

径向基无单元算法求解二维运动导体涡流电磁问题

杨光源, 雷刚, 陈孝明, 邵可然

(华中科技大学电气与电子工程学院, 湖北省 武汉市 430074)

Radial Basis Function Meshless Method to Solve 2-D Electromagnetic Problems With Moving Conductors

YANG Guangyuan, LEI Gang, CHEN Xiaoming, SHAO Keran

(College of Electrical & Electronic Engineering, Huazhong University of Science and Technology,
Wuhan 430074, Hubei Province, China)

ABSTRACT: This paper applied the radial basis function (RBF) collocation method to solve electromagnetic problems with moving conductors. A superposition RBF collocation method under moving coordinate system was presented to compute the convective-diffusion Maxwell equations of the transient eddy current magnetic field. The field, which was regarded as a superposition of two fields generated by the excitation current and the eddy current respectively, was constructed with RBFs in separate moving covering coordinate systems. According to the linear property of the RBF collocation model, the corresponding governing equations could be directly decoupled and solved through time-domain iteration. Therefore, the motion of the conductor could be transferred into the relative motion between coordinate systems. And the RBF model would not change during the iteration, which avoided the model reconfiguration due to the conductor motion. To examine the method, two numerical examples: TEAM workshop problem 28 and an electromagnetic launcher system were computed. The results agreed well with the experiment data shown in literatures.

KEY WORDS: radial basis function collocation method; superposition principle; moving conductor; eddy current; moving coordinate systems

摘要: 将径向基配置法应用于求解运动导体涡流电磁问题, 提出一种基于运动坐标系的叠加径向基配置算法来求解描述瞬态涡流磁场的对流扩散麦克斯韦方程。求解域内的磁场被视作由激励电流与感生涡流 2 种电流所产生磁场的叠加, 并在运动坐标系下分别用径向基函数来拟合, 根据

径向基配置法的控制方程呈线性这一特点, 对其进行解耦并构造时域迭代来求解。这样就把导体的运动转化为坐标系之间的相对运动, 迭代过程中在各自坐标系下的径向基模型始终保持不变, 避免了因导体运动造成的模型重铸。为了验证该算法的有效性, 求解了基准问题 TEAM workshop problem 28 以及一个电磁线圈弹射系统的动态过程, 所得结果与文献中的实验结果相符合。

关键词: 径向基配置法; 叠加原理; 运动导体; 涡流; 运动坐标系

0 引言

许多工程装置中都含有运动的导体, 如涡流驱动的快速分断开关、电磁弹射装置、磁悬浮系统等。对运动导体涡流电磁场问题的求解一直是计算电磁学中的热点和难点问题^[1-3]。

计算这类问题的关键: 一是求解描述磁场的对流扩散方程, 二是构造可以模拟导体运动的数学模型。传统的基于网格数值算法, 如有限元法在求解运动涡流问题时往往会遇到较大的困难。由于导体的运动, 各单元之间的相对位置在随时变化, 需要在每个迭代时间步中对模型的网格进行重剖, 极大地增加了求解的计算量, 在模型较复杂, 所需单元较多的情况下是不可取的。

近年来发展起来许多改进型算法来避免模网格重剖, 其思想是在不同的模型中, 对运动部分和静止部分进行建模, 然后将 2 个模型耦合, 如有限元和边界元耦合算法、组合网格有限元法以及插值运动边界法^[4-14]等, 然而这样的处理也增加了额外的计算量来对两部分模型进行耦合。

基金项目: 国家自然科学基金项目(50877029); 高等学校博士学科点专项科研基金项目(201001421100004)。

Project Supported by National Natural Science Foundation of China (50877029); Supported by the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education (SRFDP) Under Grant (20100142110004).

径向基点配置算法是近年来发展起来的一种纯无单元算法。它免除了网格的剖分, 通过布置在求解域内的节点来构造形函数, 利用点配置法将描述电磁场的偏微分麦克斯韦方程转化为线性矩阵方程进行求解, 具有格式简单, 求解精度高的特点, 已经被用来求解稳态和瞬态电磁场问题^[15-17]。作为一种非基于网格的算法, 径向基点配置法在处理运动导体磁场问题时具有得天独厚的优势。

本文根据径向基点配置法控制方程呈线性的特点, 结合场源叠加原理, 提出了一种建立在运动坐标系下的叠加径向基点配置算法来求解运动导体涡流磁场。求解域内的磁场被视为由 2 个场源: 已知的激励电流和导体内的感生涡流所产生的磁场的叠加, 通过径向基函数来直接对描述磁场的控制方程进行解耦, 并在时域内构造迭代进行求解。描述激励电流磁场和涡流磁场的径向基节点分别设置在独立的坐标系中, 从而把导体的运动转化为坐标系之间的相对运动, 坐标系内的节点坐标和形函数在迭代过程中保持不变, 避免了模型的重铸。

作为验证, 本文求解了基准问题 TEAM workshop problem 28 以及一个电磁线圈弹射系统的运动过程, 所得结果与文献中的实验结果相符, 显示了该算法在求解运动导体电磁问题时的有效性。

1 运动导体涡流电磁系统的场方程

为不失普遍性, 在二维笛卡尔坐标系下考虑如下电磁系统: 设在求解域 Ω 内存在激励电流区 Ω_s 和导体区 Ω_c , 其中 Ω_s 内存在均匀分布的电流密度 $J_s=J_z$, 当 J_s 随时间变化时, 其时变磁场会在导体区 Ω_c 内感生出涡流, 其电流密度用 J_e 来表示, 由于涡流的存在, 此时的导体变成载流导体, 在磁场中会受到力的作用而运动。导体的电导率 σ 和求解域内的磁导率 μ 为常数, 二维模型下矢量磁位 A 只有一个维度, 定义 $A=A_z$ 表示其 z 轴分量, Ω_c 内的磁场应满足:

$$\sigma\mu\frac{\partial A}{\partial t} - \sigma\mu\mathbf{V} \times \nabla \times A - \nabla^2 A = \mu J_s \quad (1)$$

式中矢量 \mathbf{V} 表示导体的运动速度。定义线性算子 $L(\cdot) = \nabla^2(\cdot) + \sigma\mu\mathbf{V} \times \nabla \times (\cdot)$, 公式(1)可写成:

$$\sigma\mu\frac{\partial A}{\partial t} - L(A) = \mu J_s \quad (2)$$

这是一个典型的对流扩散方程。用 Ω_h 来表示除

了 Ω_c 以外的求解域, 其中的磁场满足如下泊松方程:

$$\nabla^2 A = -\mu J_s \quad (3)$$

在求解域的边界 $\partial\Omega$ 上磁场满足:

$$B(A) = 0 \quad (4)$$

式中 $B(\cdot)$ 是边界条件算子, 在一类和二类边界上它分别表示 $A=0$ 和 $\partial A/\partial n=0$, n 表示边界的法线方向。

2 径向基点配置算法

径向基配点法的原理见文献[18], 其思想是利用分布在整个求解域和边界上的节点而不是网格所构造的径向基函数来拟合待求的未知量。设在求解域内和边界上分别布置 $N_I+N_B=N$ 个节点, A 的径向基拟合形式为

$$A(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^N a_j(t) \cdot \varphi_j(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}^T(\mathbf{x})\mathbf{a} \quad (5)$$

式中: φ_j 为以第 j 个节点为中心的径向基函数; \mathbf{Q} 表示径向基函数向量; $\mathbf{x}=[x, y]$ 为二维坐标向量; $\mathbf{a}=[a_1(t), a_2(t), \dots, a_N(t)]$ 表示待求的未知系数向量。

为得到控制方程, 将(5)代入(2)~(4), 并在所有节点上进行点插值。节点处的磁场所满足的方程由该节点所在的区域决定, 设在 N_I 个域内节点中, 编号为 $1 \dots N_E$ 的节点位于涡流区 Ω_c , 编号为 $N_E+1 \dots N_I$ 的节点位于非涡流区 Ω_h , 边界节点编号为 $i=N_I+1 \dots N$, 可以得到如下的径向基点配置法控制方程:

$$\sum_{j=1}^N \left\{ \sigma\mu \frac{\partial a_j(t)}{\partial t} \varphi_j(\mathbf{x}_i) - a_j(t) L[\varphi_j(\mathbf{x}_i)] \right\} = \mu J_s(\mathbf{x}_i), \quad i=1, \dots, N_E \quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^N a_j(t) \nabla^2 [\varphi_j(\mathbf{x}_i)] = -\mu J_s(\mathbf{x}_i), \quad i=N_E+1, \dots, N_I \quad (7)$$

$$\sum_{j=1}^N a_j(t) B[\varphi_j(\mathbf{x}_i)] = 0, \quad i=N_I+1, \dots, N \quad (8)$$

写成向量形式如下:

$$\sigma\mu \mathbf{Q}^T(\mathbf{x}_i) \dot{\mathbf{a}} - L[\mathbf{Q}^T(\mathbf{x}_i)] \mathbf{a} = \mu J_s(\mathbf{x}_i), \quad i=1, \dots, N_E \quad (9)$$

$$\nabla^2 [\mathbf{Q}^T(\mathbf{x}_i)] \mathbf{a} = \mu J_s(\mathbf{x}_i), \quad i=N_E+1, \dots, N_I \quad (10)$$

$$B[\mathbf{Q}^T(\mathbf{x}_i)] \mathbf{a} = 0, \quad i=N_I+1, \dots, N \quad (11)$$

上述方程中含有对时间的微分, 常用的处理方法有隐式欧拉法, 四阶龙格库塔法等。这里用Crank-Nicolson(克兰克-尼克尔森)格式来构造迭代

求解, 它也是一种隐式算法, 令时间间隔为 Δt , 对于未知数 U , 其从第 k 步到第 $k+1$ 步的离散形式为

$$\partial U / \partial t = (U^{k+1} - U^k) / \Delta t \quad (12)$$

$$U = 0.5(U^{k+1} + U^k) \quad (13)$$

将式(12)和(13)代入式(9)—(11), 可以得到最终的涡流磁场控制方程如下:

$$\left\{ \frac{\sigma\mu}{\Delta t} \mathbf{Q}^T(\mathbf{x}_i) - \frac{1}{2} L[\mathbf{Q}^T(\mathbf{x}_i)] \right\} \mathbf{a}^{k+1} = \left\{ \frac{\sigma\mu}{\Delta t} \mathbf{Q}^T(\mathbf{x}_i) + \frac{1}{2} L[\mathbf{Q}^T(\mathbf{x}_i)] \right\} \mathbf{a}^k + \mu J_s^{k+1}(\mathbf{x}_i), \quad i=1, \dots, N_E \quad (14)$$

$$[\nabla^2 \mathbf{Q}^T(\mathbf{x}_i)] \mathbf{a}^{k+1} = \mu J_s^{k+1}(\mathbf{x}_i), \quad i=N_E+1, \dots, N_I \quad (15)$$

$$B[\mathbf{Q}^T(\mathbf{x}_i)] \mathbf{a}^{k+1} = 0, \quad i=N_I+1, \dots, N \quad (16)$$

显然, 根据选取的离散方法的不同, (14)—(16)的形式也有相应的变化, 但是都可以用与时间无关的径向基函数 \mathbf{Q} 构成的系数矩阵和与时间相关的未知量 \mathbf{a} 之间的线性矩阵方程来表示, 在瞬态涡流问题的求解中这样的迭代格式被证明是准确有效的^[15]。

3 叠加径向基点配置算法

3.1 场源叠加原理应用于径向基点配置法

到此已经得到了描述运动涡流磁场的径向基点配置法控制方程, 然而如果将该模型直接应用于运动导体系统将会面临许多问题。

首先是如何描述导体的运动。径向基函数是基于空间内分布的节点来构造的, 由于 Ω_e 的位置是变化的, 如果假定节点的空间位置不变, 则 Ω_e 所包含的节点会随着运动而发生变化, 位于 Ω_e 边缘的节点会由于前后时间段所处的区域发生变化导致其控制方程发生突变; 而如果让 Ω_e 内的节点也随着导体运动, 方程系数矩阵内的元素将由于节点坐标 \mathbf{x} 的改变而改变, 这就破坏了径向基函数的前后一致性, 导致迭代无法进行; 其次, 当 Ω_e 与 Ω_s 相距非常近时, 由于无法在两者之间的细小间隙中布置很多的节点, 从而难以准确地描述间隙中存在的高梯度磁场。

为了解决上述问题, 本文提出了叠加径向基点配置算法。从描述电磁场的麦克斯韦方程中可以看出, 无论是电场还是磁场, 都是由一定的“源”产生的, 如果空间内同时存在多个场源, 可以分别计算出每个场源单独作用时产生的场然后相加, 这就

是场源叠加原理。

回到运动导体涡流磁场问题中, 可以将求解域内的磁场看成激励电流 J_s 产生的磁场 A_s 和涡流 J_e 产生的磁场 A_e 二者的叠加, 公式(5)变成:

$$A(\mathbf{x}, t) = A_s(\mathbf{x}_s, t) + A_e(\mathbf{x}_e, t) = \mathbf{Q}_s^T(\mathbf{x}_s) \mathbf{a}_s(t) + \mathbf{Q}_e^T(\mathbf{x}_e) \mathbf{a}_e(t) \quad (17)$$

式中下标 s 和 e 分别表示与激励电流和涡流相关的场量。建立两组坐标系, 并分别在这两组坐标系中布置径向基节点来构造 \mathbf{Q}_s 和 \mathbf{Q}_e , 用 \mathbf{x}_s 和 \mathbf{x}_e 分别表示它们的节点在各自坐标系下的坐标, \mathbf{x}'_s 和 \mathbf{x}'_e 分别表示它们在对方坐标系下的坐标。和公式(5)相比, 式(17)多引入了一组节点和径向基函数, 表面上看起来使问题更加复杂了, 然而由于两组径向基模型分属于独立的坐标系, 可以用坐标系之间的相对运动来表示导体的运动, 避免了迭代过程中径向基节点模型发生改变。此外由于将激励电流和涡流磁场分开独立计算, Ω_e 与 Ω_s 之间的间隙也随之消除, 其中的高梯度磁场被转化为 2 个相对低梯度磁场的叠加。

下面考虑如何求解 A_s 和 A_e 。通常情况下 J_s 是已知的, 而 J_e 是由时变磁场在 Ω_e 内感生的, 即 J_e 和 J_s 二者之间存在着耦合关系, 由于径向基点配置法控制方程的线性特性, 可以在方程(14)—(16)内直接对这 2 个未知量进行解耦。首先考虑 A_s , 其在整个求解域 Ω 内满足:

$$\nabla^2 A_s = -\mu J_s \quad (18)$$

因此有

$$\nabla^2 [\mathbf{Q}_s^T(\mathbf{x}_{si})] \mathbf{a}_s^{k+1} = \mu J_s^{k+1}(\mathbf{x}_{si}), \quad i=1, \dots, N_{sI} \quad (19)$$

$$B[\mathbf{Q}_s^T(\mathbf{x}_{si})] \mathbf{a}_s^{k+1} = 0, \quad i=N_{sI}+1, \dots, N_s \quad (20)$$

通过式(19)—(20)可求出 \mathbf{a}_s^{k+1} 和 A_s^{k+1} , 在此基础上考虑涡流磁场 A_e , 设 \mathbf{Q}_e 的节点分布在 Ω_e 内的编号为 $1 \dots N_{eE}$, 将(17)和(19), (20)代入(14), 得

$$\left\{ \frac{\sigma\mu}{\Delta t} \mathbf{Q}_e^T(\mathbf{x}_{ei}) - \frac{1}{2} L[\mathbf{Q}_e^T(\mathbf{x}_{ei})] \right\} \mathbf{a}_e^{k+1} = \left\{ \frac{\sigma\mu}{\Delta t} \mathbf{Q}_e^T(\mathbf{x}_{ei}) + \frac{1}{2} L[\mathbf{Q}_e^T(\mathbf{x}_{ei})] \right\} \mathbf{a}_e^k - \left\{ \frac{\sigma\mu}{\Delta t} [A_s^{k+1}(\mathbf{x}'_{ei}) - A_s^k(\mathbf{x}'_{ei})] - \sigma\mu \mathbf{V}^{k+1} \times \nabla \times A_s^{k+1}(\mathbf{x}'_{ei}) \right\}, \quad i=1, \dots, N_{eE} \quad (21)$$

非导体区域不存在涡流, 磁场满足拉普拉斯方程: $\nabla^2 A_e = 0$, 因此有

$$\nabla^2[\mathbf{Q}_e^T(\mathbf{x}_{ei})]\mathbf{a}_e^{k+1} = 0, \quad i = N_{eE} + 1, \dots, N_{eI} \quad (22)$$

同样，在边界上有

$$B[\mathbf{Q}_e^T(\mathbf{x}_{ei})]\mathbf{a}_e^{k+1} = 0, \quad i = N_{eI} + 1, \dots, N_e \quad (23)$$

3.2 叠加径向基模型与常规径向基模型的等价性

通过解耦，得到了叠加径向基点配置法的运动导体涡流控制方程(19)–(23)，下面来验证其与常规径向基模型，即方程(14)–(16)的等价性。

为简便起见，首先不考虑导体的运动，即令 $\mathbf{V}=0$ ，考虑如下的径向基节点模型：在求解域 $0 \leq x \leq 200$ ， $0 \leq y \leq 200$ mm 的区域内和边界上均匀分布 $N=41 \times 41=1\,681$ 个径向基节点，其中坐标为(25, 105)的节点上存在 $J_s=-1.0 \times 10^6 \sin(100\pi t)$ A/m² 的电流密度，当节点坐标满足 $10 \leq x \leq 60$ 且 $115 \leq y \leq 145$ 时，该节点插值方程满足式(14)，其余域内节点满足式(15)，边界上磁场满足 $A=0$ 。

接下来分别用常规径向基模型和叠加径向基模型来求解。在建立运动坐标系时，令 \mathbf{Q}_s 和 \mathbf{Q}_e 的节点完全重合，节点数目都是 $41 \times 41=1\,681$ 个，并使用同样的高斯径向基函数来分别拟合 A_s 和 A_e ，二维坐标下高斯径向基函数的格式为

$$\varphi_i(x, y) = \exp[-c_x^2(x-x_i)^2 - c_y^2(y-y_i)^2], \quad i=1, 2, \dots, N$$

式中 c_x 和 c_y 为径向基的形状参数。

将上述模型参数代入(14)–(16)以及(19)–(23)并求解，所得的结果分别用 A 和 \tilde{A} 来表示。图 1 和图 2 分别给出了 $t=0.6$ ms 时刻 2 种算法所得的磁场线分布，除去边界上磁场大小为零的点之外， \tilde{A} 与 A 的全局相对误差：

$$E = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\tilde{A}_i - A_i}{A_i} \right)^2} = 2.253\,8 \times 10^{-12}$$

接近于零，可见 2 种算法的计算结果完全一致，

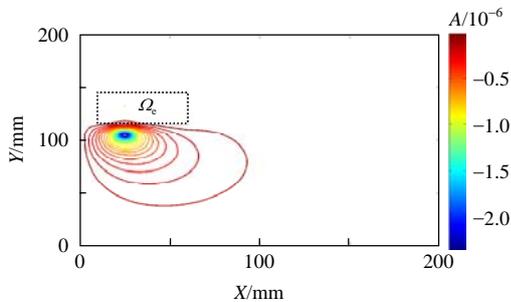


图 1 常规径向基模型的计算结果 A 的等位线

Fig. 1 Isopotential lines of the magnetic vector potential computed by the normal RBF collocation method

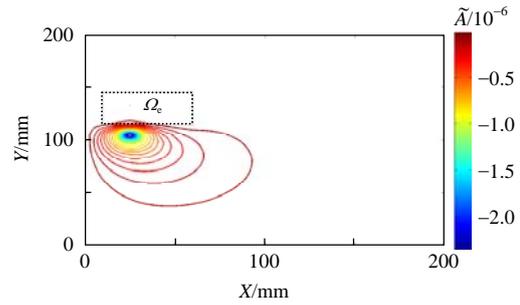


图 2 叠加径向基模型的计算结果 \tilde{A} 的等位线

Fig. 2 Isopotential lines of the magnetic vector potential computed by the superposition RBF collocation method

即在求解静止导体涡流磁场时叠加径向基模型与常规模型是等价的。

以上分析中假设 $\mathbf{V}=0$ ，接下来分别考察导体的运动对求解方程和对径向基模型产生的影响。

首先，当 $\mathbf{V} \neq 0$ 时，式(1)中所增加的扩散项 $-\sigma \mu \mathbf{V} \times \nabla \times \mathbf{A}$ 不会破坏其径向基点配置法控制方程的线性特性，因此也就不会改变该方程解的唯一性，叠加原理依然成立。速度项过大时引起的解的数值振荡可以通过多尺度径向基函数拟合来消除^[19]。

其次，式(21)中 A_s 和 A_e 的联系体现为在 \mathbf{Q}_s 所属坐标系中计算 \mathbf{Q}_e 区域内的激励磁场 $A_s(\mathbf{x}'_e)$ 。在不计导体运动时有 $\mathbf{x}'_e = \mathbf{x}_e$ ，设 \mathbf{Q}_e 与 \mathbf{Q}_s 分属的坐标系之间发生相对运动时有 $\mathbf{x}'_e = \mathbf{x}_e + \Delta \mathbf{x}_e$ ，只要能够准确地求解出 $A_s(\mathbf{x}'_e)$ ，就可以确保计算 A_e 的准确性。从(19)–(20)可以看出， $A_s(\mathbf{x}'_e)$ 的计算等同于静态场，只要建立合适的节点模型 \mathbf{Q}_s ，即可保证其计算精度^[16]。

需要注意的是求解域边界及其附近的节点模型，当 \mathbf{Q}_e 的坐标系相对初始位置有了 $\Delta \mathbf{x}_e$ 的位移时，其边界节点与原边界也有了 $\Delta \mathbf{x}_e$ 的偏差，因此 \mathbf{Q}_e 的边界节点并不准确满足原来的边界条件，这里需要根据不同的边界类型进行具体分析。

如果求解域的边界都是无穷远边界，那么在边界附近的磁场变化平缓且接近为零，当 $\Delta \mathbf{x}_e$ 相对整个模型尺寸很小时，可以近似认为磁场仍满足第一类边界条件；如果模型有其他类型的边界如对称边界、第二类边界时，只有当 $\Delta \mathbf{x}_e$ 的方向与此类边界切线方向平行时，才不会改变原来的边界条件。以上面的模型为例，设边界 $x=0$ 变为对称边界且满足 $\partial A / \partial x = 0$ ，其余仍为无穷远边界，如果 $\Delta \mathbf{x}_e$ 有 x 轴方向分量，就会给计算带来误差，并且误差会随着 $\Delta \mathbf{x}_e$ 的增大而增大，在建立径向基节点模型求解具体问题时应避免这种情况。必要时只能使用无穷远边

界, 放弃利用对称性简化模型, 而且边界应选取的足够远, 满足在可能的 Δx_e 偏差范围内磁场仍近似为零, 这样虽然所需的节点数目和计算量都相应的增多了, 但不会引起误差。

综上, 考虑导体的运动不会给计算引入显著的误差, 因此叠加径向基模型与常规径向基模型始终都可以认为是等价的, 这缘于径向基点配置法控制方程的线性特性, 使不同未知量之间的解耦变得简便。由于运动坐标系的引入, 避免了迭代过程中的模型重铸, 该算法可以方便地模拟运动导体涡流系统的动态过程。

4 验证算例

为了验证叠加径向基点配置算法在实际工程问题中的有效性, 求解了2个典型的算例。

首先是基准问题 TEAM workshop problem 28, 该系统由内外2个通有相反方向正弦电流的线圈提供激励磁场, 在位于线圈上方的铝盘中感生涡流, 并使铝盘受到斥力而运动, 经过一系列振荡衰减后停止在一定的高度, 其模型参数如图3所示^[20], 认为激励电流在线圈均匀分布, 忽略导线间隔对磁场分布的影响。

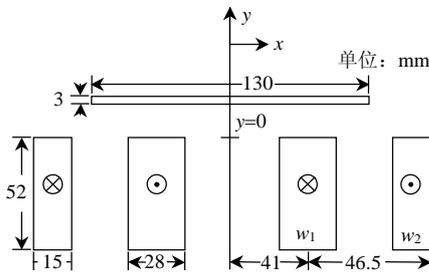


图3 TEAM workshop problem 28 轴对称模型参数, 线圈匝数 $w_1=960, w_2=576$

Fig. 3 Dimensions of the axisymmetric model of TEAM workshop problem 28, turn number of the inner and outer coils: $w_1=960, w_2=576$

由于铝盘沿 y 轴方向运动, 可以选择模型的轴截面右半平面作为求解域。磁场力的计算采用麦克斯韦张量法, 设 l 是包围运动导体部分的闭合曲线, l 上任意位置处的磁场力法线和切线方向分量 f_n 和 f_T 可分别用下面公式计算:

$$\begin{cases} f_n = 0.5(B_n^2 / \mu_0 - \mu_0 H_T^2) \\ f_T = B_n H_T \end{cases} \quad (24)$$

式中: B 和 H 分别表示磁通密度和磁场强度; 下标 n 和 T 分别表示 l 的法线和切线方向; 导体部分所

受的总磁场力等于 f_n 和 f_T 沿整个 l 的积分。在迭代时间间隔 Δt 很小情况下, 可以假设在 Δt 时间内导体受力恒定, 导体做匀加速直线运动, 导体的速度和运动距离可以通过牛顿运动方程计算。

铝盘的初始高度设为 3.8 mm, 图4给出了计算所得的导体运动位移随时间的变化曲线, 和文献[21]中的实验数据基本符合, 最终铝盘的静止高度约为 11.9 mm, 稍高于文献中的实验数据 11.3 mm。

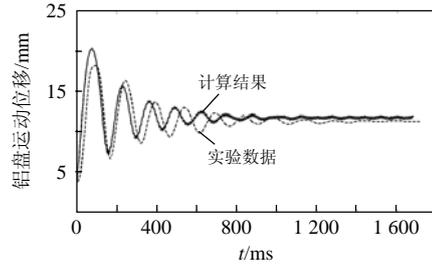


图4 铝盘的运动位移随时间的变化

Fig. 4 Variation curves of the displacement of the plate

第2个算例是求解一个电磁弹射系统的动态过程, 其模型参数和激励电流分别如图5、6所示^[21], 通过在线圈中通入快速上升的脉冲电流, 给弹射体施加一个很大的加速磁场力, 使其短时间内达到很高的速度。该问题的模型与 TEAM workshop problem 28 相似, 不同之处在于所用的激励电流是高频脉冲电流, 导体所受的磁场力更大。

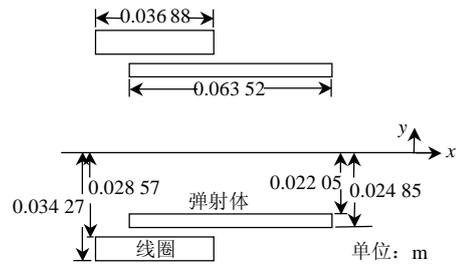


图5 电磁弹射系统的轴对称模型参数

Fig. 5 Dimensions of the axisymmetric model of the electromagnetic launcher system

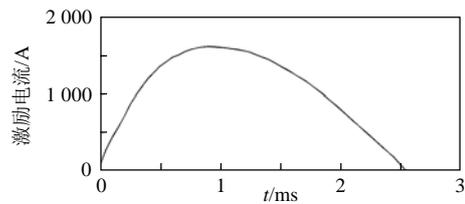


图6 激励线圈中的电流变化曲线

Fig. 6 Excitation current in the coil versus time

图7给出了 1 ms 时刻求解域内的磁场 A 的等位线分布, 由于对称性, 图中只给出了包括弹射体

部分的四分之一轴截面区域内的磁场，图中上面的虚线区域表示激励线圈，下面的是金属弹射体。图 8 给出了计算所得的弹射体运动速度随时间的变化，通过与文献[21]中的实验数据和有限元法计算结果相对比，可知径向基点配置法的计算结果同样是可信的。

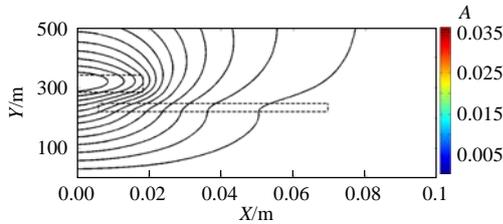


图 7 1ms 时刻求解域内的磁场 A 等位线分布

Fig. 7 Distribution of the isopotential lines of magnetic field A at t=1 ms in the solving domain

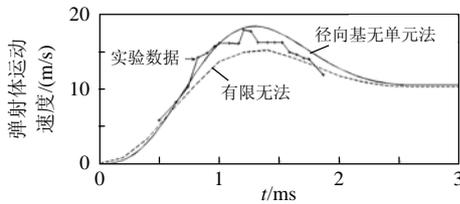


图 8 弹射体的运动速度随时间的变化

Fig. 8 Variation curves of the Displacement of the projectile

通过算例验证了径向基点配置法在求解二维运动导体涡流电磁场问题时的可行性。计算时所用的径向基函数为高斯径向基函数，其模型参数、节点数目及形状参数如表 1 所示。

表 1 算例中所用的径向基模型参数

Tab. 1 Parameters of the RBF model in the numerical examples

参数	求解域大小/mm	节点数目	c_x	c_y
算例 1 Q_s	200×200	101×21	300.0	100.0
算例 1 Q_e	100×90	21×61	200.0	700.0
算例 2 Q_s	150×300	51×51	310.0	160.0
算例 2 Q_e	60×120	49×49	650.0	350.0

径向基点配置法控制方程的系数矩阵是满阵，当节点数目增大时，求解的计算量会显著上升。因此根据所求解的具体问题的不同，选取合适的求解域和节点模型可以节省计算量，但是节点数目过少也会相应地带来较大误差，甚至得不到可信解，在分析具体问题时应根据需要在精度和计算时间中选择一个合适的平衡。此外形状参数的选取也会对计算精度造成影响，这些是该算法推广到更复杂的

三维模型时需要着重研究的问题。

5 结论

本文将径向基点配置法应用于求解运动导体涡流电磁系统，提出一种基于运动坐标系的叠加径向基点配置算法来求解描述瞬态涡流磁场的对流扩散麦克斯韦方程和模拟导体的运动。通过实际工程问题算例，验证了算法的有效性。本文提出的叠加径向基点配置型无单元算法可以方便地求解含有运动导体的涡流电磁场问题，未来的工作将致力于将该算法扩展到更复杂的三维模型以及复杂非线性介质电磁问题。

参考文献

- [1] Esposito N, Musolino A, Raugi M. Modelling of three-dimensional nonlinear eddy current problems with conductors in motion by an integral formulation[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 1996, 32(3): 764-767.
- [2] Rodger D, Karaguler T, Leonard P. A formulation for 3D moving conductor eddy current problems[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 1989, 25(5): 4147-4149.
- [3] Davat B, Ren Z, Lajoie-Mazenc M. The movement in field modeling [J]. IEEE Transactions on Magnetics, 1985, 21(6): 2296-2298.
- [4] 张慧娟. 运动电磁系统涡流场有限元研究[D]. 天津: 河北工业大学, 2000.
Zhang Huijuan. The study of the moving conductor eddy current problems by the finite element method [D]. Tianjin: Hebei University of Technology, 2000(in Chinese).
- [5] 张洋. 三维瞬态涡流场-电路-运动-系统耦合问题的研究 [D]. 沈阳: 沈阳工业大学, 2008.
Zhang Yang. Study of 3D transient eddy field-electrol circuit-moving system coupled problem[D]. Shenyang: Shenyang University of Technology, 2008(in Chinese).
- [6] 金志颖, 杨仕友, 倪光正. EMS 型磁悬浮列车电磁系统动态电磁场的有限元分析及其悬浮与牵引力特性的研究[J]. 中国电机工程学报, 2004, 24(10): 133-137.
Jin Zhiying, Yang Shiyu, Ni Guangzheng. A time-stepping FEM for transient electromagnetic field analysis and levitation and propellant force study of an EMS maglev train[J]. Proceedings of the CSEE, 2004, 24(10): 133-137(in Chinese).
- [7] 甘艳, 阮江军, 张宇. 有限元法与有限体积法相结合处理运动电磁问题[J]. 中国电机工程学报, 2006, 26(14): 145-151.
Gan Yan, Ruan Jiangjun, Zhang Yu. Combining the finite

- element method and the finite volume method in motion problem simulation[J]. Proceedings of the CSEE, 2006, 26(14): 145-151(in Chinese).
- [8] Tani K, Yamada T. Dynamic analysis of linear actuator taking into account eddy currents using finite element method and 3-D mesh coupling method[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 35(3): 1785-1788.
- [9] 娄杰, 李庆民, 孙庆森, 等. 快速电磁推力机构的动态特性仿真与优化设计[J]. 中国电机工程学报, 2005, 25(16): 23-29.
- Lou Jie, Li Qingmin, Sun Qingsen, et al. Dynamic characteristic simulation and optimal design of the fast electromagnetic repulsion mechanism[J]. Proceedings of the CSEE, 2005, 25(16): 23-29(in Chinese).
- [10] 张宇, 阮江军, 刘兵, 等. 组合网格法在电磁-机械耦合问题中的应用[J]. 中国电机工程学报, 2007, 27(33): 43-47.
- Zhang Yu, Ruan Jiangjun, Liu Bing, et al. Application of composite grid method in the electromagnetic-mechanical coupled problem[J]. Proceedings of the CSEE, 2007, 27(33): 43-47(in Chinese).
- [11] Kurz S, Fetzer J, Lehner G, et al. A novel formulation for 3-D eddy current problems with moving bodies using a Lagrangian description and BEM-FEM coupling [J]. IEEE Transactions on Magnetics, 1998, 34(5): 3068-3073.
- [12] 张洋, 白保东, 谢德馨. 三维瞬态涡流-电路-运动系统耦合问题的新解法[J]. 中国电机工程学报, 2008, 28(9): 139-144.
- Zhang Yang, Bai Baodong, Xie Dexin. New method to solve 3D transient electromagnetic field-circuit-motion coupling problem [J]. Proceedings of the CSEE, 2008, 28(9): 139-144(in Chinese).
- [13] Peng Ying, Ruan Jiangjun, Zhang Yu, et al. A composite grid method for moving conductor eddy-current problem[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2007, 43(7): 3259-3265.
- [14] 严登俊, 刘瑞芳, 胡敏强, 等. 处理电磁场有限元运动问题的新方法[J]. 中国电机工程学报, 2003, 23(8): 163-167.
- Yan Dengjun, Liu Ruifeng, Hu Minqiang, et al. A new method to deal with the motion problem in electromagnetic field finite element analysis[J]. Proceedings of the CSEE, 2003, 23(8): 163-167(in Chinese).
- [15] Zhang Yong, Shao Keran, Guo Youguang, et al. Multiquadrics collocation method for transient eddy current problems[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2006, 42(10): 3183-3185.
- [16] Zhang Yong, Shao Keran, Guo Youguang, et al. An improved Multiquadric collocation method for 3-D electromagnetic problems[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2007, 43(4): 1509-1512.
- [17] 张淮清, 俞集辉. 电磁场边值问题求解的径向基函数方法[J]. 高电压技术, 2010, 36(2): 531-536.
- Zhang Huaqing, Yu Jihui. Radial basis function method for boundary value problems in electromagnetic field [J]. High Voltage Engineering, 2010, 36(2): 531-536(in Chinese).
- [18] Frank C, Schaback R. Solving partial differential equations by collocation using radial basis functions [J]. Applied Mathematics and Computation, 1998, 93(1): 73-82.
- [19] Zhang Yong, Yang Guangyuan, Shao Keran, et al. Multiscale combined radial basis function collocation method for eddy current analysis in high-speed moving conductors[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2009, 45(10): 3973-3976.
- [20] Karl H, Fetzer J, Kurz S, et al. Description of TEAM workshop problem 28: An electrodynamic levitation device[C]// Proceedings of TEAM Workshop in the 6th Round. Rio de Janeiro, Brazil: International Compumag Society (ICS), 1997: 48-51.
- [21] Leonard P J, Lai H C, Hainsworth G, et al. Analysis of the performance of tubular pulsed coil induction launchers [J]. IEEE Transactions on Magnetics, 29(1): 686-690.



杨光源

收稿日期: 2011-03-28。

作者简介:

杨光源(1986), 男, 博士研究生, 主要研究方向为工程电磁场的数值仿真算法及其应用, kkyanggy@126.com;

雷刚(1979), 男, 博士, 主要研究方向为电磁逆问题的统计推断方法及其试验设计技术, ganglei@gmail.com;

陈孝明(1984), 男, 博士研究生, 主要研究方向为工程电磁场的数值计算及其应用, xiaominghust@gmail.com;

邵可然(1946), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为电磁场数值模拟及其在电磁装置设计、制造中的应用, krshao@hust.edu.cn。

(责任编辑 王剑乔)