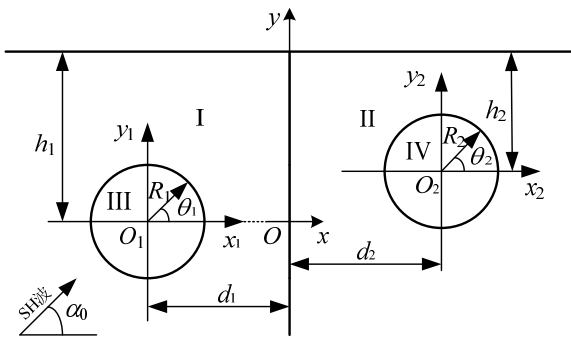


图 2 界面附近任意位置圆形夹杂的双相介质半空间模型  
Fig.2 Bi-material media model with circular inclusions of arbitrary positions near the interface in half space

对双相介质界面问题, 可利用“契合”方法研究, 即沿界面将其“剖分”为直角区域 I 和区域 II, 如图 3 所示。根据剖分面上连续性条件, 建立求解外力系的定解积分方程组。

由于自由表面及双相介质界面的存在, 仍需利用“镜像”法, 将其转化为全空间的界面问题求解。因此, 全空间中的等效入射波可以表示为:

$$W^{(i,e)} = W_0 \left\{ \exp \left\{ \frac{ik_1}{2} [ze^{-i\alpha_0} + \bar{z}e^{i\alpha_0}] \right\} + \exp \left\{ \frac{ik_1}{2} [(z - i2h_1)e^{-i\beta_0} + (\bar{z} - i2h_1)e^{i\beta_0}] \right\} \right\} \quad (14)$$

其中:  $\beta_0 = \pi - \alpha_0$ ;  $W_0$  为入射波的最大位移;  $\alpha_0$  为 SH 波的入射角度。

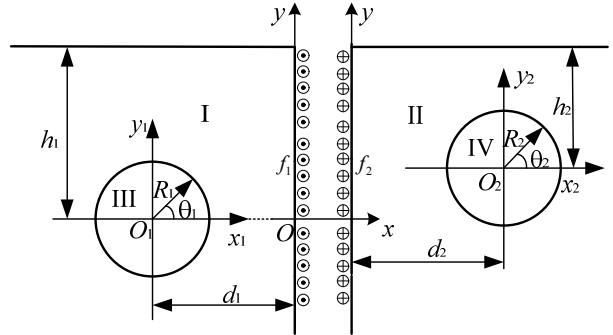


图 3 半空间双相介质界面的契合模型

Fig.3 Conjunction of bi-material media interface in half-space

在界面上产生的等效反射波和等效折射波分别表示为:

$$W^{(r,e)} = W_2 \left\{ \exp \left\{ \frac{ik_1}{2} [ze^{i\alpha_0} + \bar{z}e^{-i\alpha_0}] \right\} + \exp \left\{ \frac{ik_1}{2} [(z - i2h_1)e^{i\beta_0} + (\bar{z} - i2h_1)e^{-i\beta_0}] \right\} \right\} \quad (15)$$

$$W^{(f,e)} = W_4 \left\{ \exp \left\{ \frac{ik_2}{2} [ze^{-i\alpha_4} + \bar{z}e^{i\alpha_4}] \right\} + \exp \left\{ \frac{ik_2}{2} [(z - i2h_1)e^{-i\beta_1} + (\bar{z} - i2h_1)e^{i\beta_1}] \right\} \right\} \quad (16)$$

其中,  $\beta_1 = \pi - \alpha_4$ ,  $\alpha_4$  为界面处的折射角度。

SH 波作用下圆形夹杂产生的散射波场、驻波场的位移及应力表达式与点源函数作用下夹杂产生的散射波场、驻波场的位移和应力表达式形式相同。其待定系数, 由夹杂边界的连续性条件确定, 其解的过程与求解 Green 函数系数相同。

在“剖分”面上, 总位移和总应力分别为:

$$\begin{cases} W^{(I)} = W^{(i,e)} + W^{(r,e)} + W^{(Is)} \\ W^{(II)} = W^{(f,e)} + W^{(IIs)} \\ \tau_{\theta z}^{(I)} = \tau_{\theta z}^{(i,e)} + \tau_{\theta z}^{(r,e)} \\ \tau_{\theta z}^{(II)} = \tau_{\theta z}^{(f,e)} \end{cases} \quad (17)$$

其中,  $W^{(Is)}$ 、 $W^{(IIs)}$  分别是散射波场在区域 I、区域 II 剖面上产生的位移。

界面上的应力连续条件写成:

$$\tau_{\theta z}^{(I)} \sin \theta_0 + f_1(r_0, \theta_0) = \tau_{\theta z}^{(II)} \sin \theta_0 + f_2(r_0, \theta_0) \quad (18)$$

式中: 当  $\theta_0 = \beta_2 = -90^\circ$  时,  $0 \leq r < \infty$ ; 当  $\theta_0 = \beta_3 = 90^\circ$  时,  $0 \leq r \leq h_1$ 。

利用  $\tau_{\theta z}^{(i,e)} + \tau_{\theta z}^{(r,e)} = \tau_{\theta z}^{(f,e)}$ , 可得:

$$f_1(r_0, \theta_0) = f_2(r_0, \theta_0), \quad \theta_0 = \beta_2, \quad \beta_3 \quad (19)$$

界面上的位移连续条件为:

$$W^{(I)} + W^{(f_1)} = W^{(II)} + W^{(f_2)} \quad (20)$$

利用  $W^{(i,e)} + W^{(r,e)} = W^{(f,e)}$ , 则:

$$W^{(Is)} + W^{(f_1)} = W^{(IIs)} + W^{(f_2)} \quad (21)$$

其中:  $W^{(f_1)}$  表示作用于区域 I 剖面的附加外力系  $f_1(r_0, \theta_0)$  在界面任意一点引起的位移场;  $W^{(f_2)}$  表示作用于区域 II 剖面的附加外力系  $f_2(r_0, \theta_0)$  在界面任意一点引起的位移场。利用前面求得的 Green 函数, 并应用式(21), 求解未知外力系的定解积分方程可以表示为:

$$\int_0^{h_1} f_1(r_0, \beta_3)[G_1(r, \beta_3; r_0, \beta_3) + G_2(r, \beta_3; r_0, \beta_3)]dr_0 + \int_0^\infty f_1(r_0, \beta_2)[G_1(r, \beta_3; r_0, \beta_2) + G_2(r, \beta_3; r_0, \beta_2)]dr_0 = [W^{(IIs)} - W^{(Is)}]_{\theta=\beta_3} \quad (22)$$

$$\int_0^{h_1} f_1(r_0, \beta_3)[G_1(r, \beta_2; r_0, \beta_3) + G_2(r, \beta_2; r_0, \beta_3)]dr_0 + \int_0^\infty f_1(r_0, \beta_2)[G_1(r, \beta_2; r_0, \beta_2) + G_2(r, \beta_2; r_0, \beta_2)]dr_0 = [W^{(IIs)} - W^{(Is)}]_{\theta=\beta_2} \quad (23)$$

其中,  $G_1$ 、 $G_2$  是介质 I 和介质 II 中的 Green 函数。

上述定解积分方程组是含弱奇异性的第一类 Fredholm 方程组, 其奇异性表现为 Green 函数的像点与源点重合时, 被积核函数呈对数奇异性。求解该积分方程组的方法多种多样, 本文采用弱奇异性积分方程组直接离散法, 结合散射波的衰减特性, 把积分方程组转化为线性代数方程组, 求解出在一系列离散点上附加外力系  $f_1(r_0, \theta_0)$  和  $f_2(r_0, \theta_0)$  的值。

### 3 动应力集中系数(DSCF)

在介质 I 中, 圆形弹性夹杂的环向剪切应力为:

$$\tau_{\theta z}^{(I)} = \tau_{\theta z}^{(I1)} + \int_0^{h_1} f_1(r_0, \beta_3) \frac{\mu_1}{r} \frac{\partial G_1(r, \theta, r_0, \beta_3)}{\partial \theta} dr_0 + \int_0^\infty f_1(r_0, \beta_2) \frac{\mu_1}{r} \frac{\partial G_1(r, \theta, r_0, \beta_2)}{\partial \theta} dr_0 \quad (24)$$

其中:  $\tau_{\theta z}^{(I1)} = \tau_{\theta z}^{(i,e)} + \tau_{\theta z}^{(r,e)} + \tau_{\theta z}^{(s)}$ ,  $\tau_{\theta z}^{(s)}$  是介质 I 中  $r = R_1$  处产生的散射波应力。

圆形夹杂 III 环向动应力集中系数表达式可以写成:

$$\tau_{\theta z}^* = |\tau_{\theta z}^{(I)} / \tau_0| \quad (25)$$

其中,  $\tau_0 = \mu_1 k_1 W_0$  为入射应力的最大幅值。

### 4 算例和分析

本节给出了不同的材料组合时, 夹杂 III 动应力集中系数  $\tau_{\theta z}^*$  的变化情况, 并讨论了界面、自由边界及夹杂 IV 对夹杂 III 动应力集中系数的影响。本文所取参数均为无量纲的, 其中  $d_1 = d_2 = d$ ,  $h_1 = h_2 = h$ ; 圆形夹杂半径  $R_1 = R_2 = R = 1.0$ , 入射波数用  $k_1 R$  来表示; 与介质 I、介质 II、介质 III、介质 IV 相关的无量纲参数用  $\mu_1^* = \mu_2 / \mu_1$ ,  $\mu_2^* = \mu_3 / \mu_1$ ,  $\mu_3^* = \mu_4 / \mu_2$ ,  $k_1^* = k_2 / k_1$ ,  $k_2^* = k_3 / k_1$ ,  $k_3^* = k_4 / k_2$  来表示。算例中当  $k^* = 1.50$ ,  $\mu^* = 0.38$  时, 对应花岗岩含混凝土情况; 当  $k^* = 0.70$ ,  $\mu^* = 3.23$  时, 对应花岗岩含钢情况。

1) 图 4 给出  $k_1^* = 1.0$ ,  $\mu_1^* = 1.0$ ,  $k_2^* = 1.0$ ,  $\mu_2^* = 0.0$ ,  $k_3^* = 1.0$ ,  $\mu_3^* = 1.0$  这一极端情况且 SH 波垂直入射时,  $\tau_{\theta z}^*$  的分布情况。此时算例退化为无限半空间均匀介质中含圆形孔洞问题。当  $k_1 R = 0.1$ ,  $h/R = 12.0$ ,  $d/R = 12.0$  时, 其结果与文献[15]一致。由此证明了本文方法的正确性。

2) 图 5(a)~图 5(c)给出 SH 波水平入射时,  $\tau_{\theta z}^*$  的分布情况。取参数  $k_1^* = 2.0$ ,  $\mu_1^* = 1.0$ ,  $k_2^* = 1.5$ ,  $\mu_2^* = 0.38$ ,  $d = 1.5$ ,  $h = 12.0$ ,  $k_3^* = 0.7$ ,  $\mu_3^* = 3.23$ 。由图 5 中可以看出, 当 SH 波低频入射时, 含双夹杂时  $\tau_{\theta z}^*$  最大值较单夹杂时提高 6.0%, 而当中高频入射时, 其值分别提高 16.2%和 15.0%。说明当 SH

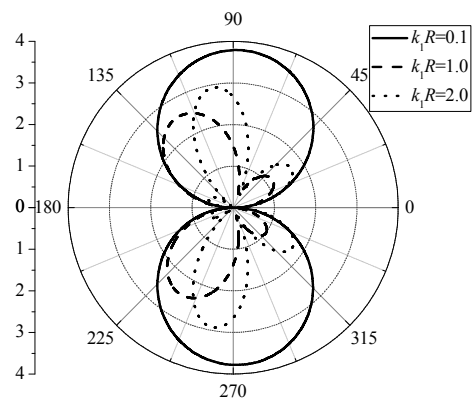


图 4 SH 波垂直入射到均匀介质时圆形孔洞周边动应力集中系数的分布情况  
Fig.4 Distribution of DSCF around hole edge in the homogeneous medium disturbed by SH-waves vertically

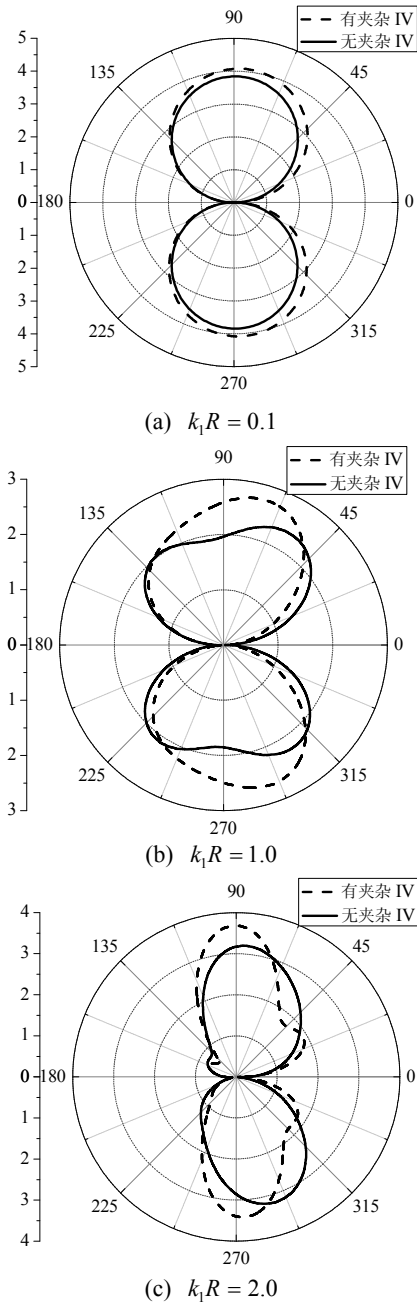


图 5 SH 波水平入射时夹杂周边动应力集中系数的分布  
Fig.5 Distribution of DSCF around inclusion edge disturbed by SH-waves horizontally

波以低频入射, 夹杂 IV 对夹杂 III 的  $\tau_{\theta z}^*$  影响较小, 而随着入射频率的增加, 夹杂 IV 对夹杂 III 的影响就越明显。

3) 图 6(a)~图 6(b)给出当夹杂距离自由边界较近时,  $\tau_{\theta z}^*$  的分布情况。取参数  $k_1^* = 2.0$ ,  $\mu_1^* = 1.0$ ,  $k_2^* = 1.5$ ,  $\mu_2^* = 0.38$ ,  $k_3^* = 0.7$ ,  $\mu_3^* = 3.23$ ,  $d = 1.5$ ,  $h = 12.0$ 。当 SH 波水平入射时, 圆形夹杂  $0^\circ \sim 180^\circ$  范围内  $\tau_{\theta z}^*$  值大于  $180^\circ \sim 360^\circ$  范围内的值, 且当 SH 波低频入射时,  $\tau_{\theta z}^*$  值相差并不明显; 当高频入射时,  $\tau_{\theta z}^*$  值相差较为明显。同时, 当 SH 波斜入射时

( $\alpha_0 = 45^\circ$ ),  $\tau_{\theta z}^*$  最大值均小于水平入射时  $\tau_{\theta z}^*$  值。由此也说明  $\tau_{\theta z}^*$  受入射角度的影响。

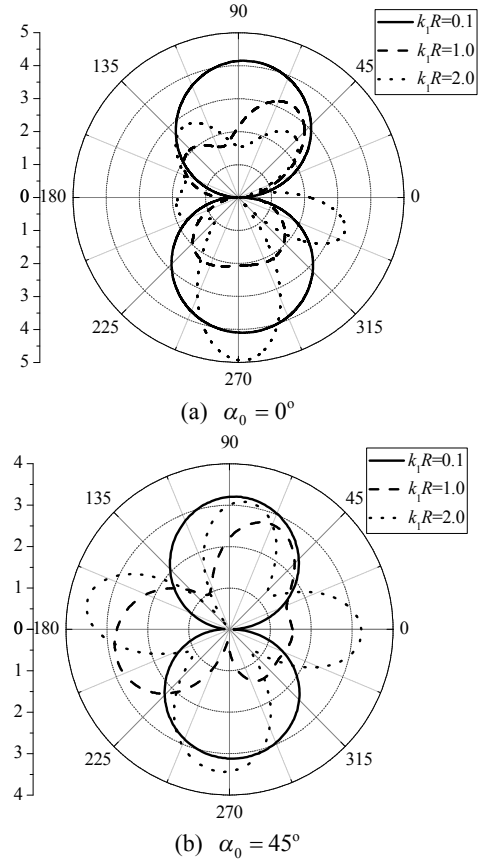


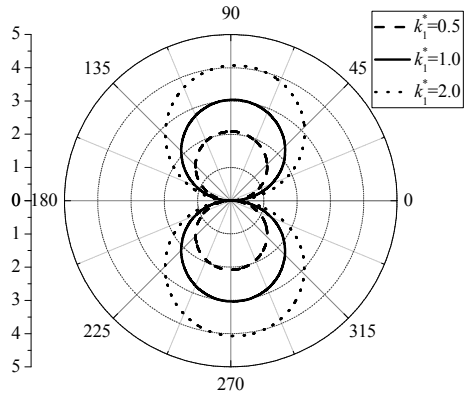
图 6 SH 波以不同角度入射时夹杂周边动应力集中系数的分布

Fig.6 Distribution of DSCF around inclusion edge disturbed by SH-waves with different incident angles

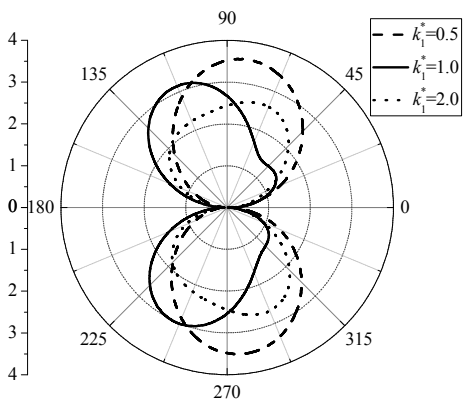
4) 图 7(a)~图 7(c)给出 SH 波水平入射时,  $\tau_{\theta z}^*$  的分布情况。取参数  $\mu_1^* = 1.0$ ,  $k_2^* = 1.5$ ,  $\mu_2^* = 0.38$ ,  $k_3^* = 0.7$ ,  $\mu_3^* = 3.23$ ,  $d = 1.5$ ,  $h = 12.0$ 。当 SH 波以低频入射时, 随着  $k_1^*$  的增加,  $\tau_{\theta z}^*$  值也增加, 即当 SH 波由硬介质入射到软介质时( $k_1^* > 1.0$ ),  $\tau_{\theta z}^*$  最大值增加且发生在  $\theta = 90^\circ$  处, 对比均匀介质( $k_1^* = 1.0$ )时增加 33.9%; 当 SH 波以波数  $k_1R = 1.0$  入射时,  $\tau_{\theta z}^*$  最大值发生在  $\theta = 82^\circ$  左右, 值为 3.57, 而当 SH 波以波数  $k_1R = 2.0$  入射时,  $\tau_{\theta z}^*$  最大值发生在  $\theta = 53^\circ$  左右, 值为 4.00, 且随着  $k_1^*$  的增加,  $\tau_{\theta z}^*$  最大值位置偏向双相介质界面处, 说明双相介质界面的影响不可以忽略。

5) 图 8(a)~图 8(c)给出 SH 波水平入射且夹杂距自由界面不同距离时,  $\tau_{\theta z}^*$  的分布情况。取参数  $k_1^* = 2.0$ ,  $\mu_1^* = 1.0$ ,  $k_2^* = 1.5$ ,  $\mu_2^* = 0.38$ ,  $k_3^* = 0.7$ ,  $\mu_3^* = 3.23$ ,  $d = 1.5$ 。当 SH 波低频入射且  $h = 1.5$ ,

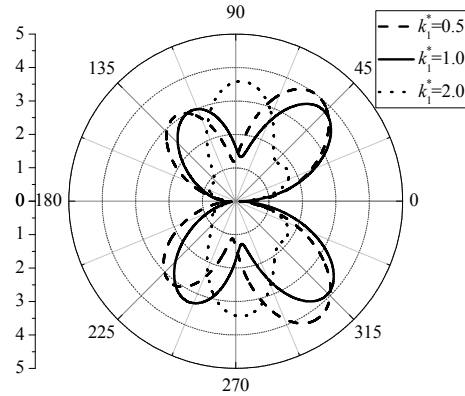
$h=3.0$  时对应  $\tau_{\theta z}^*$  值较  $h=6.0$  时的值分别提高 2.5%和 0.7%；而当 SH 波以中频入射时， $\tau_{\theta z}^*$  值分别提高 14.1%和 10.2%；高频入射时， $\tau_{\theta z}^*$  值分别提高 37.6%和 1.9%。说明当圆形夹杂距自由界面较近时，其动应力集中系数的值也会增加。



(a)  $k_1R = 0.1$



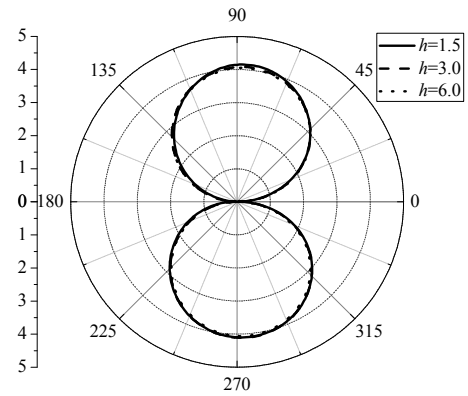
(b)  $k_1R = 1.0$



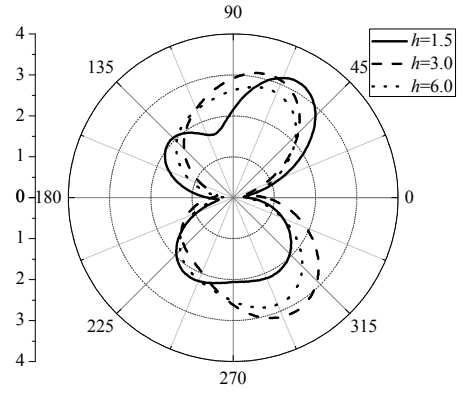
(c)  $k_1R = 2.0$

图 7 SH 波水平入射到不同双相介质时夹杂周边动应力集中系数的分布

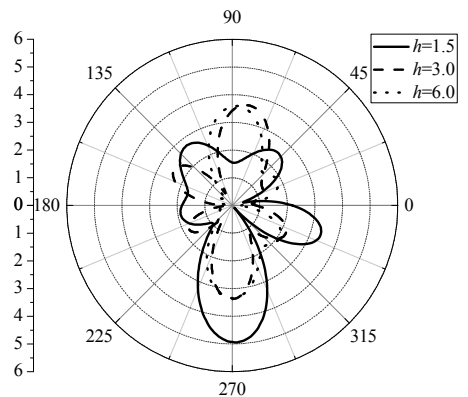
Fig.7 Distribution of DSCF around inclusion edge in different bi-media disturbed by SH-waves horizontally



(a)  $k_1R = 0.1$



(b)  $k_1R = 1.0$



(c)  $k_1R = 2.0$

图 8 SH 波水平入射时距自由界面不同距离的夹杂周边动应力集中系数的分布

Fig.8 Distribution of DSCF around inclusion edge with different distance from free interface disturbed by SH-waves horizontally

## 5 结论

本文采用 Green 函数及复变函数方法求解了双相介质无限半空间界面附近任意位置圆形弹性夹杂对 SH 波的散射问题。总结算例，我们可以得到以下结论：

(1) 半空间中各种缺陷、自由边界、入射波数以及入射角度等因素对夹杂动应力集中系数均有影响, 故应予以重视。同时, 本文算例结果可以为设计及工程实践提供理论和数值参考。

(2) 本文介质参数只是取花岗岩中含混凝土及花岗岩中含钢的情况进行讨论, 对于其他介质参数, 本文方法同样适用。

#### 参考文献:

- [1] Wong H L, Trifunac M D. Surface motion of a semi-elliptical alluvial valley for incident plane SH waves [J]. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1974, 64(5): 1389—1408.
- [2] Chen J T, Chen P Y, Chen C T. Surface motion of multiple alluvial valleys for incident plane SH-waves by using a semi-analytical approach [J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2008, 28: 58—72.
- [3] 齐辉, 王艳, 刘殿魁. 半无限空间界面附近 SH 波对圆形衬砌的散射[J]. *地震工程与工程振动*, 2003, 23(3): 41—46.  
Qi Hui, Wang Yan, Liu Diankui. Dynamic analysis of shallow-embedded lining structure by incident SH-wave [J]. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 2003, 23(3): 41—46. (in Chinese)
- [4] 陈志刚, 刘殿魁. SH 波冲击下浅埋任意形孔洞的动力分析[J]. *地震工程与工程振动*, 2004, 24(4): 32—36.  
Chen Zhigang, Liu Diankui. Dynamic response on a shallowly buried cavity of arbitrary shape impacted by vertical SH-wave [J]. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 2004, 24(4): 32—36. (in Chinese)
- [5] 刘刚, 李宏亮, 刘殿魁. SH 波对浅埋裂纹的半圆形凹陷地形的散射[J]. *爆炸与冲击*, 2007, 27(2): 171—178.  
Liu Gang, Li Hongliang, Liu Diankui. Scattering of a semi-cylindrical canyon and a crack with incident SH waves [J]. *Explosion and Shock Waves*, 2007, 27(2): 171—178. (in Chinese)
- [6] Liang Jianwen, Luo Hao, Vincent W Lee. Diffraction of plane SH waves by a semi-circular cavity in half-space [J]. *Earthquake Science*, 2010, 23: 5—12.
- [7] 齐辉, 折勇, 李宏亮. SH 波入射时垂直半空间中双相介质界面附近圆孔的动力分析[J]. *爆炸与冲击*, 2009, 29(1): 73—79.  
Qi Hui, Shi Yong, Li Hongliang. Dynamic analysis for scattering of SH-wave by circular cavities near bimaterial interfaces in a vertical half-space [J]. *Explosion and Shock Waves*, 2009, 29(1): 73—79. (in Chinese)
- [8] 南景福, 齐辉, 折勇. 垂直半空间界面裂纹及附近圆孔对 SH 波的散射[J]. *工程力学*, 2009, 26(5): 245—250, 256.  
Nan Jingfu, Qi Hui, She Yong. Scattering of SH-wave by interface crack and neighboring circular cavity in bi-material vertical half-space [J]. *Engineering Mechanics*, 2009, 26(5): 245—250, 256. (in Chinese)
- [9] 刘殿魁, 刘宏伟. SH 波散射与界面圆孔的动应力集中[J]. *力学学报*, 1998, 30(5): 597—604.  
Liu Diankui, Liu Hongwei. Scattering and dynamic stress concentration of SH-wave by interface circular hole [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 1998, 30(5): 597—604. (in Chinese)
- [10] 史守峡, 刘殿魁. SH 波与界面多圆孔的散射及动应力集中[J]. *力学学报*, 2001, 33(1): 60—70.  
Shi Shouxia, Liu Diankui. Dynamic stress concentration & scattering of SH-wave by interface multiple circle canyons [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2001, 33(1): 60—70. (in Chinese)
- [11] 刘殿魁, 杨在林, 刘建百. 界面可移动圆柱形刚性夹杂对 SH 波散射及动应力集中[J]. *哈尔滨建筑大学学报*, 2001, 34(6): 1—7.  
Liu Diankui, Yang Zailin, Liu Jianbai. Scattering and dynamic stress concentration of SH-wave by removable rigid cylindrical interface inclusion [J]. *Journal of Harbin University of Civil Engineering & Architecture*, 2001, 34(6): 1—7. (in Chinese)
- [12] 刘殿魁, 史守峡. 界面上圆形衬砌结构对平面 SH 波散射[J]. *力学学报*, 2002, 34(5): 796—803.  
Liu Diankui, Shi Shouxia. The Scattering of plane SH-wave by circular interface cavity with lining [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2002, 34(5): 796—803. (in Chinese)
- [13] 刘殿魁, 林宏. SH 波对双相介质界面附近圆形孔洞的散射[J]. *固体力学学报*, 2003, 24(2): 197—204.  
Liu Diankui, Lin Hong. Scattering of SH-waves by circular cavities near bimaterial interface [J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2003, 24(2): 197—204. (in Chinese)
- [14] Shi Wenpu, Liu Diankui, Song Yongtao. Scattering of circular cavity in right-angle plane space to steady SH-wave [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2006, 27(12): 1619—1626.
- [15] 林宏, 刘殿魁. 半无限空间中圆形孔洞周围 SH 波的散射[J]. *地震工程与工程振动*, 2002, 22(2): 9—16.  
Lin Hong, Liu Diankui. Scattering of SH-wave around a circular cavity in half space [J]. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 2002, 22(2): 9—16. (in Chinese)