

随机谱载荷下含多裂纹结构的概率断裂力学可靠性模型

费斌军 高镇同 (北京航空航天大学固体力学所, 北京, 100083)

THE RELIABILITY MODEL OF THE STRUCTURE WITH MULTI-CRACKS UNDER RANDOM LOADS

Fei Bin-jun, Gao Zhen-tong

(Institute of Solid Mechanics, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing, 100083)

摘 要 通过将结构疲劳裂纹在随机谱载荷下的扩展作为一个时间离散的随机过程处理, 建立了一个估计各载荷谱周期末的裂纹长度概率分布的裂纹扩展概率断裂力学计算方法。当已知结构裂纹扩展引起的载荷重新分配时, 该方法可以给出多裂纹结构随时间变化的各个裂纹的长度的概率分布。在此基础上, 本文建立了一个多裂纹结构裂纹相互干扰情况下的结构可靠性模型, 并给出了一个简单的算例。

关键词 概率断裂力学, 裂纹扩展, 可靠性

Abstract The present paper presents a method for estimation of the fatigue crack length distribution based on the stochastic processing of time discretized. The strains of the structure containing multiples cracks at each structural detail are changed during the propagation of the cracks. The method can calculate the probability density function of each crack. With the crack length distribution, and distribution of the strain level, a model of crack length- K_{Ic} interference for the reliability of multi-cracks structure is established. The reliability-time curve of the structure can be plotted. A sample example is presented.

Key words probability fracture mechanic, crack growth, reliability

1 裂纹扩展概率模型

随机载荷谱下的疲劳裂纹扩展的概率断裂力学模型为^[1]

$$a_i = a_{i-1} (1 - cq_i T a_{i-1}^c)^{-1/c} \quad (1)$$

其中: T 为载荷谱周期所代表的飞行时间; c , q 为裂纹扩展公式的参数, 为应力水平的函数; a_{i-1} , a_i 分别为裂纹在第 i 个载荷谱周期开始与结束时的长度。

q_i 可以认为是相互独立而服从同一概率分布的随机变量。根据试验数据检验, 可以认为 q_i 服从对数正态分布, 其概率密度函数为

$$f_q(\log(q_i)) = N(\mu(s), \sigma(s)) \quad (2)$$

$\mu(s)$, $\sigma(s)$ 分别为 q_i 的对数均值及对数标准差, 均为名义应力的函数。

这样, 一个在第 i 个载荷谱周期开始时长度为 a_{i-1} 的裂纹, 在这个载荷谱周期末的裂纹长度的条件概率密度函数为

$$f_{a_i}(a_i|a_{i-1}) = f_q \left[\log \left(\frac{a_{i-1}^{-c} - a_i^{-c}}{cT} \right) \right] a_i^{-(c+1)} / T \quad (3)$$

如在第 i 个载荷谱周期开始时的裂纹长度的概率密度函数为 $f_{a_{i-1}}(a_{i-1})$, 则 a_i 的概率密度函数为

$$f_{a_i}(a_i) = \int_0^{\infty} f_q \left[\log \left(\frac{a_{i-1}^{-c} - a_i^{-c}}{cT} \right) \right] f_{a_{i-1}}(a_{i-1}) a_i^{-(c+1)} / T da_{i-1} \quad (4)$$

2 多裂纹相互干扰情况下的裂纹扩展概率模型

在多裂纹情况下, 如裂纹的扩展导致了各含裂纹细节部位的名义应力发生变化, 裂纹的进一步扩展的规律将随之发生变化。如结构仍处于线性状态, 载荷谱的谱型并没有变; 同时裂纹在每一载荷谱周期内的扩展引起的载荷分配并不十分严重, 我们就可以在每一个载荷谱周期的开始根据各裂纹长度的分布计算载荷的分布; 并以此为基础计算此载荷谱周期末的裂纹长度分布。

2.1 载荷再分配模型

由于裂纹扩展引起的载荷再分配可以由应力分析的程序进行计算。根据计算结果可以得到第 k 个细节的载荷标定曲线

$$S_k = g_k(A) \quad (5)$$

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 为各细节部位裂纹的长度, 在各裂纹长度的概率分布相互独立的假设下, 其联合概率密度函数为各细节裂纹分布函数的乘积。第 k 个细节的名义应力 S_k 的概率分布函数为

$$F_{S_k}(S_k) = P(s_k < S_k) = \int_{D_k} \dots \int f_A(A) dA \quad (6)$$

D_k 为 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 空间中满足 $g_k(A) < S_k$ 的区域。

2.2 载荷再分配后的裂纹扩展概率模型

如由于裂纹扩展, 在第 i 个周期时载荷将发生变化, 则由式(3)确定的裂纹扩展概率模型的参数也将发生变化。在该载荷周期末的裂纹长度的概率密度函数为

$$f_{a_{k_i}}(a_{k_i}) = \iint_0^{\infty} \left\{ f_{a_{k_i-1}}(a_{k_i-1}) f_q \left[\log \left(\frac{a_{i-1}^{-c} - a_i^{-c}}{cT} \right) \right] a_i^{-(c+1)} f_{S_k}(S_k) / T \right\} da_{i-1} dS_k \quad (7)$$

此时 c 及 $f_q(\log(q))$ 均为应力水平 S_k 的函数。

3 含多裂纹结构裂纹相互干扰时的可靠性模型

在多裂纹相互干扰的情况下, 各细节的应力取决于各裂纹长度。所以 S_{\max} 是一个由随机变量 a_1, a_2, \dots, a_n 所确定的随机变量。其概率分布函数可以用式(6)计算。这时各含裂纹细节各自的可靠度为^[2]

$$R_k = \iiint_{D_k} f_{a_k}(a_k) f_{S_k}(S_k) f_{K_{Ic}}(K_{Ic}) da_k dK_{Ic} dS_k \quad (8)$$

式中: $f_{a_k}(a_k)$, $f_{S_k}(S_k)$ 分别为第 k 个含裂纹细节的裂纹长度和对载荷谱中的最大载荷的名义应力的概率密度函数; D_k 为 (a_k, S_k, K_{Ic}) 平面上满足条件 $S_k Y(a_k) > K_{Ic}$ 的区

域; $f_{K_{Ic}}(K_{Ic})$ 为结构材料断裂韧度的概率密度函数; $Y(a_k)$ 为应力强度因子中的几何因子。如果结构的传载形式为串联结构, 则结构的总体可靠度为

$$R = \prod_{k=1}^n R_k \tag{9}$$

4 计算实例

4.1 细节裂纹扩展概率模型

由同一载荷谱的三级应力水平的销孔的裂纹扩展数据按式(1)和式(2)估计的 q 的概率分布的参数及 c 与应力水平的关系为

$$\left. \begin{aligned} \mu_q(S_k) &= -3.56 + 0.00197S_k \\ \sigma_q(S_k) &= 0.42 - 0.0012S_k \\ c(S_k) &= -0.845 + 0.00236S_k \end{aligned} \right\} \tag{10}$$

4.2 结构载荷分配模型

飞机结构某接头有两个耳片, 当两个销孔的裂纹长度分别为 a_1 和 a_2 时, 各自的载荷谱中的最大应力分别为

$$S_1 = 250 + 3(a_1 - a_2); \quad S_2 = 230 - 3(a_1 - a_2) \tag{11}$$

4.3 裂纹扩展模型

如在第 $i-1$ 个载荷谱周期末的两个销孔的裂纹长度的概率密度函数分别为

$$f_{a_{i-1}}(a_{i-1}); \quad f_{a_{2i-1}}(a_{2i-1}) \tag{12}$$

由式(7)可以得到第 i 载荷谱周期末的裂纹长度的概率密度函数

$$\begin{aligned} f_{a_{1i}}(a_{1i}) &= \int \int_0^\infty \left\{ f_{a_{i-1}}(a_{i-1}) f_q \left[\log \left(\frac{a_{i-1}^{-c} - a_{1i}^{-c}}{cT} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. a_{1i}^{-(c+1)} f_{a_{2i-1}} [a_1 - (S_1 - 250) / 3] / 3T \right\} da_{i-1} dS_1 \\ f_{a_{2i}}(a_{2i}) &= \int \int_0^\infty \left\{ f_{a_{2i-1}}(a_{2i-1}) f_q \left[\log \left(\frac{a_{2i-1}^{-c} - a_{2i}^{-c}}{cT} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. a_{2i}^{-(c+1)} f_{a_{i-1}} [a_2 - (S_2 - 230) / 3] / 3T \right\} da_{2i-1} dS_2 \end{aligned} \tag{13}$$

图 1 为两孔边各有 0.3mm 的初始裂纹时, 在各载荷谱周期末的裂纹长度的超越概率。

4.4 可靠性模型

将式(13)代入式(9)得到各个含裂纹细节的可靠度为

$$\begin{aligned} R_1 &= \int \int_{D_k} \left[f_{K_{Ic}}(K_{Ic}) f_1(a_1) f_2(a_1 - (S_1 - 250) / 3) / 3T \right] da_1 dK_{Ic} dS_1 \\ R_2 &= \int \int_{D_k} \left[f_{K_{Ic}}(K_{Ic}) f_2(a_2) f_1(a_2 - (S_2 - 230) / 3) / 3T \right] da_2 dK_{Ic} dS_2 \end{aligned} \tag{15}$$

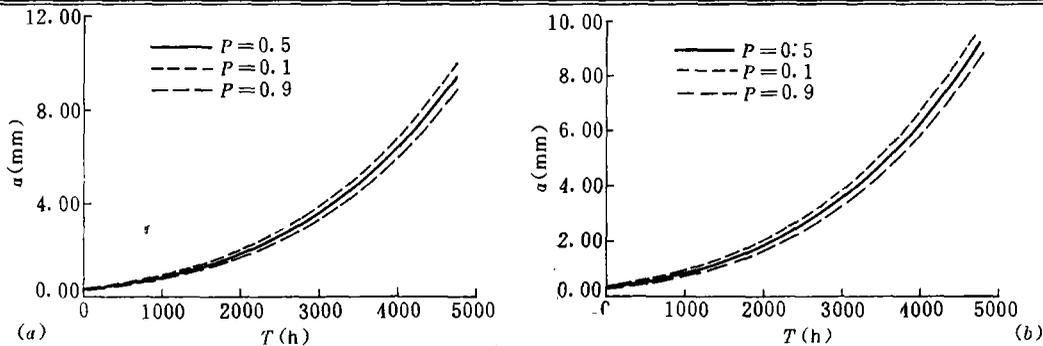


图1 伪随机谱载荷下的裂纹扩展的超越概率: (a) 第一孔; (b) 第二孔。

$$R = R_1 R_2 \quad (16)$$

图2为两个孔的可靠度及结构总可靠度随飞行时间的变化曲线。

5 结论

在考虑了结构的疲劳裂纹在随机谱载荷下的裂纹扩展的随机性之后, 裂纹长度不再是载荷及初始状态的确定性的函数, 而是由这两个因素确定的一个随机变量。在这种情况下, 当裂纹的扩展导致结构的应力再分配时, 裂纹的进一步扩展将受到其他裂纹的长度的概率分布的影响。在假设裂纹的扩展为高斯白噪声随机过程的前提下, 每一个载荷谱周期开始时各含裂纹细节部位的名义应力水平的概率分布可以用裂纹-载荷的标定函数及所有裂纹的长度的概率分布来计算。根据载荷谱周期开始时的裂纹长度分布及名义应力水平的概率分布函数, 可以得到该载荷谱周期末的各裂纹的长度的概率分布函数。以此类推, 在已知结构各裂纹的初始状态时, 可以计算出任意载荷谱周期末的裂纹长度的概率分布函数。

在计算出裂纹长度的概率分布函数及所承受的载荷谱的最大应力的概率分布之后, 就可以计算出各含裂纹细节的可靠度。然后根据按结构形式确定的可靠性模型, 就可以得到结构的总可靠度。

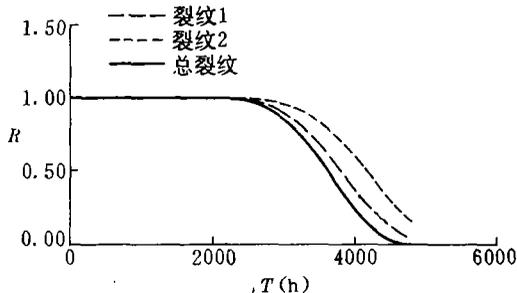


图2 结构含两个裂纹相互干扰的可靠度-飞行时间曲线

参 考 文 献

- 1 Yang J N, *et al.* Stochastic Crack Propagation in Fastener Holes. AIAA Paper No.85-0666, 1985. 225~233
- 2 高镇同. 疲劳应用统计学. 北京: 国防工业出版社, 1986. 193
- 3 王 中. 随机损伤过程模型. 北京航空航天大学博士论文, 1984.