

失调叶片盘耦合振动的力学模型

阎云聚 顾家柳 徐明

(西北工业大学振动研究所, 西安, 710072)

A MECHANICAL MODEL FOR COUPLING VIBRATION OF MISTUNED BLADED DISK

Yan Yuan-ju, Gu Jia-liu, Xu Min

(Institute of Vibration Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an, 710072)

摘要 借助于子结构模态综合法, 为研究真实的失调叶片盘耦合振动问题提出了一种非常接近于实际叶片盘的力学模型和简便的理论分析方法; 并通过对一个实际失调叶片盘的强迫振动试验, 对力学模型、计算公式和程序进行了考核验证。结果表明, 试验与计算相当吻合。

关键词 失调叶片盘, 耦合振动, 力学模型, 理论分析方法, 强迫振动试验

Abstract Because the coupling vibration of bladed disk is rather harmful to the structural strength of aeromotors, a lot of work has been done for more than 30 years. Many simplified models of mistuned bladed disk were used for theoretical researches because experimental researches on aeromotors are difficult. However, some of the conclusions of many studies are inconsistent or conflicting. This paper developed a better mechanical model of mistuned bladed disk by Modal Synthesis Method for studying the vibration characteristics of real bladed disk assemblies. The model and theoretical analysis are checked by experiment of forced vibration on a real mistuned bladed disk. In terms of this model, the vibrational natures of the bladed disk assemblies can be studied well.

Key words mistuned bladed disk, coupling vibration, mechanical model, theoretical analysis method, experiment of forced vibration

在航空发动机的研制和发展中, 叶片盘耦合振动对结构强度的影响一直受到很大重视。在叶片振动的早期研究中, 一般认为叶根是固装的, 叶片振动不受盘的影响或影响甚微而不予考虑。因此同级盘上叶片振动应力水平相同, 振动疲劳损坏应同时发生。但在发动机的实际使用过程中, 时常发生的是一个或少数几个叶片意外地提前疲劳损伤或折断^[1]。由于实际同级盘上各叶片不可避免地存在着制造公差、安装误差、材料不均等原因, 这些叶片的自振频率或多或少地存在着一定差别, 谓之失调或失谐。其次, 盘与叶片振动耦合的作用, 不论盘的刚性有多强, 作为一个整体的叶片盘组合体的动力学性质与单个叶片都是完全不同的。失调与耦合的交互作用, 尽管耦合程度较弱, 失调幅度不大, 仍可导致同级盘上叶片振动应力严重不均, 甚至可相差一至二倍^[2]。这足以解释“Rogue Blade”形成的原因。

1992年3月16日收到, 1992年7月16日收到修改稿

本文的工作是以尽可能符合实际的叶片盘力学模型，借助于子结构模型综合技术建立理论分析计算公式。通过对一个实际失调叶片盘的强迫振动试验结果与理论计算结果的一致性来考核力学模型、理论分析计算公式和计算程序的正确性。

1 叶片盘强迫振动运动方程

在大多数航空发动机压气机的第一级叶片盘或涡轮级中，为了在盘上安装叶片，盘外缘一般具有宽大的轮缘（锥形或圆柱形），既满足了工艺结构上的需要，又对盘起到了加强作用，从而大大降低了盘和叶片的结构动力耦合。根据对多种发动机结构的归类分析，我们给出图 1 所示的叶片盘结构动力学分析模型。

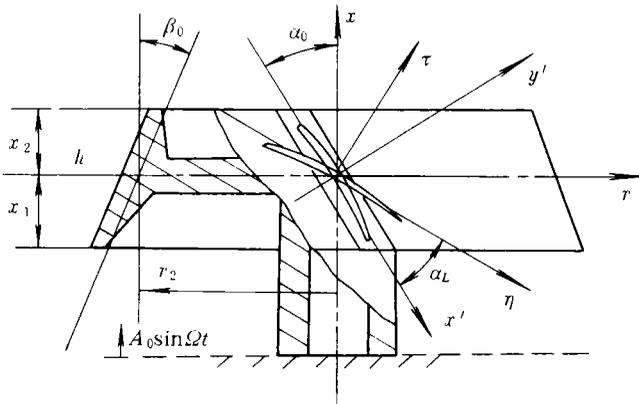


图 1 叶片盘力学模型

首先考虑轮盘中心固定时叶片盘的自由振动。设外缘带锥壳的无叶片盘的各阶振型为 $w_{ij}(r)\cos j\theta$; $i, j = 0, 1, 2, \dots$ 。 i 代表节圆数, j 代表节径数, $w_{ij}(r)$ 为盘中面沿轴向 x 的振动位移。实际的工作叶片由于自然扭曲和弯心与质心不重合, 一般为弯扭复合振动。设叶片各截面质心均在同一条直线上。叶根固装时, 叶片弯扭复合振动的弯心线各阶模态振动位移的三个分量为 $u_k(r), v_k(r), \varphi_k(r)$; $k = 1, 2, \dots$ 。 k 代表振型阶次, $u_k(r)$ 为沿 x' 轴位移分量, $v_k(r)$ 为沿 y' 轴位移分量, $\varphi_k(r)$ 为绕 r 轴扭转分量 (参见图 1)。对于轮盘外缘的锥壳, 也作为一个子结构处理。但它的振动位移受到盘外缘的限制, 且由于叶根及壳上凸缘的加强, 低频下的变形也仅限于 n 个特定的振型。根据模态综合法和子结构间的位移协调关系, 叶片盘整体自由振动时, 各子结构振动位移可分别表示为

盘的位移

$$w(r, \theta) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n w_{ij}(r) \cos j\theta q_{Dij} \tag{1}$$

第 p 号叶片弯心线的位移

$$\left. \begin{aligned} u_p(r) &= [w(r_2, \theta_p) + w'_r(r_2, \theta_p)(r - r_2)]\cos\alpha_0 + \sum_{k=1}^s u_{pk}(r)q_{spk}, \\ v_p(r) &= -[w(r_2, \theta_p) + w'_r(r_2, \theta_p)(r - r_2)]\sin\alpha_0 + \sum_{k=1}^s v_{pk}(r)q_{spk} \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

$$\varphi_p(r) = w'_0(r_2, \theta_p) + \sum_{k=1}^s \varphi_{pk}(r) q_{spk} \quad (2)$$

(1) 式和 (2) 式中, r_2 为盘外缘半径, θ_p 为叶片方位角, α_0 为叶片安装角, q_{Dij} , q_{spk} 均为广义坐标, 下标 Dij , spk 均表示一个整变量。为计算方便, 分别排列为

$$Dij = j + 1 + i(n + 1); j = 0, 1, 2, \dots, n; i = 0, 1, 2, \dots, m$$

$$spk = (m + 1)(n + 1) + k + (p - 1)s; k = 1, 2, \dots, s; p = 1, 2, \dots, N$$

N 为盘上的叶片数。

1.1 锥壳的振动位移

设中锥面上任一点在轴向、径向、周向的位移分别为 $w_c(x, h, \theta)$, $u_c(x, h, \theta)$, $v_c(x, h, \theta)$, 坐标 h 的零点位于中锥面和盘中心面的交线圆上, x 的零点自盘中面开始。根据锥壳理论和该结构的特定变形条件, 则有

$$\left. \begin{aligned} w_c &= w(r_2, \theta) + hw'_r(r_2, \theta) \\ v_c &= \frac{h}{r_2 - x + g\beta_0} w''_{r\theta}(r_2, \theta) \\ u_c &= -w'_r(r_2, \theta) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$[x_1 \leq x \leq x_2; h_1 \leq h \leq h_2; h_1 = -h_0(x)/2; h_2 = h_0(x)/2]$$

式中 β_0 为半锥顶角, $h_0(x)$ 为锥壳厚度。

当位移函数确定之后, 可据有关公式分别写出盘、锥壳、 N 个叶片的振动动能 $T_1(\dot{q}_{Dij})$, $T_2(\dot{q}_{Dij})$, $T_3(\dot{q}_{Dij}, \dot{q}_{spk})$ 及振动势能 $\Pi_1(q_{Dij})$, $\Pi_2(q_{Dij})$, $\Pi_3(q_{spk})$ ^[3]。将系统的总动能 $T(\dot{q}_{Dij}, \dot{q}_{spk}) = T_1 + T_2 + T_3$, 总势能 $\Pi(q_{Dij}, q_{spk}) = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3$ 代入拉格朗日方程, 可得失调叶片盘自由振动方程

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{0\} \quad (4)$$

式中 $\{q\}$, $\{\ddot{q}\}$ 为广义坐标列阵及其加速度列阵。由于子结构模的正交性, $[M]$, $[K]$ 的部分元素为零。对于失调研究, 可通过改变 $[M]$ 的元素 m_{ij} 以 Δm_{ij} 或 $[K]$ 的元素 k_{ii} 以 Δk_{ii} 构成叶片失调。故不必预先计算 N 个失调叶片的各 s 阶模态, 只需计算一个调谐叶片的 s 阶模态。求解 (4) 式可得叶片盘自由振动的固有频率和振型。

1.2 叶片盘的强迫振动运动方程

设叶片盘受到的激振力可按子结构的各阶模态分解, 从而形成与 $\{q\}$ 的维数相同的激振力列阵 $\{F(t)\}$ 。又假定所受的阻尼力为粘性阻尼, 则阻尼力列阵可表示为 $\{F_c\} = -[C]\{\dot{q}\}$, $\{\dot{q}\}$ 为广义坐标的速度。 $[C]$ 为阻尼矩阵, 若不计各子结构间的模态阻尼耦合, $[C]$ 为对角阵, 其元素 C_{ii} 可由各子结构模态阻尼确定。由此可得失调叶片盘强迫振动方程

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{F(t)\} \quad (5)$$

1.3 叶片盘受位移激振动时的强迫振动及求解

若叶片盘的中心装夹在激振台上正弦激振, 盘中心的激振位移为 $x(t) = A_0 \sin(\Omega t)$, A_0 为激振位移幅, Ω 为激振角频率, 则由模态质量产生的惯性激振力为

$$\{F(t)\} = -[M]\{\ddot{x}(t)\} = [M]\{A_0 \Omega^2\} \sin(\Omega t) \quad (6)$$

令 $\{F_0\} = [M]\{A_0\Omega^2\}$, 则(5)式可化为

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{F_0\}\sin(\Omega t) \quad (7)$$

(7)式为简谐激励, 可采用直接法求解。因为

$$\{F_0\}\sin(\Omega t) = \text{Im}[\{F_0\}e^{i\Omega t}] \quad \omega = \sqrt{-1}$$

故有 $\{q\} = \text{Im}[\{Q\}e^{i\Omega t}] = \text{Im}(\{Q_1\} + i\{Q_2\}e^{i\Omega t})$

式中 $\{Q\}$ 为复向量, $\{Q_1\}$ 、 $\{Q_2\}$ 为实向量, 代入(7)式可得

$$([K] - \Omega^2[M] + i\Omega[C])\{Q\} = \{F_0\} \quad (8)$$

(8)式为复系数特性方程, 可采用一般方法求解, 当求得 $\{Q\}$ 后, 则可得

$$\{q\} = \text{Im}[\{Q\}e^{i\Omega t}] = \{Q_1\}\sin\Omega t + \{Q_2\}\cos\Omega t \quad (9)$$

将 $\{q\}$ 代入(3)式, 并令 $r = r_2 + L$, 则可得叶尖弯心处相对于盘心的振动位移分量 $u_p(L, t)$ 、 $v_p(L, t)$ 、 $\phi_p(L, t)$ 。将其与振动台的基础运动 $x(t) = A_0\sin\Omega t$ 进行矢量叠加, 则可得叶片盘强迫振动时叶尖的绝对位移

设第 p 号叶片之叶尖截面最大、最小惯性主轴分别为 η 、 τ , 则叶尖弯心处沿 τ 方向的振动位移分量 $C_{p\tau}(t)$ 仅与 $u_p(L, t)$ 、 $v_p(L, t)$ 、 $A_0\sin\Omega t$ 有关(参见图1) 则可得

$$C_{p\tau}(t) = v_p(L, t)\cos\alpha_L + u_p(L, t)\sin\alpha_L + \sin(\alpha_0 + \alpha_L)A_0\sin(\Omega t) \quad (10)$$

式中 α_L 为叶尖 $\eta(r)$ 轴与固定于叶根截面的 x' 轴之夹角, 据(2)式、(9)式可首先求得 $u_p(L, t)$ 、 $v_p(L, t)$ 的表达式

$$u_p(L, t) = [w(r_2, \theta_p) + w'(r_2, \theta_p)L]\cos\alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} u_{pk}(L)(Q_{1pk}\sin\Omega t + Q_{2pk}\cos\Omega t) \quad (11)$$

$$v_p(L, t) = -[w(r_2, \theta_p) + w'(r_2, \theta_p)L] + \sum_{k=1}^{\infty} u_{pk}(L)(Q_{1pk}\sin\Omega t + Q_{2pk}\cos\Omega t)$$

再考虑到(1)式, $u_p(L, t)$ 、 $v_p(L, t)$ 可简写为

$$\begin{cases} u_p(L, t) = A_p \sin(\Omega t + \gamma_{pA}) \\ v_p(L, t) = B_p \sin(\Omega t + \gamma_{pB}) \end{cases} \quad (12)$$

将(12)式代入(10)式, 化简可得

$$C_{p\tau}(t) = \sqrt{C_{1p}^2 + C_{2p}^2} \sin(\Omega t + \gamma_{p\tau}) \quad (13)$$

式中

$$\begin{cases} C_{1p} = A_0 \sin(\alpha_0 + \alpha_L) + B_p \cos\alpha_L \cos\gamma_{pA} + A_p \sin\alpha_L \cos\gamma_{pA} \\ C_{2p} = A_0 \sin\alpha_L \sin\gamma_{pA} + B_p \cos\alpha_L \sin\gamma_{pB} \end{cases} \quad (14)$$

2 叶片盘强迫振动数值计算

对选定的一个真实的失调叶片盘(某型航空发动机低压压气机第一级), 为了对前述的力学模型和分析理论进行考核, 首先对其中一个叶片(叶根固定)和无叶片锥壳盘(中心固定)进行了试验模态分析, 表1为盘、叶片的自振频率, 从SD-380模态分析仪的动画显

示可知, 叶片的 1、2 阶振型为以弯曲振动为主的振动, 3 阶振型为一阶扭转为为主的振动。盘的前三阶振型分别为 0 节圆 1 节径、0 节圆 0 节径、0 节圆 2 节径振型。为了得到叶片自振频率的真实失调分布, 把盘缘夹紧后分别对盘上 31 个叶片的自振频率进行了测量, 表 2 给出了 31 个叶片第 1 阶自振频率。

如以 1 000Hz 为截阶频率, 据表 1 盘和叶片各取前 3 阶模态参与模态综合。由此在 (1)式、(2)式、(3)式中, $m=0$, $n=2$, $s=3$, 则(4)式、(5)式均为 $1 \times 3 + 3 \times 31 = 96$ 阶的运动方程。作为对位移激振的考核计算, 在(6)式中取 $A_0=0.1\text{cm}$, 在 4 种不同激振频率下的叶尖响应振幅值列于表 3。

表 1 盘、叶片自振频率(Hz)

叶片	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	
	140.89	405.46	935.04	1 386.46	
盘	$i=0, j=0$	$i=0, j=1$	$i=0, j=2$	$i=0, j=3$	$i=1, j=0$
	634.39	519.61	924.24	2 269.75	5 644.11

i 表示盘振型的节圆数, j 表示节径数, k 表示叶片振型阶次

表 2 31 个叶片根部固装时实测的 1 阶自振频率(Hz)

№	频率								
1	127.75	2	148.75	3	145.00	4	158.75	5	150.00
6	148.75	7	138.75	8	160.00	9	145.00	10	146.25
11	132.50	12	132.50	13	125.55	14	152.50	15	136.75
16	145.00	17	151.25	18	145.25	19	138.75	20	133.25
21	143.75	22	150.50	23	161.25	24	156.25	25	150.00
26	157.50	27	142.50	28	140.75	29	157.50	30	145.00
31	137.50								

实际上(4)式、(5)式有广泛的适用性, 它可计算同类型不同结构参数、各种实际的和假设的叶片自振频率分布, 以及各种激振力 $\{F(t)\}$ 作用时的强迫振动响应, 从而通过理论分析全面研究失调叶片盘振动特性。

3 强迫振动试验

如前所述, 为了验证失调叶片盘耦合振动的力学模型、分析理论、电算程序, 将算例中的叶片盘中心固定在振动台上进行正弦激振的强迫振动试验。以经过功率放大的正弦信号驱动激振台, 当叶片盘受迫振动时, 分别用加速度计逐个测量叶尖弯心处在 τ 方向的振动加速度, 再换算成位移振幅, 以便和数值计算结果进行比较。表 3 给出了在 $A_0=0.1\text{cm}$ 、4 个激振频率下的叶尖振幅测量结果。

对于叶尖振幅的测量误差, 除测量系统误差外, 激振频率误差可带来较大影响, 因为叶片失调时, 叶片盘强迫振动响应对激振频率十分敏感, 试验中尽可能地保持了激振频率的稳定性, 同时用频率计和示波器监视激振信号。由表 3 的测量数据可以看出, 同一激振

频率不同叶尖的位移幅值的差别是十分明显的,这正是由于叶片失调所产生的“Rogue Blade”现象。对于振幅大的数据,由于信噪比较高,测量精度较好。

表3 叶片盘强迫振动叶尖响应振幅 单位: mm

F_u / Hz	115.0	125.0	135.0	160.0	115.0	125.0	135.0	160.0
C_{max}	0.52042	1.85000	1.81333	2.3128	0.5211	1.8467	1.8141	2.3209
C_{max}	13	13	20	8	13	13	20	8
序号No	试验值				计算值			
1	.37123	1.01750	.44200	1.07773	.4427	1.4428	.8802	.3086
2	.21511	.30217	.31733	.58213	.1955	.2816	.4896	.7034
3	.20123	.24050	.36833	.74733	.2146	.3261	.6427	.5564
4	.19776	.25900	.25500	1.71493	.1605	.2107	.3022	2.1945
5	.20817	.22817	.27200	1.10133	.1900	.2696	.4510	.7741
6	.19082	.24667	.30600	.99907	.1955	.2816	.4869	.7035
7	.29490	.24667	1.13333	.95187	.2599	.4517	1.3391	.4215
8	.22551	.26517	.31733	2.31280	.1573	.2047	.2892	2.3209
9	.26021	.41933	.48167	1.04627	.2147	.3261	.6428	.5563
10	.24286	.29600	.45333	1.04627	.2077	.3096	.5804	.5972
11	.31255	.74000	1.53000	.86533	.3367	.7576	1.6408	.3464
12	.32960	.690676	1.41667	.68440	.3367	.7576	1.6408	.3464
13	.52042	1.85000	.17567	.56640	.5211	1.8467	.7163	.2947
14	.17347	.24667	.26633	1.41600	.1802	.2490	.3939	.9733
15	.26021	.53033	1.05400	.63720	.2798	.5180	1.8000	.3932
16	.24286	.30833	.40233	.77093	.2146	.3261	.6427	.5564
17	.20817	.27750	.35700	.86533	.1849	.2588	.4204	.8620
18	.22898	.26517	.42500	.62147	.2132	.3226	.6292	.5640
19	.26021	.27750	.99167	.45627	.2599	.4517	1.3391	.4215
20	.32960	.58583	1.81333	.47200	.3249	.7005	1.8141	.3535
21	.25327	.49333	.73667	.59787	.2222	.3448	.7203	.5215
22	.24286	.32067	.33433	.36973	.1879	.2652	.4382	.8069
23	.22551	.28367	.27200	2.13187	.1542	.1990	.2775	2.1778
24	.24286	.27750	.31733	1.40027	.1677	.2242	.3326	1.5596
25	.26021	.33300	.30033	.22027	.1900	.2696	.4510	.7742
26	.24286	.30833	.31733	1.94307	.1640	.2172	.3166	1.8766
27	.26021	.32067	1.19000	.15733	.2303	.3660	.8186	.4914
28	.31225	.49333	.82167	.96760	.2430	.4012	1.0081	.4555
29	.22551	.27133	.21533	1.66773	.1640	.2172	.3166	1.8766
30	.24286	.30217	.29467	.22813	.2147	.3261	.6428	.5564
31	.27756	.60433	.79333	.68440	.2719	.4908	1.6214	.4032

F_u —激励频率, C_{max} —叶尖最大响应振幅

4 讨 论

对比表 3 中的试验值和计算值, 两者的 31 个叶尖响应振幅的分布情况和大多数叶尖振幅值都是吻合的, 证明了所采用的失调叶片盘耦合振动动力学模型的合理性和数值计算的可靠性。对于试验和计算结果不尽一致的情况, 产生误差可能有以下几个原因: (1) 计算中失调叶片各阶模态阻尼给定值的误差是主要来源(给定值是根据某一个叶片的试验模态分析阻尼按频率失调分布确定的)。尤其在共振状态, 阻尼的作用比较突出。(2) 测点位置与计算点误差。(3) 理论计算中的截阶处理。

试验点和计算点选在叶片盘的共振状态, 因为在共振区, 由于叶片失调, 各叶片的振动应力水平可产生明显差异, 即产生所谓的“Rogue Blade”。有研究表明^[4], 当远离共振区时, 失调的影响甚小。

对比表 2、表 3 即可看出, 当激振频率与叶片的某阶自振频率接近时, 就承受较大的响应, 这与把叶片作为叶根固装的传统的叶片振动研究结果是一致的。由于本文试验模型是一个实际的压气机叶片盘, 盘外缘宽大的锥壳使盘的刚性大为加强, 从而使盘和叶片的动力耦合较弱。但是这并不意味着盘的动力耦合可完全忽略或整级盘上叶片失调无须关注, 否则无法对“Rogue Blade”做出解释。根据我们的研究结果, 即使叶片盘弱的动力耦合, 也要比无耦合系统有本质区别。因为把盘和叶片做为一个整体看待时, 比单个叶片有更多的自振频率。以本文算例来说明这一问题, 叶片仅考虑前 3 阶振型, 做为与盘无动力耦合时, 全体叶片只有 3 个可能的共振频率。当叶片和盘之间存在动力耦合时, 叶片的悬臂自振频率将会降低。而耦合较弱时, 频率下降较少。但即使弱动力耦合, 由于叶片的每一阶振型也都可在对应于盘的 0 节圆, 0、1、2 节径的三种振型时发生。且弱耦合系统中, 叶片的同一阶振型对应于盘不同振型的固有频率相差较小, 形成 9 个共振点。其次, 叶片失调使共振频带加宽, 从而使诸多的共振点发展成为更大频率范围内的共振区域。

综上所述, 叶片失调与盘片动力耦合的交互作用会使叶片盘共振机会大为增加, 在考虑发动机工作转速时, 应特别注意避开实际存在的共振区。

参 考 文 献

- 1 顾家柳, 高宏. 失调叶片盘振动特性. 振动工程学报, 1988, (4): 5~10
- 2 Ewins D J, Han Z S. Resonant Vibration Levels of Mistuned Bladed Disk. ASME A, 1984, 106: 185~188
- 3 阎云聚, 顾家柳. 真实叶片盘耦合振动模态综合法. 全国第六届模态分析与试验学术交流会议论文集, 1991, 8.
- 4 Afolabi D. The Frequency Response of Mistuned Bladed Disk Assemblies. ASME The Tenth Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise, 1985.