

# 耦合改进型矢量磁滞模型的 变压器磁场分析及实验研究

张艳丽<sup>1</sup>, 刘洋<sup>1</sup>, 谢德馨<sup>1</sup>, KOH Chang-Seop<sup>2</sup>

(1. 沈阳工业大学电气工程学院, 辽宁省 沈阳市 110870; 2. 韩国忠北国立大学, 忠北清州 361-763)

## Finite Element Analysis of Magnetic Field in Transformer Core Coupled With Improved Vector Hysteresis Model and Its Experimental Verification

ZHANG Yan-li<sup>1</sup>, LIU Yang<sup>1</sup>, XIE De-xin<sup>1</sup>, KOH Chang-Seop<sup>2</sup>

(1. School of Electrical Engineering, Shenyang University of Technology, Shenyang 110870, Liaoning Province, China;  
2. School of Electrical and Computer Engineering, Chungbuk National University, Cheongju, Chungbuk 361-763, Korea)

**ABSTRACT:** In order to improve the computation accuracy of magnetic characteristic for transformers and electric machines, an improved vector magnetic hysteresis model was proposed based on classical Chua-type model with the direct description of the mathematical relation between the magnetic field intensity  $H$  and magnetic flux density  $B$ . In this model, the parameters was derived from the measured data of magnetic property employing the 2-D single steel sheet measuring apparatus. The mathematical formular of proposed model taking the angle between the rolling direction and  $x$ -axis into account was described. The finite element (FE) formulation coupled with the proposed model was derived, and the convergence of FE computation was discussed. By comparing the numerical results of magnetic field with experimental ones in the single transformer core model, the effectiveness of the proposed magnetic model and FE formulation was investigated.

**KEY WORDS:** finite element analysis; vector hysteresis model; single transformer core; electric steel sheet; 2-D measuring apparatus

**摘要:** 为了准确分析变压器、电机等电工设备的磁性能, 在基于传统 Chua-type 模型的基础上, 提出了一种直接描述电工钢片磁场强度  $H$  与磁通密度  $B$  数学关系的改进型矢量磁滞模型, 其中模型参数由单片电工钢片磁特性测量系统获得; 推导了不同轧制方向磁滞模型的数学表达式, 讨论了耦

合该磁滞模型的时步有限元计算的收敛性, 并通过对单相变压器铁心模型磁场的实验测试, 验证了耦合磁滞模型有限元分析的有效性。

**关键词:** 有限元分析; 矢量磁滞模型; 单相变压器铁心; 电工钢片; 二维测量装置

## 0 引言

特高压电网的安全运行需要高质量的特高压、特大容量的发电机、变压器等重大电工装备, 在这些重大电工装备的研发中, 发热冷却、电磁力等一系列产品性能均关系到设备的安全运行, 而这些至关重要问题的妥善处理无不关联到电磁场数值分析中电工钢片复杂磁特性的准确模拟。例如, 在变压器磁场分析中, 如果在分析计算中采用目前传统的正交各向异性磁化特性模型, 计算得到的拐角处的磁感应强度往往高的不符合实际; 如果不能将铁心与磁屏蔽的磁特性、各向异性包含进去, 损耗计算就不能得到精确的结果, 就会产生某些部件、某些部位的损耗集中, 导致局部过热<sup>[1-3]</sup>。

此外, 当某种描述电工钢片磁特性的磁滞模型被用于磁场数值分析时, 它应满足来自于问题本身的要求: 一是它具有精确反映材料磁滞特性的能力; 二是它不带来更多的计算负担并且收敛较快。目前在磁滞模型建立及相应磁场分析方面已有一些研究成果报道<sup>[4-9]</sup>。例如, Preisach 类磁滞模型得到的是磁化强度  $M$  与磁场强度  $H$  的关系, 但在实际进行电磁场数值分析时通常需要的是磁感应强度  $B$  与磁场强度  $H$  的关系, 所以在将磁滞模型与

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(50807039, 50777042); 辽宁省高校创新团队支持计划项目(2008T132); 辽宁省博士启动项目(20081026)。

Project Supported by National Natural Science Foundation of China (50807039,50777042); Project Supported by College Innovation Team Support Program of Liaoning Province (2008T132); Project Supported by Doctoral Fund of Liaoning Province (20081026).

磁场求解方法进行耦合时,还需要进行变换,从而使求解方程非常复杂,实际应用有一定的困难;E&S模型是近几年发展较为成熟的磁滞模型<sup>[10-15]</sup>,但在模型建立过程中由于受磁参数计算复杂度的限制而降低了模拟的准确度。另一方面,在目前国际流行的电磁场分析商用软件(如 ANSYS、ANSOFT 等)中,均不能进行如上所述材料磁特性的精细模拟,仍然沿用较粗略的简化处理。要实现将材料特性的精细模拟与实际电磁场问题分析的有机结合,必须采用自编程序。

本文首先基于 Chua-type 模型,提出了改进型矢量磁滞模型,并进行了二维磁特性测量实验验证;然后,将磁性材料的复杂特性融合到磁场的有限元分析中,推导了有限元计算公式,讨论了有限元计算的收敛性;最后,对单相变压器铁心模型磁场进行了有限元分析与实验验证。

## 1 考虑5次谐波分量的改进型磁滞模型

### 1.1 改进型磁滞模型

基于经典的 Chua-type 模型,日本学者 M. Enokizono 在最近几年提出 E&S 模型,该矢量磁滞模型定义为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} H_R \\ H_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{Rr} & 0 \\ 0 & v_{Tr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_R \\ B_T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{Ri} & 0 \\ 0 & v_{Ti} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial B_R}{\partial \tau} \\ \frac{\partial B_T}{\partial \tau} \end{bmatrix} \\ v_{Rr} = \kappa_{Rr1} + \kappa_{Rr2} B_R^2 + \kappa_{Rr2} B_R \frac{\partial B_R}{\partial \tau} / \frac{\partial \tau} + \kappa_{Rr4} (\frac{\partial B_R}{\partial \tau})^2 \end{cases} \quad (1)$$

式中:下标 R 和 T 分别代表电工钢片的轧制方向和与其相垂直的方向;  $v_{Rr}$ 、 $v_{Tr}$  称为磁阻系数;  $v_{Ri}$ 、 $v_{Ti}$  称为磁滞系数。E&S 模型的缺点在于模型建立过程中受模型复杂度的限制而仅考虑了磁场强度波形傅里叶分析中一、三次谐波分量的影响,进而降低了模型的准确度。为了同时兼顾模型的模拟准确度和模型的工程实用性,本文提出在考虑磁场强度波形一、三、五次谐波分量的同时,简化磁阻系数及磁滞系数的表达式。

基于电工钢片二维磁特性测量装置<sup>[16]</sup>测得的磁场强度波形在考虑了五次谐波分量后傅里叶展开式可表示为

$$H_k = \sum_{n=1}^3 H_{(2n-1)H_k} \sin[(2n-1)\tau + \varphi_{(2n-1)H_k}] \quad (2)$$

式中下标  $k$  代表式(1)中 R 或 T。令式(1)和式(2)右端对应项相等,并考虑到实验中控制磁通密度  $B$  变

化的轨迹为椭圆轨迹,整理后磁阻系数可表示为

$$v_{kr} = \left\{ \sum_{n=1}^3 \{ R_{(2n-1)H_k} \cos[(2n-1)\tau] \} P_k \right\} / \cos \tau + \left\{ \sum_{n=1}^3 \{ I_{(2n-1)H_k} \sin[(2n-1)\tau] \} Q_k \right\} / \sin \tau \quad (3)$$

进一步整理,得

$$v_{kr} = \kappa_0^{kr} + \kappa_1^{kr} \cos^2 \tau + \kappa_2^{kr} \sin^2 \tau + \kappa_3^{kr} \cos^4 \tau + \kappa_4^{kr} \sin^4 \tau \quad (4)$$

其中,

$$\begin{cases} \kappa_0^{kr} = (R_{1H_k} - 3R_{3H_k} + 5R_{5H_k}) P_k + (I_{1H_k} + 3I_{3H_k} + 5I_{5H_k}) Q_k \\ \kappa_1^{kr} = (4R_{3H_k} - 20R_{5H_k}) P_k \\ \kappa_2^{kr} = (-4I_{3H_k} - 20I_{5H_k}) Q_k \\ \kappa_3^{kr} = 16R_{5H_k} P_k \\ \kappa_4^{kr} = 16I_{5H_k} Q_k \end{cases} \quad (5)$$

式中:  $P_k = \frac{R_{B_k}}{R_{B_k}^2 + I_{B_k}^2}$ ;  $Q_k = \frac{I_{B_k}}{R_{B_k}^2 + I_{B_k}^2}$ ;  $R_{(2n-1)H_k}$ ,

$I_{(2n-1)H_k}$  分别对应于  $H_k$  波形傅里叶展开式中 1、3、5 次谐波的实部和虚部。当用参数  $B_{\max}$ ,  $\alpha$ ,  $\theta$  描述磁密  $B$  变化的椭圆轨迹<sup>[16]</sup>时,对于固定的  $B$  轨迹,  $H_k$  波形一定,  $\kappa_{0-4}^{kr}$  是一个定值,因而  $v_{kr}$  是  $B_{\max}$ ,  $\alpha$ ,  $\theta$ ,  $\tau$  的函数。磁滞系数  $v_{ki}$  的推导与此类似,不作详述。

图 1 给出了电工钢片 30PG110 磁场强度计算结

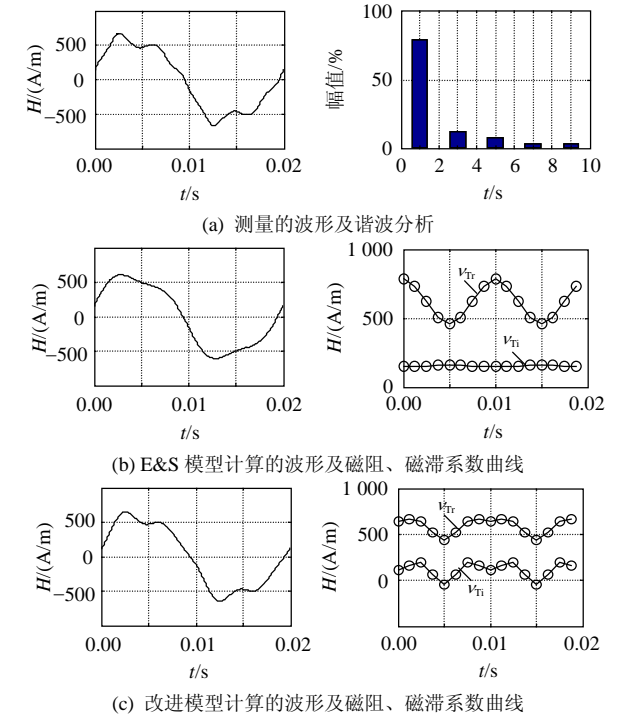


图 1 磁场强度计算结果与测量结果的比较

Fig. 1 Comparison between computation results and measured ones of magnetic field intensity

果与测量数据的比较。由图中可以看出，与传统 E&S 模型相比，改进型磁滞模型式(4)由于加入了更多谐波分量，使模型的准确度得到了较为明显的提高，而且公式中避免了磁通密度对时间求导计算，使表述更为简洁。

### 1.2 考虑轧制方向与 x 轴成 φ 角的磁滞模型

在有限元分析中，变压器铁心的轧制方向并非始终在 x 轴方向，而是与 x 轴成一定角度 φ，如图 2 所示，这时式(1)描述的磁滞关系要从轧制方向描述的坐标系下变换到直角坐标系。具体过程如下：利用坐标变换，直角坐标系下磁通密度可表示为

$$\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_R \\ B_T \end{bmatrix} = \mathbf{T}(\varphi) \begin{bmatrix} B_R \\ B_T \end{bmatrix} \quad (6)$$

式中  $\mathbf{T}(\varphi)$  为旋转矩阵。同理，考虑式(1)后的磁场强度可表示为

$$\begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix} = \mathbf{T}(\varphi) \begin{bmatrix} H_R \\ H_T \end{bmatrix} = \mathbf{T}(\varphi) \begin{bmatrix} v_{Rr} & 0 \\ 0 & v_{Tr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix} + \mathbf{T}(\varphi) \begin{bmatrix} v_{Ri} & 0 \\ 0 & v_{Ti} \end{bmatrix} \mathbf{T}^{-1}(\varphi) \begin{bmatrix} \partial B_x / \partial \tau \\ \partial B_y / \partial \tau \end{bmatrix} \quad (7)$$

其中，

$$\begin{cases} v_1^{r,i} = v_{Rr,Ri} \cos^2 \varphi + v_{Tr,Ti} \sin^2 \varphi \\ v_2^{r,i} = v_3^r = v_{Rr,Ri} \sin \varphi \cos \varphi - v_{Tr,Ti} \sin \varphi \cos \varphi \\ v_4^{r,i} = v_{Rr,Ri} \sin^2 \varphi + v_{Tr,Ti} \cos^2 \varphi \end{cases} \quad (8)$$

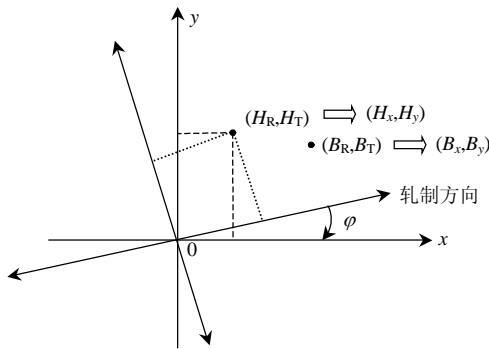


图 2 磁滞模型在 x 轴方向与轧制方向之间的坐标变换  
Fig. 2 Coordinate transform of the hysteresis model between x-axis and rolling direction

## 2 基于改进型磁滞模型的有限元计算公式

根据式(7)，磁场强度  $H$  和磁通密度  $B$  的矢量关系为

$$\mathbf{H} = \mathbf{v}_r \mathbf{B} + \mathbf{v}_i \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \tau} \quad (9)$$

根据麦克斯韦方程，并利用伽辽金近似，得

$$\int_{\Omega} \mathbf{v}_r (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot (\nabla \times \mathbf{N}) d\Omega + \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{\Omega} \mathbf{v}_i (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot (\nabla \times \mathbf{N}) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{N} \cdot \mathbf{J} d\Omega \quad (10)$$

在二维情况下，通过空间离散，式(10)可展开为

$$\mathbf{S}_1 \mathbf{A} + \mathbf{S}_2 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \tau} = \mathbf{T} \quad (11)$$

式中  $\mathbf{S}_1$ 、 $\mathbf{S}_2$  为含有磁阻系数、磁滞系数的系数阵； $\mathbf{T}$  为与电流密度有关的向量。利用向后差分法对式(11)进行时间离散后，总的非线性时步有限元公式可表示为

$$\left(\mathbf{S}_1 + \frac{1}{\Delta \tau} \mathbf{S}_2\right) \mathbf{A}^{\tau+\Delta \tau} = \frac{1}{\Delta \tau} \mathbf{S}_2 \mathbf{A}^{\tau} + \mathbf{T}^{\tau+\Delta \tau} \quad (12)$$

图 3 给出了耦合磁滞模型进行有限元分析的流程图，其中在求取式(5)各谐波系数时需要利用二维磁特性测量数据提供的样本进行 B-spline 插值，以便得到连续变化的磁阻系数、磁滞系数。

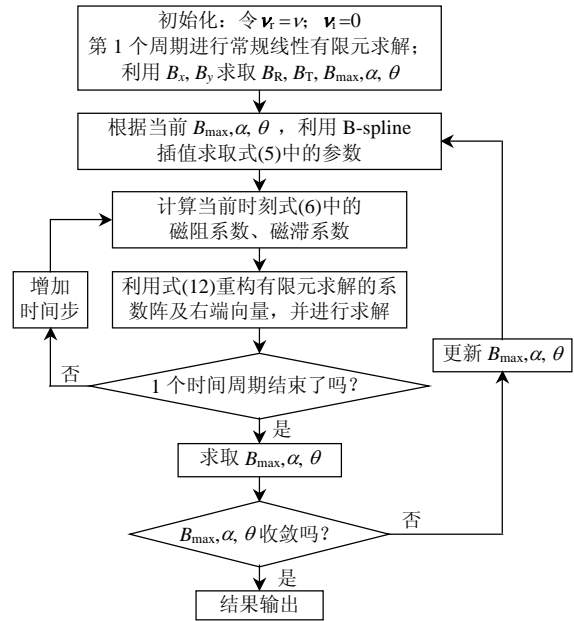
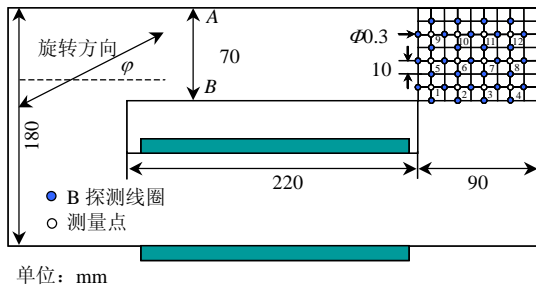


图 3 非线性时步有限元计算流程图  
Fig. 3 Flowchart of nonlinear and time-step finite element computation

## 3 变压器铁心磁场分析及实验验证

### 3.1 有限元计算收敛性讨论

图 4 给出了单相变压器的计算模型，图上标出了 12 个检测点的位置。利用上述的有限元公式求解后，得到图 5 描述的轧制方向与 x 轴分别成 15° 和 45°，A、B 2 点之间平均磁密为 0.5 T 时磁力线分布图。在非线性时步有限元计算过程中， $B_{max}$ 、 $\alpha$ 、 $\theta$  3 个参数作为收敛判据，在每个求解的时间周期，



单位: mm

图4 计算模型

Fig. 4 Computational model

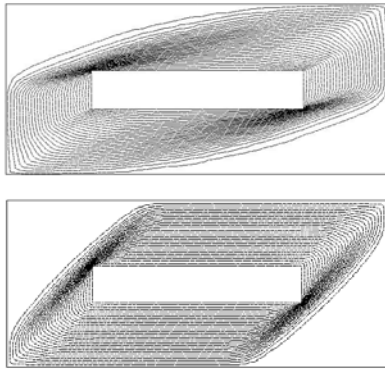


图5 轧制方向与x轴分别成15°和45°时磁力线分布

Fig. 5 Distribution of magnetic flux lines when the angle between x-axis and rolling direction is 15° and 45°

这3个参数按式(13)不断更新:

$$P_i^{k+1} = P_i^k + \delta \Delta P_i^{k+1} \quad (13)$$

式中:  $P_i^{k+1}$  代表第  $i$  个单元在第  $k+1$  个时间周期中的  $B_{max}$ ,  $\alpha$ ,  $\theta$  值;  $\Delta P_i^{k+1}$  为  $P$  的增量;  $\delta$  为松弛因子。

图6给出了计算过程中  $B_{max}$ ,  $\alpha$ ,  $\theta$  值的收敛情况, 其中在最初几次迭代中  $\delta$  取值为 1, 随着迭代次数的增加  $\delta$  迅速减小。从图中可以看出, 经过大约 18 次迭代后这 3 个参数都表现出很好的收敛性。

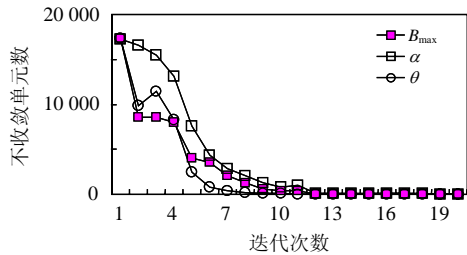


图6  $B_{max}$ ,  $\alpha$ ,  $\theta$  收敛性

Fig. 6 Convergence characteristics of  $B_{max}$ ,  $\alpha$ ,  $\theta$

### 3.2 实验验证

为了验证计算结果的可靠性, 图7给出了图4描述的单相变压器的实验模型, 其中变压器铁心由40片型号为30PG110的晶粒取向硅钢片叠加而成, 硅钢片轧制方向沿水平方向, 激励电源频率为50 Hz, 施加的磁动势(单位: A)为

$$F = 80 \sin \omega t \quad (14)$$

图7中测量区域的测量点位置对应于图4的12个检测点, 每个测量点周围有4个直径为0.3mm的孔洞, 用于安放  $B_x$ ,  $B_y$  探测线圈。图8给出了磁通密度在这些测量点处数值计算结果与测量结果的比较图, 图中, 黑色实线为测量结果, 带有圆圈的实线为数值计算结果。从图中可以看出, 测量点3、5、12处磁通密度呈现出较为明显的旋转轨迹, 这与实际情况相符; 此外, 由于  $B_x$ ,  $B_y$  探测线圈仅安放在叠片硅钢片的表面, 测量到表面处磁通密度变化情况, 而有限元计算结果则是叠片硅钢片中间位置磁场情况, 因而, 由于测量误差的存在, 导致在个别测量点处计算结果与测量结果略有差别, 但其它点处两者吻合的很好, 证明了本文提出的改进型磁滞模型及耦合该模型的有限元公式的有效性。

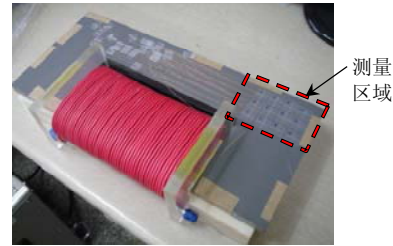


图7 实验模型

Fig. 7 Experimental model

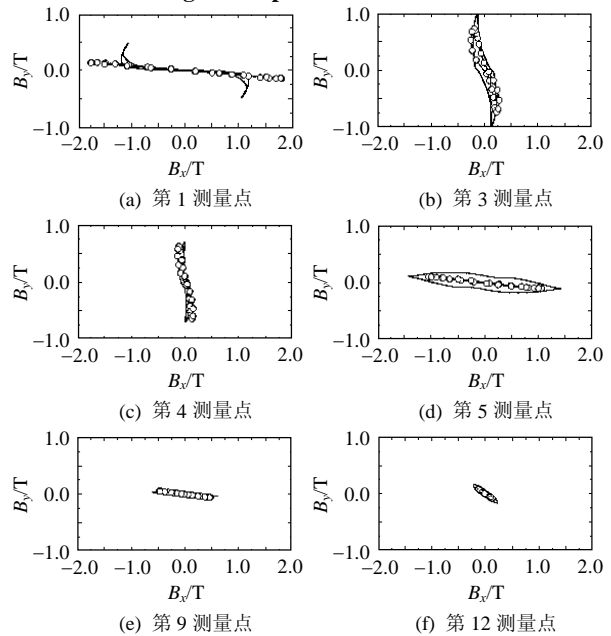


图8 测量点处磁通密度计算结果与测量结果的比较  
Fig. 8 Comparison of magnetic flux density between the numerical results and measured ones at measuring points

## 4 结论

本文利用提出的改进型矢量磁滞模型分析了变压器铁心磁场分布。实验分析表明改进模型不仅公式表述简单便于工程应用, 而且由于考虑了更多

谐波分量的影响而具有更高的模拟精度。数值计算结果表明耦合该磁滞模型的有限元计算具有良好的收敛性能。单相变压器铁心模型的实验测试验证了上述数值分析结果的正确性和可靠性。

## 参考文献

- [1] 谢德馨. 三维涡流场的有限元分析[M]. 北京: 机械工业出版社, 2007: 89-92.  
Xie Dexin. Finite element analysis of 3D eddy current field [M]. Beijing: China Machine Press, 2007: 89-92(in Chinese).
- [2] 程志光. 电气工程电磁热场模拟与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2009: 38-55.  
Cheng Zhiguang. Simulation and application of electromagnetic and thermal field in electrical engineering[M]. Beijing: Science Press, 2009: 38-55(in Chinese).
- [3] 谢德馨, 杨仕友. 工程电磁场数值分析与综合[M]. 北京: 机械工业出版社, 2009: 124-143.  
Xie Dexin, Yang Shiyu. Numerical analysis and synthesis of engineering electromagnetic field[M]. Beijing: China Machine Press, 2009: 124-143(in Chinese).
- [4] Fujiwara K, Adachi T, Takahashi N. A proposal of finite-element analysis considering two-dimensional magnetic properties[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2002, 38(3): 889-892.
- [5] Wang Xiaoyan, Xie Dexin. Analysis of induction motor using Field-Circuit coupled Time-Periodic finite element method taking account of hysteresis[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2009, 45(3): 1740-1743.
- [6] Nakano M, Nishimoto H, Fujiwara K, et al. Improvement of single sheet testers for measurement of 2-d magnetic properties up to high flux density[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 1999, 35(5): 3965-3964.
- [7] Pera T, Ossart F, Waeckerle T. Field computation in nonlinear anisotropic sheets using the coenergy model[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 1993, 29(6): 2425-2427.
- [8] Wang Xiaoyan, Xie Dexin, Bai Baodong, et al. 3-D FEM analysis in electromagnetic system considering vector hysteresis and anisotropy[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2008, 44(6): 890-893.
- [9] Mori K, Yanase S, Okazaki Y, et al. 2-D mag-netic rotational loss of electrical steel at high magnetic flux density[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2005, 41(10): 3310-3312.
- [10] Kawashima T, Enokizono M. Magnetic field analysis of ferrite core by using chua-type-model[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2003, 39(3): 1558-1561.
- [11] Enokizono M. Vector magneto-hysteresis E&S model and magnetic characteristic analysis[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2006, 42(4): 915-918.
- [12] Zhang Yanli, Young Hwan Eum, Xie Dexin, et al. An improved engineering model of vector magnetic properties of Grain-oriented electrical steels[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2008, 44(11): 3181-3184.
- [13] Enokizono M, Shimoji H, Ikariga A. Vector magnetic characteristic analysis of electrical machines[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2005, 41(5): 2032-2035.
- [14] Tone K, Shimoji H, Urata S, et al. Magnetic characteristic analysis considering the crystal grain of grain-oriented electrical steel sheet[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2005, 41(5): 1704-1707.
- [15] Zhang Yanli, Eum Y H, Li Wei, et al. An improved modeling of vector magnetic properties of electrical steel sheet for FEM application and its Experimental verification[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2009, 45(3): 1162-1165.
- [16] 张艳丽, 何厚键, 谢德馨, 等. 基于二维磁性测量的电工钢片矢量磁滞模型[J]. 中国电机工程学报, 2010, 30(3): 130-135.  
Zhang Yanli, He Houjian, Xie Dexin, et al. Vector magnetic hysteresis model of electrical steel sheets based on two dimensional magnetic property measurement[J]. Proceedings of the CSEE, 2010, 30(3): 130-135(in Chinese).



张艳丽

收稿日期: 2010-04-06。

作者简介:

张艳丽(1975—), 女, 副教授, 博士后, 主要研究方向为电工钢片复杂磁滞特性的模拟, zhangyanli\_sy@hotmail.com;

谢德馨(1943—), 女, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为电气装备电磁场及耦合物理场理论与应用。

(责任编辑 王剑乔)