

基于递归投影方法的电力系统平衡点计算 与小扰动稳定性分析

范孟华¹, 王成山¹, Venkataramana Ajjarapu²

(1. 智能电网教育部重点实验室(天津大学), 天津市 南开区 300072;

2. 爱荷华州立大学电气与计算机工程系, 美国 艾姆斯 50010)

Power System Equilibrium Calculation and Small Signal Stability Analysis Via Recursive Projection Method

FAN Menghua¹, WANG Chengshan¹, Venkataramana Ajjarapu²

(1. Key Laboratory of Smart Grid (Tianjin University), Ministry of Education, Nankai District,

Tianjin 300072, China; 2. Department of Electrical and Computer Engineering, Iowa State University, Ames 50010, USA)

ABSTRACT: Recursive projection method (RPM) was implemented for power system equilibrium calculation and small signal stability analysis via black-box invocation of existing time-domain simulation code (TDSC). With RPM, the full state space is decomposed into an unstable/slow invariant subspace and its orthogonal complement. Newton type of method and the original fixed point iteration scheme of TDSC are applied on the two subspaces respectively. In this paper, the basis for invariant subspace was constructed through either QR factorization or Arnoldi method. The effectiveness of RPM for enhancing convergence of fixed point iteration and extracting small signal stability information from TDSC was verified by test examples. The influences of different basis construction methods and parameter settings on the performance of RPM were addressed as well. Moreover, RPM is demonstrated to be suitable for its application with explicit integration methods.

KEY WORDS: recursive projection; time-domain simulation; equilibrium; small signal stability; invariant subspace; basis

摘要: 递归投影方法(recursive projection method, RPM)通过对现有时域仿真程序(time-domain simulation code, TDSC)的黑箱调用来获取电力系统平衡点以及小扰动稳定信息。在RPM作用下, 全状态空间被解耦为不稳定/慢不变子空间及其正交补子空间两部分, 分别采用牛顿型算法以及 TDSC

原有的不动点迭代格式进行计算。采用 QR 分解方法或 Arnoldi 方法来构造不变子空间的基底, 并通过具体算例验证 RPM 增强不动点迭代收敛性以及判别系统小扰动稳定状态的有效性; 同时, 还分析不同基底构造方式和参数设置方案对 RPM 计算性能的影响, 并得出了 RPM 适宜与显式积分法结合使用的结论。

关键词: 递归投影; 时域仿真; 平衡点; 小扰动稳定性; 不变子空间; 基底

0 引言

时域仿真程序(time domain simulation code, TDSC)是研究电力系统动态响应的重要工具^[1]。目前电力工业界已有许多开发成熟的仿真软件^[2], 如果能够充分利用这些软件在元件建模和数值方法方面的优势, 并将其应用范畴扩展到数值积分之外的其他领域, 则不但可以节省编程代价, 还能为电力系统提供更多计算分析工具。为此, 本文采用递归投影方法(recursive projection method, RPM)^[3], 通过对 TDSC 的黑箱调用, 增强不动点迭代的收敛性, 获取电力系统的平衡点以及小扰动稳定信息。

本文工作受到一类基于时域仿真器的方法^[4-6]启发, 此类方法一般具有双层结构: 通过外层控制算法(即 RPM)对 TDSC 进行黑箱调用, 由 TDSC 为外层算法提供函数值估计、残差数值、矩阵向量乘积的近似值等数据; 外层算法对这些数据进行分析并提取有用的信息, 其处理结果又被反馈给 TDSC 作为控制参数或者初始值来进行下一时步的运算。

基金项目: 国家自然科学基金重点资助项目(50837001); 国家重点基础研究发展计划项目(973 项目)(2009CB219700)。

Project Supported by National Natural Science Foundation of China (50837001); The National Basic Research Program of China (973 Program)(2009CB219700).

RPM 的基本思路是将全状态空间分解为不稳定/慢不变子空间及其正交补子空间两部分,分别采用牛顿法以及 TDSC 原有的不动点迭代格式进行计算。通过这种方式,可显著增强不动点迭代的收敛性,同时近似出不动点迭代格式的主导特征值,进而判别系统的小扰动稳定性。文献[7]介绍了 RPM 的原理、步骤以及基于 QR 分解的基底构造方法,探讨了微分代数方程(differential and algebraic equation, DAE)系统的应用方式以及处理非线性环节的策略,并通过 2 种具体的时域仿真软件(PST^[8]和 PSS/E)验证了 RPM 克服不动点迭代数值稳定问题和加快其收敛到稳态运行点速率的有效性。本文进一步给出基于 Arnoldi 方法的基底构造方法,探讨不同基底构造方式和参数设置方案对 RPM 计算性能的影响,证明 RPM 计算不稳定平衡点的功能,并对 RPM 与显式和隐式积分方法结合使用时的效率进行比较。

1 递归投影方法

1.1 不动点迭代格式的局部收敛特性

电力系统机电过程和中长期动态行为通常由一组 DAE 来进行描述:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{L}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}) \quad (1)$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad (2)$$

式中 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N$ 、 $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^T$ 和 $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^S$ 分别代表状态变量、代数变量和控制参数。

根据式(2),若将代数变量 \mathbf{y} 的求解过程看作隐式地应用下式进行计算:

$$\mathbf{y} = \mathbf{Y}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (3)$$

则原 DAE 系统可以降阶等效为常微分方程(ordinary differential equation, ODE)系统:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{L}(\mathbf{x}, \mathbf{Y}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \mathbf{u}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (4)$$

并通过差分化处理得到相应的不动点迭代格式:

$$\mathbf{x}^{(v+1)} = \Phi(\mathbf{x}^{(v)}, \mathbf{u}) \quad (5)$$

不动点迭代格式(5)的局部收敛特性由其稳态运行点处雅克比矩阵 Φ_x 的主导特征值^[9](最大模特征值)决定。若全部特征值 $\{\mu_k\}_1^N$ 都严格位于下式所表征的单位圆 K_δ 内部,那么不动点迭代格式(5)在其稳态运行点的一个邻域内具有渐近收敛性。

$$K_\delta = \{z | |z| \leq 1 - \delta\}, \quad \delta > 0 \quad (6)$$

如果有若干特征值位于 K_δ 外部,则不动点迭代无法收敛;若全部特征值都位于 K_δ 内部,但是某些特征值接近圆周,则收敛速度会比较缓慢。针对上述 2 种收敛性问题,RPM 可以在前一种情况下使不

动点迭代恢复收敛;在后一种情况下改善收敛速度。

1.2 递归投影方法的基本步骤

设不动点迭代格式(5)的雅克比矩阵 Φ_x 有 m 个特征值 $\{\mu_k\}_1^m$ 位于单位圆 K_δ 外部或接近圆周,即:

$$|\mu_1| \geq \dots \geq |\mu_m| \geq 1 - \delta \geq |\mu_{m+1}| \geq \dots \geq |\mu_N| \quad (7)$$

RPM 将全状态空间 \mathbf{R}^N 分解为对应于 $\{\mu_k\}_1^m$ 的不稳定/慢不变子空间 P 及其正交补子空间 Q 两部分,然后分别进行计算。若设 $\mathbf{Z}_p \in \mathbf{R}^{N \times m}$ 为子空间 P 的标准正交基底,则对于任意 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N$,可以得到

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{Z}_p \mathbf{z} + \mathbf{q} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \mathbf{p} = \mathbf{Z}_p \mathbf{z} \in P \\ \mathbf{z} = \mathbf{Z}_p^T \mathbf{x} \in \mathbf{R}^m \\ \mathbf{q} = (\mathbf{I} - \mathbf{Z}_p \mathbf{Z}_p^T) \mathbf{x} \in Q \end{cases} \quad (9)$$

相应的,不动点迭代格式(5)可以解耦为

$$\mathbf{z}^{(v+1)} = \mathbf{f}(\mathbf{z}^{(v)}, \mathbf{q}^{(v)}, \mathbf{u}) \equiv \mathbf{Z}_p^T \Phi(\mathbf{z}^{(v)}, \mathbf{q}^{(v)}, \mathbf{u}) \quad (10)$$

$$\mathbf{q}^{(v+1)} = \mathbf{g}(\mathbf{z}^{(v)}, \mathbf{q}^{(v)}, \mathbf{u}) \equiv (\mathbf{I} - \mathbf{Z}_p \mathbf{Z}_p^T) \Phi(\mathbf{z}^{(v)}, \mathbf{q}^{(v)}, \mathbf{u}) \quad (11)$$

根据文献[3],子空间 Q 上的不动点迭代格式(11)是局部收敛的。因此 RPM 在子空间 P 上通过牛顿法求解方程(10)以增强不稳定/慢速收敛模式的收敛性,而在子空间 Q 上维持不动点迭代格式(11)进行计算。假设 $(\mathbf{I} - \mathbf{Z}_p^T \Phi_x \mathbf{Z}_p)$ 非奇异,则 RPM 的步骤为:

1) 计算初始值。

$$\begin{cases} \mathbf{z}^{(0)} = \mathbf{Z}_p^T \mathbf{x}^{(0)}(\mathbf{u}) \\ \mathbf{q}^{(0)} = (\mathbf{I} - \mathbf{Z}_p \mathbf{Z}_p^T) \mathbf{x}^{(0)}(\mathbf{u}) \end{cases} \quad (12)$$

2) 迭代更新 \mathbf{z} 与 \mathbf{q} 。

$$\mathbf{z}^{(v+1)} = \mathbf{z}^{(v)} + (\mathbf{I} - \mathbf{Z}_p^T \Phi_x \mathbf{Z}_p)^{-1} [\mathbf{Z}_p^T \Phi(\mathbf{z}^{(v)}, \mathbf{q}^{(v)}, \mathbf{u}) - \mathbf{z}^{(v)}] \quad (13)$$

$$\mathbf{q}^{(v+1)} = \mathbf{g}(\mathbf{z}^{(v)}, \mathbf{q}^{(v)}, \mathbf{u}) = (\mathbf{I} - \mathbf{Z}_p \mathbf{Z}_p^T) \Phi(\mathbf{z}^{(v)}, \mathbf{q}^{(v)}, \mathbf{u}) \quad (14)$$

直到满足如下收敛条件:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(v+1)}(\mathbf{u}) &= \mathbf{Z}_p \mathbf{z}^{(v+1)} + \mathbf{q}^{(v+1)}, \\ \|\mathbf{x}^{(v+1)} - \mathbf{x}^{(v)}\| &\leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \end{aligned} \quad (15)$$

实际运算中可以通过伪牛顿方法提高计算效率^[7],并利用数值微分法^[10-11]来近似矩阵向量的乘积数值:设基底 $\mathbf{Z}_p = [\mathbf{Z}_{p1} \dots \mathbf{Z}_{pm}] \in \mathbf{R}^{N \times m}$, $\xi > 0$ 为微小摄动量,则 $\Phi_x \mathbf{Z}_p$ 的第 i 列元素可由下式近似得出:

$$\Phi_x \mathbf{Z}_{pi} \approx [\Phi(\mathbf{x} + \xi \mathbf{Z}_{pi}, \mathbf{u}) - \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u})] / \xi, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (16)$$

1.3 小扰动稳定信息的获取

RPM 的一个副产物是子空间 P 上的低维雅克比矩阵 $\mathbf{H} = \mathbf{Z}_p^T \Phi_x \mathbf{Z}_p \in \mathbf{R}^{m \times m}$,从中可以近似出不动点迭代格式(5)雅克比矩阵 Φ_x 在平衡点处的主导特

征值。但是原 DAE 系统的小扰动稳定性是由降阶等效 ODE 系统方程(4)的如下雅克比矩阵的最大实部特征值决定的^[7]:

$$\mathbf{F}_x = \mathbf{L}_x + \mathbf{L}_y \mathbf{Y}_x = \mathbf{L}_x - \mathbf{L}_y \mathbf{G}_y^{-1} \mathbf{G}_x, \quad \mathbf{G}_y \text{ 非奇异} \quad (17)$$

为了分析原系统的小扰动稳定性, 就需要了解 Φ_x 与 \mathbf{F}_x 特征谱的关系。

对于精确积分格式, Φ_x 的特征值 $\{\mu_k\}_1^N$ 与 \mathbf{F}_x 的特征值 $\{\lambda_k\}_1^N$ 之间存在如下对应关系^[5-6]:

$$\mu_k = e^{h\lambda_k}, \quad k=1,2,\dots,N \quad (18)$$

式中 h 为积分步长。

实际采用的积分方法不可能完全精确, 此时 Φ_x 与 \mathbf{F}_x 特征值之间的关系与具体积分格式相关^[12-13]。举例来说, 对于欧拉法(Euler method, EM)有

$$\mu_k = 1 + h\lambda_k, \quad k=1,2,\dots,N \quad (19)$$

对于改进欧拉法(modified Euler method, MEM)有

$$\mu_k = [(1 + h\lambda_k)^2 + 1]/2, \quad k=1,2,\dots,N \quad (20)$$

对于隐式梯形算法(implicit trapezoidal method, ITM)有

$$\mu_k = (1 + h\lambda_k/2)/(1 - h\lambda_k/2), \quad k=1,2,\dots,N \quad (21)$$

因此, \mathbf{F}_x 的部分最大实部特征值可以根据具体积分格式, 由 RPM 近似得出的 Φ_x 的主导特征值推导出来, 进而对平衡点的小扰动稳定性做出判断。

2 基底构造方法

2.1 基于 QR 分解的基底构造方法

构建不变子空间 P 对应于特征值 $\{\mu_k\}_1^m$ 的基底矩阵 \mathbf{Z}_p , 是应用 RPM 的一个重要步骤。

根据文献[3], 若将子空间 Q 上的差分向量表示为 $\Delta \mathbf{q}^{(v)} = \mathbf{q}^{(v+1)} - \mathbf{q}^{(v)}$, 并且假定初始向量 $\Delta \mathbf{q}^{(0)}$ 在雅克比矩阵 \mathbf{g}_q 的主导特征向量方向上具有非零元素, 则 $\{\Delta \mathbf{q}^{(v)}\}$ 渐近于 \mathbf{g}_q 的主导不变子空间。

基于上述论述, 本文通过对子空间 Q 上不动点迭代收敛速率的监控来判断何时需要向基底矩阵中添加元素。具体来说, 如果经过 v_{\max} (用户指定参数)次迭代之后仍然不满足收敛标准(15), 则采用 k 个最新生成的差分向量构建 Krylov 子空间 K :

$$K = \{\Delta \mathbf{q}^{(v)}, \Delta \mathbf{q}^{(v-1)}, \dots, \Delta \mathbf{q}^{(v-k+1)}\} \quad (22)$$

根据 Krylov 子空间的维数 k , 本文称这种基底构造方式为 QR(k)方法。一般来说, 适当增大维数 k 可能改善基底的构造速度, 这是由于较大的 k 值提高了同时向基底矩阵中添加多个向量的可能性。

为求取不变子空间 P 的标准正交基底, 需要对

矩阵 $\hat{\mathbf{K}} = [\Delta \mathbf{q}^{(v)}, \Delta \mathbf{q}^{(v-1)}, \dots, \Delta \mathbf{q}^{(v-k+1)}]$ 进行 QR 分解^[14], 即: $\hat{\mathbf{K}} = \hat{\mathbf{Q}}\hat{\mathbf{R}}$, 其中 $\hat{\mathbf{Q}} \in \mathbf{R}^{N \times k}$ 为正交矩阵, $\hat{\mathbf{R}} \in \mathbf{R}^{k \times k}$ 为上三角矩阵。若分解过程中考虑列选主元(column pivoting), 那么矩阵 $\hat{\mathbf{R}}$ 的对角元素 $|\hat{R}_{i,i}| (i=1, 2, \dots, k)$ 按降序排列, 则对于满足下式的最大的整数 i :

$$|\hat{R}_{i,i}| / |\hat{R}_{i+1,i+1}| \geq K_a, \quad i=1,2,\dots,k-1 \quad (23)$$

矩阵 $\hat{\mathbf{Q}}$ 的前 i 列元素被添加到基底矩阵中。基底矩阵新添元素之后, 需要对其列元素进行重新正交化(reorthogonalization)处理^[15]。

式(23)中的参数 K_a 称为 Krylov 接受标准(Krylov acceptance ratio), 其取值影响基底构建的速度和精确度: 当 K_a 较小时, 基底构建的速度较快但是精度相对较差, 可能导致算法发散; 相反的, 当 K_a 较大时, 基底精度将得到提高, 但是可能影响计算速度。因此, K_a 的取值应在计算效率和基底精度之间权衡, 并根据具体问题而进行调整。

基底构造的精度与效率取决于初始向量和所求取平衡点处的特征谱: 若初始向量在主导特征向量方向上所占比重较大, 并且主导特征值和其他特征值之间存在较大间隙, 那么基底构造的效率会相对较高; 反之则基底构造速度会相对缓慢^[16]。

2.2 基于 Arnoldi 方法的基底构造方法

除了 QR 分解法以外, 本文还将采用 Arnoldi 方法来构建不变子空间 P 的基底。Arnoldi 方法是一种基于 Krylov 子空间方法的正交投影特征值计算方法。一个 k 步 Arnoldi 分解的基本步骤^[17]如下:

- 1) 输入矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbf{C}^{n \times n}$ 和初始向量 \mathbf{v}_1 。
- 2) 令 $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1 / \|\mathbf{v}_1\|$, $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{A}\mathbf{v}_1$, $\alpha_1 = \mathbf{v}_1^H \boldsymbol{\omega}$ 。
- 3) 令 $\mathbf{f}_1 \leftarrow \boldsymbol{\omega} - \mathbf{v}_1 \alpha_1$, $\mathbf{V}_1 \leftarrow \mathbf{v}_1$, $\mathbf{H}_1 \leftarrow \alpha_1$ 。
- 4) 对于 $j=1, 2, \dots, k-1$ 进行循环迭代。

$$\textcircled{1} \beta_j = \|\mathbf{f}_j\|, \quad \mathbf{v}_{j+1} = \mathbf{f}_j / \beta_j;$$

$$\textcircled{2} \mathbf{V}_{j+1} \leftarrow [\mathbf{V}_j, \mathbf{v}_{j+1}], \quad \hat{\mathbf{H}}_j \leftarrow \begin{bmatrix} \mathbf{H}_j \\ \beta_j \mathbf{e}_j^T \end{bmatrix};$$

$$\textcircled{3} \boldsymbol{\omega} \leftarrow \mathbf{A}\mathbf{v}_{j+1}, \quad \mathbf{h} \leftarrow \mathbf{V}_{j+1}^H \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{f}_{j+1} \leftarrow \boldsymbol{\omega} - \mathbf{V}_{j+1} \mathbf{h};$$

$$\textcircled{4} \mathbf{H}_{j+1} \leftarrow [\hat{\mathbf{H}}_j, \mathbf{h}]。$$

$$\textcircled{5} \text{结束迭代, 输出 } \mathbf{A}\mathbf{V}_k = \mathbf{V}_k \mathbf{H}_k + \mathbf{f}_k \mathbf{e}_k^T。$$

上述步骤中, $\mathbf{V}_k \in \mathbf{C}^{n \times k}$ 具有正交列向量, $\mathbf{H}_k \in \mathbf{C}^{k \times k}$ 为上 Hessenberg 矩阵, \mathbf{e}_k 表示 k 阶单位矩阵 \mathbf{I}_k 的第 k 列。分解完成后, 若 $\|\mathbf{f}_k\|$ 足够小, 则认为 \mathbf{V}_k 的列向量近似张成矩阵 \mathbf{A} 的不变子空间。矩阵 \mathbf{A} 的特征值和特征向量分别由 \mathbf{H}_k 的特征值和 $\mathbf{W} = \mathbf{V}_k \mathbf{P}_k$ 来近似, 其中 \mathbf{P}_k 是 \mathbf{H}_k 的右特征向量。在此过

程中,为保证正交化精度,应通过 Gram-Schmidt 方法^[15]对 V_k 的列向量进行重新正交化处理。

Arnoldi 分解的结果依赖于初始向量的选取。当 Arnoldi 迭代达到指定次数而尚未获得满足精度要求的计算结果时,就需要重新选择初始向量再次进行分解。RPM 需要计算的是矩阵 A 的主导特征谱,因此希望初始向量在主导特征向量方向上占有较大比重。本文通过隐式重启策略^[17-19]来滤除初始向量中不需要的特征向量信息,并采用隐式双位移方法(implicit double shift technique)^[14]来回避复数运算。隐式重启 Arnoldi 分解的基本步骤^[17]为:

1) 输入 m 步 Arnoldi 分解 $AV_m = V_m H_m + f_m e_m^T$ 。

2) 对于 $l=1,2,\dots$, 作循环迭代直到收敛。

① 计算 H_m 的特征值,选择 p 个位移量 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$ 。

② 令 $Q = I_m$ 。

③ 对于 $j=1,2,\dots,p$ 作循环迭代。QR 分解为 $[Q_j, R_j] = qr(H_m - \mu_j I)$; $H_m \leftarrow Q_j^T H_m Q_j$, $Q \leftarrow Q Q_j$ 。

④ $k=m-p$, $\hat{\beta}_k = H_m(k+1, k)$, $\sigma_k = Q(m, k)$ 。

⑤ $f_k \leftarrow v_{k+1} \hat{\beta}_k + f_m \sigma_k$ 。

⑥ 令 $V_k \leftarrow V_m Q_k$, 其中 Q_k 为矩阵 Q 的前 k 列元素构成的子矩阵;并令 H_k 为矩阵 H_m 的前 k 行、 k 列元素构成的子矩阵

⑦ 在 k 步 Arnoldi 分解 $AV_k = V_k H_k + f_k e_k^T$ 的基础上,再进行 p 步 Arnoldi 分解,得到新的 m 步 Arnoldi 分解 $AV_m = V_m H_m + f_m e_m^T$ 。

在 RPM 中应用隐式重启 Arnoldi 方法,矩阵 A 代表雅克比矩阵 Φ_x , 初始向量 v_1 取为全状态空间上的差分向量 $\Delta x^{(v)} = x^{(v+1)} - x^{(v)}$, 并以 H_m 的特征值中距离期望值最远的 p 个特征值作为位移量。上述步骤中矩阵 A 与向量 v_{j+1} 的乘积同样采用数值微分方法获得,这需 TDSC 进行一些额外的函数值估计工作。总体来说,Arnoldi 方法比 QR 分解的计算量大,并且无法预知适宜的基底维数和构建基底的时机。尽管受到上述因素的限制,但如果应用得当,那么 Arnoldi 方法所构建的基底精度会相对较高,而且能够大大增强不动点迭代的收敛性,从而补偿其耗费的额外计算代价,并改善整体计算速度^[16]。

3 递归投影方法的整体流程图

图 1 为 RPM 的整体流程图。从图中可以看出:初始时,基底 Z_p 和矩阵 $H = Z_p^T \Phi_x Z_p$ 置为空,基底维数 $B_s=0$, 迭代次数 $v=0$ 。在每一步积分结束之

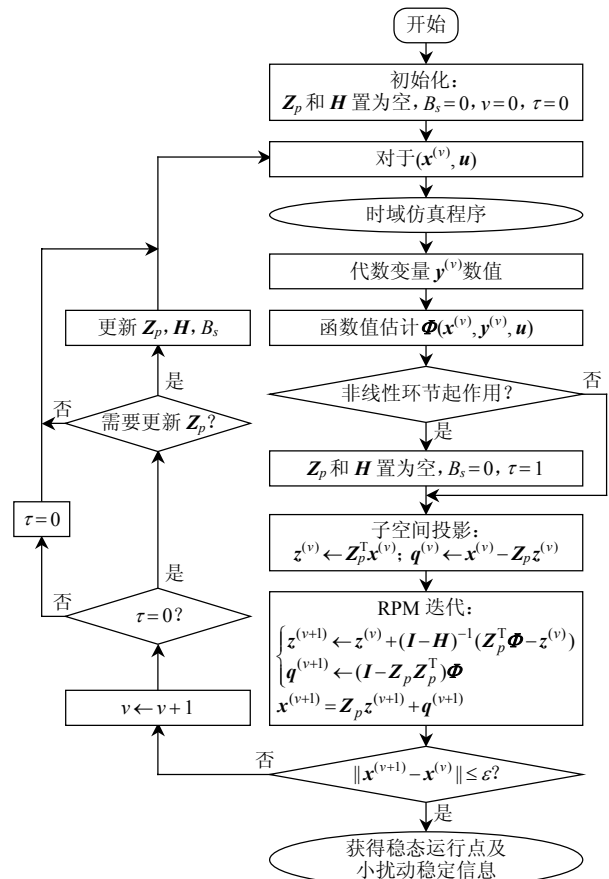


图 1 递归投影算法的整体流程图

Fig. 1 Flowchart of the recursive projection method

后, RPM 利用 TDSC 的输出结果(包括代数变量数值^[7]、函数值估计结果、残差数值以及矩阵向量乘积的近似值等)完成基底构造(QR 分解或 Arnoldi 方法)和 RPM 的迭代。RPM 计算得到的新状态变量又被反馈给 TDSC 作下一步积分的初值。在 RPM 的作用下,原不动点迭代的收敛性大大增强,系统稳态运行点的小扰动稳定性也得以判别。

同时,考虑到电力系统中普遍存在大量非线性环节(例如限幅器、迟滞环节、继电器等),为了能够根据系统的非线性变化对基底矩阵进行更新,从而提取正确的稳态运行点和小扰动稳定信息,本文在 RPM 迭代步骤中引入一个非线性环节指示信号(τ)并采用图 1 所示的处理方式:初始情况下置 $\tau=0$;当系统中发生非线性变化时,则置 $\tau=1$,暂时闭锁基底构造环节,清空已构建的基底矩阵,并对基底构造步骤进行重启^[7]。

4 算例分析

4.1 WECC 9 节点系统

4.1.1 算例系统简介

本算例中发电机采用 4 阶模型,励磁器为 IEEE

DC1 型，原动机为简单 3 阶模型。元件模型的具体细节参见文献[20]。母线 4 在 0.1 s 发生三相接地短路故障，故障于 0.2 s 清除(断开线路 4-9)。采用 PST^[8] 仿真软件进行积分计算，积分方法为改进欧拉法和隐式梯形法，积分步长为 0.005 s。不论采用显式或隐式积分方法，不动点迭代都无法收敛。

4.1.2 RPM 作用于显式改进欧拉积分方法的情形

如果将 RPM 作为改进欧拉法的外层控制算法，则不稳定的不动点迭代过程可以收敛到故障后的平衡点。同时 RPM 近似出不动点迭代格式雅克比矩阵 Φ_x 的部分主导特征值，并根据式(20)推导出系统雅克比矩阵 F_x 的部分特征值。 F_x 有 2 对共轭特征值(0.38 ± j0.52 及 0.52 ± j6.42)位于右半复平面，从而判断该平衡点为不稳定平衡点。

不稳定/慢子空间的基底可以由 QR(6) 或 Arnoldi 方法构建。表 1 对比了 MEM 和 RPM 的计算性能。表中情形 2—5 对 RPM 采用了不同的基底构造方式和参数设置方案。

表 1 MEM 和 RPM 的性能比较(WECC 9 节点系统)
Tab. 1 Performance comparison between MEM and RPM (WECC 9-bus system)

| 情形 | 方法 | K_a | B_s | S_s | S_f | T_c/s | $E_b/10^{-2}$ |
|----|---------|-------|-------|-------|-------|---------|---------------|
| 1 | MEM | | | | | — | |
| 2 | QR(6) | 200 | 29 | 140 | 1140 | 37.5 | 3.4 |
| 3 | QR(6) | 250 | 27 | 140 | 1240 | 39.4 | 3.2 |
| 4 | Arnoldi | | 29 | 100 | 100 | 8.0 | 1.0 |
| 5 | Arnoldi | | 19 | 100 | 100 | 50.9 | 1.3 |

表 1 中 B_s 为基底维数； S_s 为开始构建基底时的迭代步； S_f 为基底最终形成时的迭代步； T_c 为迭代收敛所耗费的时间； E_b 代表基底精度，该值由 Φ_x 真实特征值 $\{\bar{\mu}_k\}_1^{B_s}$ 和 RPM 近似特征值 $\{\tilde{\mu}_k\}_1^{B_s}$ 之间的相对误差来衡量^[16]：

$$E_b^2 = \frac{1}{B_s} \sum_{k=1}^{B_s} \left(\frac{|\bar{\mu}_k - \tilde{\mu}_k|}{|\bar{\mu}_k|} \right)^2 \quad (24)$$

从表 1 中可以看出参数(K_a 、 B_s 、 S_s)设置对 RPM 计算性能的影响。QR 分解法不需要事先指定构造基底的时间(S_s)和基底大小(B_s)，其性能主要受参数 K_a 影响。比较情形 2、3 可以看出， K_a 较小时，基底维数相对较大而精度相对较低。对于 Arnoldi 方法，则需要预先指定 S_s 和 B_s 的数值。由于无法预知适宜的基底大小，本算例为情形 4 设定了与情形 2 相同的基底维数。可以看出，由于情形 4 的基底提取较早而且精度较高，因此 RPM 能够显著增强不动点迭代的收敛性，从而抵偿了 Arnoldi 方法构造基底所耗费的额外代价，整体计算速度大为加快。

此外，将情形 4、5 进行对比可以看出，较大的基底维数有利于增强迭代的收敛性，但是这同时也将增加 Arnoldi 方法以及牛顿法的计算代价。此时，RPM 的整体计算性能取决于占据主导地位的影响因素。

图 2 分别给出了显式改进欧拉方法(情形 1)和 RPM 迭代方法(以情形 4 为例)的仿真曲线。对于情形 1，图中的曲线代表系统真实的故障后变化轨迹(发散轨迹)。而对于情形 4，图中的曲线只是 RPM 作用下计算不稳定平衡点过程的直观示意图，该曲线不再代表实际的动态响应。在图 2 所示的 A 点处，RPM 通过 Arnoldi 方法构造了基底矩阵；从 A 点开始，全状态空间被分解为 2 个子空间分别进行计算；在图中 B 点处，RPM 迭代满足收敛标准(15)，从而获得了系统的不稳定平衡点。

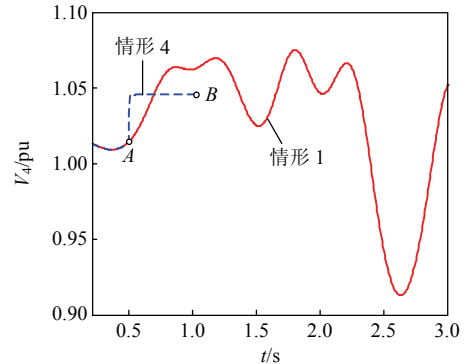


图 2 情形 1、4 仿真结果比较图
Fig. 2 Comparison of curves for Case 1 and Case 4

4.1.3 RPM 作用于隐式梯形积分方法的情形

类似的，RPM 也可以作为隐式梯形积分算法的外层控制算法，计算不稳定的故障后平衡点，并给出小扰动稳定信息。表 2 对 ITM 和 RPM 的计算性能进行了比较。为方便对照，QR 方法的参数 K_a 以及 Arnoldi 方法的参数 B_s 、 S_s 的设置均与 4.1.2 节相同。通过对情形 7—10 的比较也可以得出与 4.1.2 节类似的结论。其中情形 7、8 中 K_a 的变化范围并未对 RPM 的计算结果产生影响。这是由于在 K_a 的 2 种取值下，RPM 迭代都可以同时满足 Krylov 接受标准(23)，因此两算例的基底构造过程和计算结果是相同的。

表 2 ITM 和 RPM 的性能比较(WECC 9 节点系统)
Tab. 2 Performance comparison between ITM and RPM (WECC 9-bus system)

| 情形 | 方法 | K_a | B_s | S_s | S_f | T_c/s | $E_b/10^{-2}$ |
|----|---------|-------|-------|-------|-------|---------|---------------|
| 6 | ITM | | | | | — | |
| 7 | QR(6) | 200 | 30 | 140 | 1040 | 53.8 | 4.1 |
| 8 | QR(6) | 250 | 30 | 140 | 1040 | 53.8 | 4.1 |
| 9 | Arnoldi | | 29 | 100 | 100 | 12.1 | 1.0 |
| 10 | Arnoldi | | 19 | 100 | 100 | 76.7 | 1.3 |

4.2 新英格兰 39 节点系统

4.2.1 算例系统简介

本算例的元件模型与 4.1 节相同。母线 3 在 0.12 s 时发生三相接地短路故障,故障于 0.36 s 清除(断开线路 3-4)。采用 PST^[8]仿真软件进行积分计算,积分方法为改进欧拉法和隐式梯形法,仿真步长为 0.01 s,不动点迭代缓慢收敛到稳态运行点。

4.2.2 RPM 作用于显式改进欧拉积分方法的情形

RPM 可以显著加快不动点迭代收敛到稳态运行点的速度。在获得故障后平衡点的同时, RPM 近似得出了不动点迭代格式雅克比矩阵 Φ_x 的部分主导特征值,从中可以推导出系统雅克比矩阵 F_x 的部分特征值,由于这些特征值都位于复平面的左半平面,因此可判断故障后平衡点具有小扰动稳定性。

不稳定/慢子空间的基底可以由 QR(6)或者 Arnoldi 方法构建。表 3 给出了 MEM 以及 RPM 迭代方法计算性能的比较结果。

表 3 MEM 和 RPM 的性能比较(新英格兰 39 节点系统)
Tab. 3 Performance comparison between MEM and RPM (New England 39-bus system)

| 情形 | 方法 | K_a | B_s | S_s | S_f | T_c/s | $E_b/10^{-2}$ |
|----|---------|-------|-------|-------|-------|---------|---------------|
| 1' | MEM | | | | | 267.1 | |
| 2' | QR(6) | 100 | 38 | 746 | 2 033 | 72.8 | 4.200 0 |
| 3' | QR(6) | 150 | 28 | 1 164 | 2 064 | 70.4 | 3.700 0 |
| 4' | Arnoldi | | 33 | 1 300 | 1 300 | 69.2 | 0.008 9 |
| 5' | Arnoldi | | 48 | 800 | 800 | 36.7 | 2.400 0 |

从表 3 中可以看出,对于 QR 分解的基底构造方法(情形 2' 和 3')来说,参数 K_a 取值较小时,所得的基底维数 B_s 相对较大而基底精度相对较低。对于 Arnoldi 方法(情形 4' 和 5')来说,情形 4' 的基底构造时间(S_s)较晚,不利于 RPM 快速发挥增强收敛性的作用,但此时故障扰动引起的非线性已经减弱,因而有利于提高基底精度;情形 5' 的基底构造时间(S_s)较早,此时故障扰动引起的非线性仍然较强,因而基底精度比情形 4' 低,但是由于 RPM 能够较早发挥增强收敛性的作用,而且基底维数 B_s 较大,因而有利于增强迭代的收敛性。最终 RPM 的整体计算性能受到基底构造时间、基底精度、基底维数以及牛顿法求解本身的计算代价等因素的综合影响。

图 3 给出了改进欧拉方法(情形 1')和 RPM 迭代方法(以情形 2' 为例)的仿真结果曲线。

此算例计算过程中有非线性现象发生,因此需要考虑非线性环节对 RPM 计算结果的影响。以情形 2' 为例,首先在图 3 中 A 点处有 5 维向量被添加到基底矩阵中,之后 RPM 迭代按照 1.2 节中介绍的

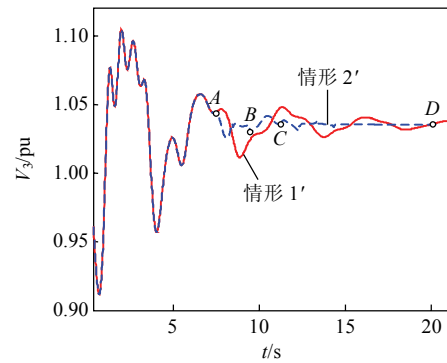


图 3 情形 1'、2' 仿真结果比较图

Fig. 3 Comparison of curves for Case 1' and Case 2'

步骤进行。当迭代进行到图中 B 点时, 34 号母线励磁器的电压调节器输出值达到上限, 此时 TDSC 向 RPM 输出指示信号, RPM 暂时闭锁基底构造环节, 清空已构建的基底矩阵(15 维), 并对基底构造步骤进行重启。一个新的 5 维基底矩阵在图中的 C 点处生成, 该基底维数逐渐扩大到 38 维, RPM 迭代在图中 D 点处收敛。通过这些操作, RPM 可以根据系统的非线性变化对基底矩阵进行更新, 从而提取正确的稳态运行点和小扰动稳定信息。

4.2.3 RPM 作用于隐式梯形积分方法的情形

如果将 RPM 作用于隐式梯形算法外围, 同样可以加快不动点迭代收敛到稳态运行点的速度, 获得正确的故障后平衡点以及相应的小扰动稳定性信息。RPM 计算参数(包括 QR 方法的参数 K_a 、Arnoldi 方法的参数 B_s 、 S_s)的设置与 4.2.2 节相同。表 4 对 ITM 和 RPM 的计算性能进行了比较。4.2.2 节中对非线性环节的处理方式仍然适用。如果将表 3、4(或表 1、2)进行对比, 可以看出 RPM 与显式积分方法联合使用时的计算速度要比与隐式积分法联合使用时的快速。这是因为通常情况下, 显式方法所需要的计算代价比隐式方法低。同时, 由于 RPM 可以有效克服显式积分方法中的数值稳定性问题^[7], 因此十分适宜与显式积分方法进行结合使用。

表 4 ITM 和 RPM 的性能比较(新英格兰 39 节点系统)
Tab. 4 Performance comparison between ITM and RPM (New England 39-bus system)

| 情形 | 方法 | K_a | B_s | S_s | S_f | T_c/s | $E_b/10^{-2}$ |
|-----|---------|-------|-------|-------|-------|---------|---------------|
| 6' | ITM | | | | | 352.0 | |
| 7' | QR(6) | 100 | 30 | 487 | 1 738 | 92.8 | 3.000 0 |
| 8' | QR(6) | 150 | 33 | 737 | 1 737 | 94.7 | 2.600 0 |
| 9' | Arnoldi | | 33 | 1 300 | 1 300 | 108.2 | 0.008 1 |
| 10' | Arnoldi | | 48 | 800 | 800 | 61.3 | 1.200 0 |

5 结论

本文回顾了 RPM 的基本原理与步骤, 给出了

基于 QR 分解和 Arnoldi 方法的基底构造方法, 验证了 RPM 增强不动点迭代收敛性以及判别系统小扰动稳定状态的有效性, 分析了不同基底构造方式和参数设置方案对 RPM 计算性能的影响, 并比较了 RPM 与显式和隐式积分方法结合使用时的效率。主要结论如下:

1) RPM 可以有效增强不动点迭代的收敛性, 从而可以加快不动点迭代的收敛速率, 克服不动点迭代的数值稳定问题, 并可以计算不稳定的平衡点。

2) RPM 的整体计算性能受到基底构造时间、基底精度、基底维数以及牛顿法求解本身的计算代价等因素的综合影响。

3) RPM 与显式积分方法联合使用时的计算速度要比与隐式积分方法联合使用时快速; 同时, 由于 RPM 可以有效克服显式积分方法的数值稳定问题, 因此十分适宜与显式积分方法结合使用。

参考文献

- [1] 王锡凡. 现代电力系统分析[M]. 北京: 科学出版社, 2003: 292-311.
Wang Xifan. Modern power system analysis[M]. Beijing: Science Press, 2003: 292-311(in Chinese).
- [2] 汤涌. 电力系统数字仿真技术的现状与发展[J]. 电力系统自动化, 2002, 26(17): 66-70.
Tang Yong. Present situation and development of power system simulation technologies[J]. Automation of Electric Power Systems, 2002, 26(17): 66-70(in Chinese).
- [3] Shroff G M, Keller H B. Stabilization of unstable procedures: the recursive projection method[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1993, 30(4): 1099-1120.
- [4] Siettos C I, Pantelides C C, Kevrekidis I G. Enabling dynamic process simulators to perform alternative tasks: a time-stepper based toolkit for computer-aided analysis[J]. Industrial and Engineering Chemistry Research, 2003, 42(26): 6795-6801.
- [5] Koronaki E D, Boudouvis A G, Kevrekidis I G. Enabling stability analysis of tubular reactor models using PDE/PDAE integrators[J]. Computers and Chemical Engineering, 2003, 27(7): 951-964.
- [6] Love P. Bifurcations in Kolmogorov and Taylor-vortex flows[D]. Pasadena: California Institute of Technology, 1999.
- [7] Fan M, Ajarapu V, Wang C, et al. RPM-based approach to extract power system steady state and small signal stability information from the time-domain simulation[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2011, 26(1): 261-269.
- [8] Chow J H, Cheung K W. A toolbox for power system dynamics and control engineering education and research[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 1992, 7(4): 1559-1564.
- [9] Watkins D S. The matrix eigenvalue problem: GR and Krylov subspace methods[M]. Philadelphia: SIAM, 2007: 151-152.
- [10] 苏永春, 程时杰, 文劲宇. 电力系统动态稳定性的解析延拓分析[J]. 中国电机工程学报, 2007, 27(4): 9-14.
Su Yongchun, Cheng Shijie, Wen Jinyu. Power system dynamic voltage stability analysis and stability type discrimination[J]. Proceedings of the CSEE, 2007, 27(4): 9-14(in Chinese).
- [11] 王丹, 王成山. 基于数值微分法求导的分布式发电系统仿真算法[J]. 电力系统自动化, 2009, 33(17): 81-85.
Wang Dan, Wang Chengshan. A stability simulation method of distributed generation system based on numerical differentiation method[J]. Automation of Electric Power Systems, 2009, 33(17): 81-85(in Chinese).
- [12] Gear C W. Numerical initial value problems in ordinary differential equations[M]. New Jersey: Prentice-Hall, 1971: 40-43.
- [13] 倪以信, 陈寿孙, 张宝霖. 动态电力系统的理论和分析[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002: 147-156.
Ni Yixin, Chen Shousun, Zhang Baolin. The theory and analysis of dynamic power system[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002: 147-156(in Chinese).
- [14] Parlett B N. The QR algorithm[J]. Computing in Science and Engineering, 2000, 2(1): 38-42.
- [15] Daniel J W, Gragg W B, Kaufman L, et al. Reorthogonalization and stable algorithms for updating the Gram-Schmidt QR factorization[J]. Mathematics of Computation, 1976, 30(136): 772-795.
- [16] Möller J. An investigation of the recursive projection method on a scalar linear and non-linear partial differential equation[R]. Stockholm: KTH Royal Institute of Technology, 2001.
- [17] Lehoucq R B, Sorensen D C, Yang C. ARPACK users' guide: solution of large-scale eigenvalue problems with implicitly restarted Arnoldi methods[M]. Philadelphia: SIAM, 1998: 43-66.
- [18] Sorensen D C. Implicit application of polynomial filters in a k -step Arnoldi method[J]. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 1992, 13(1): 357-385.
- [19] 谷寒雨, 陈陈. 一种新的大型电力系统低频机电模式计算方法[J]. 中国电机工程学报, 2000, 20(9): 50-54.
Gu Hanyu, Chen Chen. A new algorithm for the computation of low frequency electro-mechanical oscillation modes of large power systems[J]. Proceedings of the CSEE, 2000, 20(9): 50-54(in Chinese).
- [20] Rogers G. Power system oscillations[M]. Norwell, MA: Kluwer Academic Publishers, 2000: 305, 308.



范孟华

收稿日期: 2011-02-10。

作者简介:

范孟华(1983), 女, 博士, 研究方向为电力系统安全稳定分析与控制, fannenghua@tju.edu.cn;

王成山(1962), 男, 博士, 长江学者特聘教授, 研究方向为电力系统安全性分析、城市电网规划和配电系统自动化、分布式发电等, cswang@tju.edu.cn;

Venkataramana Ajarapu, 男, 教授, IEEE Fellow, 研究方向为电力系统无功规划、电压稳定性分析及新能源发电等, vajjarap@iastate.edu.

(责任编辑 谷子)