生态与农村环境学报 2011，27（6）：26－31
Journal of Ecology and Rural Environment

基于合作博弈的流域水污染治理成本分摊研究

赖 苹[1,2①]，曹国华[1]，朱 勇[2] （1. 重庆大学经济与工商管理学院，重庆 400030；2. 重庆师范大学经济与管理学院，重庆 401331）

摘要： 运用合作博弈理论，针对流域水污染治理的成本分摊问题构造成本分摊博弈，在传统的夏普利值解的基础上，提出运用新提出但更具有普适性的二项式半值解的概念。以长江流域三峡库区相邻的3个行政区域——忠县、万州、云阳作为研究对象，以化学需氧量作为水质指标，在考虑联盟结构的情况下，通过多重线性扩展方法进行求解。研究结果满足二项式半值特征函数要求具备的超可加性、集体理性和个体理性3个条件，流域水污染治理成本在3个地区间进行了公平合理的分摊，证明了该方法的有效性。

关键词： 流域水污染；合作博弈；成本分摊；二项式半值；联盟结构

中图分类号： X321；F224.32 **文献标志码：** A **文章编号：** 1673－4831(2011)06－0026－06

Cost Sharing of Watershed Water Pollution Abatement Based on Cooperative Game.
LAI Ping[1,2], *CAO Guo-hua*[1], *ZHU Yong*[2] (1. School of Economics and Business Administration, Chongqing University, Chongqing 400030, China; 2. School of Economics and Management, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: Using the theory of cooperative game, the problem of cost sharing in watershed water pollution abatement was transformed into a cost sharing game. On the basis of the traditional Shapley value method, a new but more universal concept of binomial semivalue solution was brought forth and adopted. The three adjacent administration regions in the Three-Gorge Reservoir on the Yangtze River were set as research objects and chemical oxygen demand (COD) as water quality index. The problem was solved with the multilinear extension method, taking into account its coalition structure. Results show that the solution satisfied the three conditions, i. e. super-additivity, individual rationality and collective rationality, that a characteristic function of binomial semivalue must have, and that the cost of watershed water pollution abatement was fairly and reasonably allocated among the districts, which validates the effectiveness of this method.

Key words: watershed water pollution; cooperative game; cost sharing; binomial semivalue; coalition structure

我国近3成的国土面积分布在10大流域内，涉及近千条大小不等的河流。随着城市化进程的加快，城市污水排放量日益剧增。据统计，我国工业和城市生活污水总排放量已从1980年的315亿t增至2010年的1 050亿t，90%以上的城市水域受到不同程度的污染，部分河道的污染已达到危害居民健康的程度，给国家经济和社会生活造成极大危害。流域水污染已经成为我国目前面临的最严重的环境问题之一，采取各种行之有效的措施解决当前水环境治理问题已经刻不容缓。目前，我国流域水污染治理更多的还是停留在传统治理方式——属地治理上，但由于流域污染属于区域公共问题，单一政府治理无法根本有效解决。因此，近年来各地区政府开始从自身发展和实际需要出发就流域水污染治理问题展开合作。合作过程中一些问题逐渐暴露出来，分歧之一就是各地区一直没有找到切实有效的办法对污染治理成本进行合理分摊，这就涉及到2个问题：(1)污染治理成本应该由谁负责承担？(2)污染治理成本如何在污染承担方之间进行分摊？问题(1)很容易回答：一般来说，谁污染谁负责。然而，问题(2)的答案就不那么明确，即如何公平地在为污染负责的参与人之间进行合理分摊。

从经济学的角度来看，由于流域是一个空间整体性极强、关联度很高的区域，流域内各地区之间的相互制约和相互影响极为显著，只有各地区紧密合作，水污染治理才能够实现效益最大化，因此运用合作博弈来解决流域水污染治理中的成本分摊问题是可行的。当前合作博弈使用最多、也相对成熟的解是夏普利值(Shapley value)，其主要思想是每个参与人所应承担的成本或所应获得的得益等于该参与人对每一个他所参与的联盟的边际贡献的平均值。CASTANO-PARDO等[1]将夏普利值用于研究高速

收稿日期： 2011－07－23

基金项目： 国家社会科学基金(10XJY0020)；重庆市教委科学技术研究项目(KJ110603)

① 通信作者 E-mail：lpcaroline2003@126.com

公路建设和维护费用分配问题；KATTUMAN 等[2]将其用来解决电网成本的分摊问题；MUTUSWAMI[3]提出了基于 Dutta-Ray 平均解的二元成本分摊模型。国内学者中，李军等[4]将夏普利值运用到易腐性产品的运输设施选择的费用分配问题上；李娟等[5]将夏普利值用于供应链上信息共享价值的分配；鲍新中等[6]利用夏普利值解决第 3 方物流供应成本分摊问题等等。夏普利值适用于将局中人可能构成的所有联盟考虑在内，但在实际中，局中人有些联盟是不起作用的，或者说是不现实的，从而使该解的应用受到限制。正是由于夏普利值的缺陷，学者们开始对该方法作了很多尝试性的改进，提出了如欧文值（Owen value）、班茨哈夫-科莱曼权力指数（Banzhaf value）、半值（semivalue）、二项式半值（binomial semivalue）等解的概念。针对夏普利值没有考虑大联盟的分割对成本分摊造成的影响，Owen 值主要用来研究大联盟内部存在多个决定了事前合作的子联盟的分配问题[7]。VAZQUEZ-BRAGE 等[8]考虑在来自不同航空公司的飞机于机场降落构成的机场博弈中，引入 Owen 值来计算机场跑道成本分摊问题，结果发现几个公司合并起来组成航空集团后会节约成本分摊的支出。Banzhaf 值与夏普利值的不同在于权重设置，夏普利值各项的权重与联盟的个数有关，Banzhaf 值将各项的权重都统一设置为 2^{1-n}，当存在一些不起作用的联盟时，Banzhaf 值更具有适用性[9]。但夏普利值是基于局中人边际贡献的唯一预期支付，而 Banzhaf 值不具有唯一性，也不一定是有效分配，于是学者们又提出了半值、二项式半值的概念。CARRERAS 等[10]研究分析了半值作为权利指数的相关理论，CARRERAS 等[11]运用二项式半值分析了联盟形成的效果，ALONSO-MEIJIDE 等[12]则将二项式半值扩展为对称联盟二项式半值并进行公理化刻画。

上述分析表明，国内有关合作博弈理论的研究更多的还是停留在运用夏普利值这一较成熟的解来研究成本分摊问题，国外研究虽然较国内更趋成熟，但国外学者主要侧重在合作博弈理论的研究，将理论运用到具体领域的文献较少。鉴于国内外文献鲜有将合作博弈理论运用在流域水污染治理领域，并综合考虑合作博弈理论各种解的特点及适用范围，笔者拟采用二项式半值这一最新合作博弈解的概念，同时借鉴 Owen 值考虑局中人事先形成子联盟情形的解的思路，提出建立具有联盟结构的二项式半值解，针对流域水污染治理成本分摊实际，求解出流域内各个合作局中人应该合理分摊到的成本。

1　二项式半值

1.1　概念

半值[13]概念首先是由 Dubey 于 1981 年提出，他认为具有相同规模的联盟应该有相同的发生概率，把它用在成本分摊博弈 (N,C) 中，可得

$$\sigma_i(N,C)=\sum_{\substack{S\subseteq N\\ i\in S}}P_s[C(S)-C(S\backslash\{i\})],i\in N,s=|S|。\tag{1}$$

式(1)中，$\sigma_i(N,C)$ 称作半值；N 为全体局中人集合；S 为其中任意一个非空子集；$|S|$ 为联盟 S 中所含局中人的个数；C 为定义在局中人集合上的特征函数；$C(S)$ 为联盟 S 中每个局中人需要支付的成本之和，$C(S\backslash\{i\})$ 为联盟 S 除去 i 后的合作成本；P_s 为权重系数，有

$$\sum_{s=1}^{n}\binom{n-1}{s-1}P_s=1,0\leqslant P_s\leqslant 1,1\leqslant s\leqslant n。$$

假设权重系数具有几何级数形式 $P_{s+1}=kP_s(1\leqslant s\leqslant n-1,k>0)$，其中，$k=\alpha/(1-\alpha)$，$0<\alpha<1$，可得

$$\sum_{s=1}^{n}\binom{n-1}{s-1}P_s=P_1\sum_{s=1}^{n}\binom{n-1}{s-1}k^{s-1}=P_1(1+k)^{n-1}=1。$$

因此，$P_1=(1-\alpha)^{n-1}$，$P_s=\alpha^{s-1}(1-\alpha)^{n-s}$，$0\leqslant\alpha\leqslant 1$，$2\leqslant s\leqslant n$。将由此计算出的结果作为每个局中人贡献值的权重，从而得到的半值称为二项式半值[14]。由此，式(1)可变换为

$$\sigma_i(N,C)=\sum_{\substack{S\subseteq N\\ i\in S}}\alpha^{s-1}(1-\alpha)^{n-s}[C(S)-C(S\backslash\{i\})],i\in N,s=|S|。\tag{2}$$

式(2)中，当 $\alpha=0$ 时，$\sigma_i(N,C)=C(\{i\})$，$i\in N$；当 $\alpha=1$ 时，$\sigma_i(N,C)=C(N)-C(N\backslash\{i\})$，$i\in N$。

参数 α 在 0～1 之间取值，反映出局中人愿意组成联盟的几何变化趋势。α 越小，局中人越不愿意形成联盟；α 越大，局中人更倾向于形成大规模的联盟。可见，夏普利值和 Banzhaf 值都属于二项式半值的一种，夏普利值是基于具有相同排序的局中人的边际贡献都应有相同的权重 $1/\left[n\binom{n-1}{s-1}\right]$，Banzhaf 值是基于每一边际贡献的权重都等于 2^{1-n}。

要使该合作能够成立，二项式半值的特征函数需要满足 3 个条件：(1)超可加性。联盟中各局中人一起行动至少可以做得与局中人分开单独行动一样好，如果一个联盟不满足超可加性，那么其成员没有动机形成联盟，即无法形成合作博弈的基础。

(2)集体理性。每个局中人分配的支付总和应当与联盟总成本相等,否则将会有一部分费用无人承担,通常也被称为帕累托最优性条件。(3)个体理性。联盟中各局中人分配到的成本不大于单独经营所分配到的成本,即分配必须使每个人都能得到更多的好处,否则将有个体不愿参加联盟。满足上述条件的成本分配方案的解被认为在合作博弈(N,C)中是稳定的,从而证明该方案是可行的。

1.2 求解

Owen 在 1972 年提出的多重线性扩展(multilinear extension, MLE)方法可用来求解二项式半值[15]。假设函数$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是成本分摊博弈的 MLE,即

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{S\subseteq N}\prod_{j\in S}x_j\prod_{k\notin S}(1-x_k)C(S),$$

其梯度算子为

$$\nabla f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)。$$

每个局中人所分摊到的成本可以表示为$(\boldsymbol{\sigma}_{\alpha_j})_i(N,C)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{\alpha}_j)$,其中,$\bar{\alpha}_j=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$。可以通过矩阵乘积计算得到全部分配向量:$\boldsymbol{\sigma}(N,C)=\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{\Lambda}$。其中,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, $b_{ij}=(\boldsymbol{\sigma}_{\alpha_j})_i(N,C)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{\alpha}_j)$, $\boldsymbol{\Lambda}^t=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$。

$\boldsymbol{B}$ 为在博弈中不同规模下的二项式半值共同组成的矩阵,称为参照系统,$\boldsymbol{\Lambda}$ 为二项式半值组成的参照系统的系数矩阵。由于α取值不同,将会得到不同规模下的二项式半值,存在系数$\lambda_j(1\leqslant j\leqslant n)$,使得最终局中人分摊值为 $\boldsymbol{\sigma}=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\boldsymbol{\sigma}_{\alpha_j}$, 其中,$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1$。

2 具有联盟结构的二项式半值

2.1 概念

局中人在权衡利弊后常常会在大联盟中作出自发形成小联盟的决定,使得大联盟被分割成若干个子联盟,它会对分摊结果带来影响。假设$B(N)$表示局中人 N 中各种分割的集合,每种分割的 $B\in B(N)$。假设 $B=\{B_1,B_2,\cdots,B_m\}$,为局中人集合的某一联盟结构,$M=\{1,2,\cdots,m\}$,表示B的指标集,满足子集非空性和不相交性,即 $\cup_{k=1}^{m}B_k=N$,且 $B_k\cap B_l=\varnothing,k,l\in\{1,2,\cdots,m\},k\neq l$。当每个局中人独自构成一个联盟时,则形成最琐碎的联盟结构,即 $B^n=\{\{1\},\{2\},\cdots,\{n\}\}$;当大联盟形成时,则 $B^n=\{N\}$。在联盟结构中,自然形成二级博弈,可表示为(N,C,B),第 1 阶段博弈是子联盟之间的博弈,第 2 阶段博弈是各子联盟内部局中人之间的博弈。假设每个局中人分摊的成本为$\boldsymbol{\sigma}_i(N,C,B)$,则联盟结构中求解成本的二项式半值可表示为[16]

$$\boldsymbol{\sigma}_i(N,C,B)=\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\lambda_p\lambda_q\Big\{\sum_{S\subseteq B_j\setminus\{i\}}\sum_{T\subseteq M\setminus\{j\}}\alpha_p{}^s\alpha_q{}^t(1-\alpha_p)^{b_j-s-1}\times(1-\alpha_q)^{m-t-1}[C(B_t\cup S\cup\{i\})-C(B_t\cup S)]\Big\},i\in B_j,B_j\in B。$$

若令 $a_{p,q}(i,C,B)=\sum_{S\subseteq B_j\setminus\{i\}}\sum_{T\subseteq M\setminus\{j\}}\alpha_p{}^s\ \alpha_q{}^t(1-\alpha_p)^{b_j-s-1}\times(1-\alpha_q)^{m-t-1}[C(B_t\cup S\cup\{i\})-C(B_t\cup S)]$,则形成矩阵:$\boldsymbol{A}(i)=[a_{p,q}(i)],1\leqslant p,q\leqslant n$。由此可得

$$\boldsymbol{\sigma}_i(N,C,B)=\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\lambda_p\lambda_q a_{p,q}(i,C,B)=\sum_{q=1}^{n}\Big[\sum_{p=1}^{n}\lambda_p a_{p,q}(i,C,B)\Big]\lambda_q=\boldsymbol{\Lambda}^t\boldsymbol{A}(i)\boldsymbol{\Lambda}。$$

2.2 求解

在联盟结构中,利用多重线性扩展 MLE 来求解$\boldsymbol{A}(i)$。首先用函数$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$表示成本分摊博弈。对于 $m\in B_t,t\in M,t\neq j$,用 y_t 代替 x_m,其中,如果出现 $y_t{}^r(r>1)$,则用 y_t 代替,由此得到一个关于 x_k 和 y_t 的新函数 $g_j(x_k,y_t)$:

$$g_j[(x_k)_{k\in B_j},(y_t)_{t\neq j}]=\sum_{S\subseteq B_j}\sum_{T\subseteq M\setminus\{j\}}\Big[\prod_{k\in S}x_k\prod_{k\in B_j\setminus S}(1-x_k)\times\prod_{t\in T}y_t\prod_{t\notin T\cup\{j\}}(1-y_t)\Big]C(B_t\cup S)。$$

求解 $g_j(x_k,y_t)$ 关于 x_i 的偏导数,可得

$$\frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x_k,y_t)=\sum_{S\subseteq B_j\setminus\{i\}}\sum_{T\subseteq M\setminus\{j\}}\Big[\prod_{k\in S}x_k\prod_{k\in\{B_j\setminus\{i\}\}\setminus S}(1-x_k)\times\prod_{t\in T}y_t\prod_{t\notin T\cup\{j\}}(1-y_t)\Big]\times C[(B_t\cup S\cup\{i\})-C(B_t\cup S)]。$$

用 α_p 代替 x_k,用 α_q 代替 y_t,则有

$$\frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\bar{\alpha}_p,\bar{\alpha}_q)=\sum_{S\subseteq B_j\setminus\{i\}}\sum_{T\subseteq M\setminus\{j\}}\alpha_p{}^s(1-\alpha_p)^{b_j-s-1}\alpha_q{}^t(1-\alpha_q)^{m-t-1}\times[C(B_t\cup S\cup\{i\})-C(B_t\cup S)]。$$

可以看出,$\frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\bar{\alpha}_p,\bar{\alpha}_q)=a_{p,q}(i),1\leqslant p,q\leqslant n$,因此,$\boldsymbol{\sigma}_i(N,C,B)=\boldsymbol{\Lambda}^t\boldsymbol{A}(i)\boldsymbol{\Lambda}$。

3 流域水污染治理成本分摊

3.1 几个基本假定

假定 1:采用河流分段的方法,将河流按照行政

区域分段，每一河段的水文条件基本上保持一致，流速为 0.5 m · s^{-1}，以各河段的起始断面作为水质控制断面。

假定 2：污染物间接不影响。它是指上游地区只对其下游地区的环境质量产生直接影响，而不对其下游地区以下的地区环境产生直接影响，下游水质也不会对上游产生任何影响。因此，河流每个断面的水质状态都可以视为上游排放的污染物和本区域排放的污染物共同影响的结果。

假定 3：河流中污染物主要以有机污染物为主。实际河流中污染物主要包括有机污染物和无机污染物 2 种，无机污染物一般只随水进行迁移和简单的状态转化，而通常所说的污染物主要指有机污染物。大量有机物排入水体，在水体中进行氧化分解，使水中溶解氧不断消耗而缺氧，造成鱼类甚至原生动物死亡，细菌大量繁殖，生态循环遭到破坏。因此，笔者假定河流污染主要来源于有机污染物。

3.2　研究对象

选取长江流域忠县至云阳所辖河段作为实证研究的对象，该河段处于三峡库区的腹地，包括忠县、万州、云阳 3 个行政区域。三峡工程的修建使得库区河段水深加大，流速放缓，泥沙淤积，河流纳污能力削弱，治理污染任务更加紧迫而艰巨。

选取化学需氧量（COD）作为代表性的水质指标，COD 往往作为衡量水中有机物质含量多少的指标。COD 越大，说明水体受有机物的污染越严重。作为衡量河流污染程度指标的 COD 计算公式为：COD 排放质量浓度 = COD 排放量/废水量。

3.3　联盟与特征函数

3.3.1　联盟

将长江流域 3 个地区忠县、万州、云阳分别记为局中人 1、2、3，局中人集合记为 $N=\{1,2,3\}$。地区间形成联盟是因为存在污染转嫁，未相邻地区因为彼此无影响，联盟失去意义，因此只有相邻地区才会考虑形成联盟，即所有可能的联盟 $S=\{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$。

3.3.2　特征函数

假定各地区污水排放需要收取的费用为污染治理成本。由于采用 COD 作为污染指标，为了计算所有联盟的排污费收费额度，需求出各地区的 COD 排放浓度。对于每一河段，COD 指标实际上受到来自上游地区和本地区废水排放的共同影响（假定起始段忠县不受上游的影响）。

（1）受本地区排放影响的各地区 COD 排放浓度

各地区受本地区排放影响的 COD 排放浓度见表 1。

表 1　各地区受本地区排放影响的 COD 排放浓度

Table 1　COD emission concentration of every district affected by the discharge of this district

地区	废水量/亿 L	COD 排放量/t	ρ(COD 排放)/(mg · L^{-1})
忠县	125.83	2 007.10	159.51
万州	524.85	1 371.80	26.14
云阳	189.98	1 548.00	81.48

各项指标的统计均包括城镇生活污水和工业污染源废水排放。数据依据《2008 年长江三峡工程生态与环境监测公报》计算得到。

（2）受上游地区排放影响的各地区 COD 排放浓度

在河流流态稳定时，河流中有机物 COD 由于生物降解所产生的浓度变化可以用一级反应式[17]表达：

$$C = C_0\left[\exp\left(-K_r\frac{x}{u_x}\right)\right]。\tag{3}$$

式(3)中，C 为河流任意断面处有机物剩余 COD，mg · L^{-1}；C_0 为起始断面处有机物 COD，mg · L^{-1}；x 为距离起始断面（排放点）的距离，m；u_x 为河流平均流速，m · s^{-1}；K_r 为河流中 COD 衰减速度常数，它可以由式(6)[20]确定：

$$K_r = \frac{1}{t}\ln\left(\frac{L_A}{L_B}\right)。\tag{4}$$

式(4)中，L_A、L_B 分别表示河流上游断面 A、下游断面 B 处的 COD 质量浓度，mg · L^{-1}；t 为水流从上游断面 A 流经下游断面 B 所需时间，s。各地区受上游地区排放影响的 COD 排放浓度见表 2。

表 2　各地区受上游地区排放影响的 COD 排放浓度

Table 2　COD emission concentrations of every district affected by the discharge from the upstream district

地区	距离上游地区距离/km	ρ(COD 排放)/(mg · L^{-1})
忠县		
万州	82	26.13
云阳	10	81.48

各项指标的统计均包括城镇生活污水和工业污染源废水排放。数据依据《2008 年长江三峡工程生态与环境监测公报》计算得到。

（3）各地区 COD 排放浓度

根据各地区 COD 排放浓度受上游地区和本地区排放的影响可以得到矩阵 $\boldsymbol{A}$：

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 159.51 & 0 & 0 \\ 26.13 & 26.14 & 0 \\ 0 & 81.48 & 81.48 \end{pmatrix}。$$

其中,每一列数据表示各地区排放对本地区和下游地区 COD 排放浓度的影响,每一行数据表示各地区 COD 排放浓度受上游地区和本地区排放的影响。

(4)特征函数

国家发展计划委员会、财政部、原国家环境保护总局、国家经济贸易委员会于 2003 年联合发布的《排污费征收标准管理办法》规定,污水排污费按排污者排放污染物的种类、数量以污染当量计征,每一污染当量征收标准为 0.7 元,以 COD 作为主要污染指标,排污收费计算公式为:污水排污费收费额 = COD 污染当量数 ×0.7 元 = COD 排放量/COD 污染当量值 ×0.7 元(其中 COD 污染当量值为 1 kg) = COD 排放量 ×0.7 元 = COD 排放浓度 × 废水量 × 0.7 元。由此可以计算出各地区单独治污的治理成本(元),用矩阵 $\boldsymbol{C}$ 表示为

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,404\,980 \\ 1\,920\,374 \\ 2\,167\,140 \end{pmatrix}。$$

同理,可以得到局中人形成的联盟的治污成本。$C(\{1\})$、$C(\{2\})$、$C(\{3\})$、$C(\{1,2\})$、$C(\{2,3\})$ 和 $C(\{1,2,3\})$ 联盟的特征函数值分别为 1 404 980、1 920 374、2 167 140、2 365 230、4 086 611和 3 448 830 元。

从以上数据可以看出, $C(\{1\}) + C(\{2\}) > C(\{1,2\})$, $C(\{2\}) + C(\{3\}) > C(\{2,3\})$, $C(\{1\}) + C(\{2\}) + C(\{3\}) > C(\{1,2,3\})$,表示无论是 2 个地区还是 3 个地区形成联盟,合作的成本都要低于各地区单独治理需要耗费的成本之和,证明该结果满足特征函数要求的超可加性条件,局中人展开合作比不合作要划算。但一旦地区间形成联盟,如何进行治污成本分摊,就需要作进一步求解。

3.4 成本分摊

假设万州、云阳 2 个地区事先通过协商决定形成一个子联盟,忠县未参与任何联盟,于是形成 $B = \{B_1, B_2\} = \{\{1\}, \{2,3\}\}$ 的联盟结构。在此情况下,为得到 3 个地区分摊的成本值,利用二项式半值解作如下计算。

首先通过多重线性扩展方法将局中人形成的所有联盟用函数 $f(x_1,x_2,x_3)$ 表示为

$$f(x_1,x_2,x_3) = 1\,404\,980x_1 + 1\,920\,374x_2 + 2\,167\,140x_3 - 960\,124x_1x_2 - 3\,572\,120x_1x_3 - 903x_2x_3 + 2\,489\,483x_1x_2x_3。$$

(1)子联盟 B_1 中局中人 1 的参照系统

$$g(x_1,y_2) = 1\,404\,980x_1 + 4\,087\,514y_2 - 4\,532\,244x_1y_2 - 903{y_2}^2 + 2\,489\,483x_1{y_2}^2,$$

由于函数 $g(x_1,y_2)$ 中出现 ${y_2}^2$,用 y_2 代替,从而得到一个关于 x_1 和 y_2 的新函数 $g'(x_1, y_2)$:

$$g'(x_1,y_2) = 1\,404\,980x_1 + 4\,086\,611y_2 - 2\,042\,761x_1y_2。$$

对新函数 $g'(x_1,y_2)$ 中的 x_1 求偏导,可得

$$\frac{\partial g'}{\partial x_1}(x_1,y_2) = 1\,404\,980 - 2\,042\,761y_2。$$

用 α_p 代替 x_1,用 α_q 代替 y_2, 则有

$$\frac{\partial g'}{\partial x_1}(\bar{\alpha}_p,\bar{\alpha}_q) = 1\,404\,980 - 2\,042\,761\bar{\alpha}_q。$$

取 $\alpha = 1/6$、$1/2$、$5/6$, 得到局中人 1 的参照系统:

$$\boldsymbol{A}(1) = \begin{pmatrix} 1\,064\,520 & 1\,064\,520 & 1\,064\,520 \\ 383\,600 & 383\,600 & 383\,600 \\ -297\,321 & -297\,321 & -297\,321 \end{pmatrix}。$$

(2)子联盟 B_2 中局中人 2 的参照系统

$$g(y_1,x_2,x_3) = 1\,404\,980y_1 + 1\,920\,374x_2 + 2\,167\,140x_3 - 960\,124y_1x_2 - 3\,572\,120y_1x_3 - 903x_2x_3 + 2\,489\,483y_1x_2x_3,$$

对函数 $g(y_1,x_2,x_3)$ 中的 x_2 求偏导,可得

$$\frac{\partial g}{\partial x_2}(y_1,x_2,x_3) = 1\,920\,374 - 960\,124y_1 - 903x_3 + 2\,489\,483y_1x_3。$$

用 α_p 代替 x_3,用 α_q 代替 y_1, 则有

$$\frac{\partial g}{\partial x_2}(\bar{\alpha}_p,\bar{\alpha}_q) = 1\,920\,374 - 960\,124\bar{\alpha}_q - 903\bar{\alpha}_p + 2\,489\,483\bar{\alpha}_q\bar{\alpha}_p。$$

取 $\alpha = 1/6$、$1/2$、$5/6$, 得到局中人 2 的参照系统:

$$\boldsymbol{A}(2) = \begin{pmatrix} 1\,829\,355 & 1\,967\,359 & 2\,105\,362 \\ 1\,647\,618 & 2\,062\,231 & 2\,476\,844 \\ 1\,465\,882 & 2\,157\,104 & 2\,848\,326 \end{pmatrix}。$$

(3)子联盟 B_2 中局中人 3 的参照系统

对函数 $g(y_1,x_2,x_3)$ 中的 x_3 求偏导, 可得

$$\frac{\partial g}{\partial x_3}(y_1,x_2,x_3) = 2\,167\,140 - 3\,572\,120y_1 - 903x_2 + 2\,489\,483y_1x_2。$$

用 α_p 代替 x_2,用 α_q 代替 y_1, 则有

$$\frac{\partial g}{\partial x_3}(\bar{\alpha}_p,\bar{\alpha}_q) = 2\,167\,140 - 3\,572\,120\bar{\alpha}_q - 903\bar{\alpha}_p + 2\,489\,483\bar{\alpha}_q\bar{\alpha}_p。$$

取 $\alpha = 1/6$、$1/2$、$5/6$, 得到局中人 3 的参照系统:

$$\boldsymbol{A}(3)=\begin{pmatrix}1\ 640\ 788 & 1\ 778\ 792 & 1\ 916\ 796\\ 588\ 386 & 1\ 002\ 999 & 1\ 417\ 612\\ -464\ 016 & 227\ 206 & 918\ 428\end{pmatrix}。$$

（4）分摊结果

取 $\boldsymbol{\Lambda}^t=\left(\frac{3}{8},\frac{2}{8},\frac{3}{8}\right)$，可得

$\sigma_1(N,C,B)=\boldsymbol{\Lambda}^t\boldsymbol{A}(1)\boldsymbol{\Lambda}=383\ 600$，

$\sigma_2(N,C,B)=\boldsymbol{\Lambda}^t\boldsymbol{A}(2)\boldsymbol{\Lambda}=2\ 062\ 231$，

$\sigma_3(N,C,B)=\boldsymbol{\Lambda}^t\boldsymbol{A}(3)\boldsymbol{\Lambda}=1\ 002\ 999$。

从以上结果可以看出，3 个地区分摊的成本之和为 383 600 + 2 062 231 + 1 002 999 = 3 448 830 元，即等于大联盟形成时的成本 $C(\{1,2,3\})$，说明结果满足集体理性。忠县的独立治污成本 $C(\{1\})$ 为1 404 980 元，云阳的独立治污成本 $C(\{3\})$ 为 2 167 140元，均明显大于联盟结构下 2 个地区的分摊成本 383 600 和 1 002 999 元，联盟结构下万州分摊成本基本与独立治污成本持平，说明结果总体满足个体理性。综上分析，水污染治理成本分摊结果完全满足二项式半值特征函数要求的 3 个条件，因而是有效的，证明 3 个地区治污需要花费的总费用在所有局中人之间进行了合理分配。以上是以 3 个地区可能存在的一种联盟结构为例进行计算，从结果来看，虽然满足 3 个条件，但对每个地区而言并不一定是最佳选择，各地区可以根据实际选择联盟方式，从而形成新的联盟结构，但无论各地区联盟形式如何，通过以上分析可以证明此法能确保治污成本在局中人间进行合理分摊。

4　结语

加大我国流域水污染治理力度首当其冲的是要解决对流域污染治理产生的成本如何进行合理有效分摊的问题。笔者针对流域水污染治理成本分摊这一关键问题，提出了利用合作博弈理论解决的新途径，即在传统使用的夏普利值解的基础上，运用新提出但更具有普适性的二项式半值解的概念，在考虑联盟结构的情况下，通过多重线性扩展进行求解。该方法较合作博弈其他解而言，一方面不必将未起作用的联盟考虑在内，另一方面，可以根据每个局中人对联盟的贡献值不同而赋予不同的权重，同时充分考虑局中人通过事前达成意向形成子联盟的可能来建立二级联盟结构。在实证阶段，笔者在计算 COD 排放浓度时充分考虑各地区浓度除受本地区污染影响外，还受上游转嫁污染的影响，使得由此计算出的污水排污费作为治理成本更能反映各地区实际情况。

参考文献：

[1] CASTANO-PARDO A, GARCIA-DIAZ A. Highway Cost Allocation: An Application of the Theory of Nonatomic Games[J]. Transportation Research Part A: Policy and Practice, 1995, 29(3): 187－203.

[2] KATTUMAN P A, GREEN R J, BIATEK J W. Allocating Electricity Transmission Costs Through Tracing: A Game Theoretic Rational[J]. Operations Research Letters, 2004, 32(2): 114－120.

[3] MUTUSWAMI S. Strategy Proof Cost Sharing of a Binary Good and the Egalitarian Solution[J]. Mathematical Social Science, 2004, 48(3): 271－280.

[4] 李军，蔡小强. 基于合作博弈的易腐性产品运输设施选择的费用分配[J]. 中国管理科学，2007，15(4)：51－58.

[5] 李娟，黄培清，顾锋. 供应链上相关信息的共享激励及共享价值分配[J]. 系统管理学报，2008，17(1)：78－86.

[6] 鲍新中，刘澄，张建斌. 基于 EOQ 的集成供应成本分摊问题研究[J]. 中国管理科学，2009，17(1)：101－106.

[7] 董保民，王运通，郭桂霞. 合作博弈论：解与成本分摊[M]. 北京：中国市场出版社，2008：12－81.

[8] VAZQUEZ-BRAGE M, VAN DEN NOUWELAND A, GARCIA-JURADO I. Owen's Coalitional Value and Aircraft Landing Fees[J]. Mathematical Social Sciences, 1997, 34(3): 273－286.

[9] 杨荣基，彼得罗相. 动态合作：尖端博弈论[M]. 北京：中国市场出版社，2007：45－87.

[10] CARRERAS F, FREIXAS J, PUENTE M A. Semivalues as Power Indices[J]. European Journal of Operational Research, 2003, 149(3): 676－687.

[11] CARRERAS F, LLONGUERAS M D, PUENTE M A. Partnership Formation and Binomial Semivalues[J]. European Journal of Operational Research, 2009, 192(2): 487－499.

[12] ALONSO-MEIJIDE J M, CARRERAS F, PUENTE M A. Axiomatic Characterizations of the Symmetric Coalitional Binomial Semivalues[J]. Discrete Applied Mathematics, 2007, 155(6): 2282－2293.

[13] DUBEY P, NEYMAN A, WEBER R J. Value Theory Without Efficiency[J]. Mathematics of Operations Research, 1981, 6(1): 122－128.

[14] AMER R, GIMÉNEZ J M. A General Procedure to Compute Mixed Modified Semivalues for Cooperative Structure of Coalition Blocks[J]. Mathematical Social Sciences, 2008, 56(2): 269－282.

[15] OWEN G. Multilinear Extensions of Games[J]. Management Science, 1972, 18(5): 64－79.

[16] AMER R, GIMÉNEZ J M. Modification of Semivalues for Games With Coalition Structures[J]. Theory and Decision, 2003, 54(3): 185－205.

[17] 郝芳华，李春晖，赵彦伟，等. 流域水质模型与模拟[M]. 北京：北京师范大学出版社，2008：19－59.

作者简介： 赖苹（1981—），女，重庆市人，讲师，博士生，主要研究方向为环境经济学。E-mail：lpcaroline2003@126.com