

运用多项式方程系统算法求解电力市场均衡

杨彦, 陈皓勇, 张尧, 王野平, 荆朝霞

(华南理工大学电力学院, 广东省广州市 510640)

Computing Equilibrium for Electricity Market Using Solving System of Polynomial Equations Algorithm

YANG Yan, CHEN Haoyong, ZHANG Yao, WANG Yeping, JING Zhaoxia

(School of Electric Power, South China University of Technology, Guangzhou 510640, Guangdong Province, China)

ABSTRACT: It is a key problem to calculate the Nash equilibrium for the deregulated electricity market, and the problem mainly has two difficulties: computation of the mixed strategy Nash equilibrium and determination of whether multiple equilibria exist. Cournot model considering the network constraints is presented firstly, then the solving system of polynomial equations algorithm, which is an algebraic method and belongs to the payoff matrix approach, is applied to calculate the all Nash equilibrium for the finite-strategy multi-player game in the electricity market. The proposed approach mostly relies on decomposing the game by means of the support sets, and for each support set, the condition of the Nash equilibrium can be characterized by a system of polynomial equation and inequalities, and a famous software pack PHCPack is applied to solve the equation system, then the all Nash equilibrium could be found through detecting all the solution. Several examples based on the three-bus test system are used to investigate the effectiveness of the proposed approach, and the results show that the approach is capable of finding all Nash equilibrium under certain condition, which indicate that it has the potential to be used in the study of the real-world electricity markets.

KEY WORDS: electricity market; all Nash equilibrium; Cournot model; network constraint; solving system of polynomial equations algorithm

摘要: 在电力市场不完全竞争模型分析中, 求解市场的纳什均衡是一个重要任务, 其中求解混合策略均衡以及判断是否存在多个均衡都是相当困难的课题。首先建立了考虑网络约束的古诺模型, 然后运用属于收益矩阵方法类型的多项式方

程系统算法求解市场可能存在的所有均衡。多项式方程系统算法引用支集的特征, 将纳什均衡条件转化为多项式方程系统及其不等式约束, 并运用软件包PHCPack求解该方程系统, 而后通过甄别满足不等式条件的解来求取所有均衡。针对3节点测试系统, 构建不同的实验场景来考察所提出算法的有效性, 实验结果表明, 在一定条件下, 多项式方程系统算法能够求解到所有均衡, 这表明该方法在实际电力市场分析中有较大潜力。

关键词: 电力市场; 所有纳什均衡; 古诺模型; 网络约束; 多项式方程系统算法

0 引言

随着电力工业市场化改革的逐步推进, 关于电力市场的研究得到了广泛的关注, 其中深入分析市场运行结果成为关键课题, 它不仅可以帮助市场监管者监测市场竞争是否充分, 也能帮助市场参与者分析获取最大收益策略。纳什均衡正是分析市场运行结果的重要工具^[1], 均衡存在形式以及是否存在多个均衡是容易被提及的问题^[2]。

理想的古典古诺模型与供给函数模型的均衡分析已经得到了深入研究^[3-6], 它们对电力市场进行了很多简化(如没有考虑输电网络等), 无法满足分析实际电力市场的需求, 因此考虑网络约束的电力市场的均衡分析成为必要。Hobbs 将考虑网络约束的均衡条件建模为线性互补约束问题^[7-8], 但这种方法只满足纯策略纳什均衡的局部优化条件。Overbye 在文献[9]中认为均衡点满足1阶微分条件, 并且运用基于牛顿法寻优的参与者利润最大化算法(individual welfare maximization, IWM)迭代求解纯策略均衡; 文献[10]考虑到线路输电约束造成参与者收益函数非凹非连续, 根据约束条件将参与者决策空间分为保证收益函数连续且凹的若干区域, 对各可行区域

基金项目: 国家重点基础研究发展计划项目(973 计划) (2004CB217905); 教育部新世纪优秀人才支持计划(NCET080207)。

Project Supported by Special Fund of the National Priority Basic Research of China (2004CB217905); Project Supported by Program for New Century Excellent Talents in University (NCET080207)。

分别运用 IWM 算法寻求市场纯策略均衡, 且提出 IWM 扩展算法, 应用连续逼近过程来求解混合策略均衡, 这种方法在理论上还没得到证明, 且未见其用于求解多人博弈; Wang 用非线性互补算法将市场均衡条件转化为一组非线性代数方程来求解^[11-12]; 文献[2,13-14]运用穷尽搜索方法描绘参与者的最优反应函数以探讨市场均衡; 而文献[15-16]指出, 由于输电约束导致参与者决策空间形成不同区域, 通过搜索各区域内可能的最优反应曲线交点来寻找均衡, 显然基于最优反应函数的方法仅对寻求纯策略均衡有效; 文献[4-5,17-18]运用协同进化法模拟求解市场均衡, 该方法对收益函数的连续性和凹性没有要求, 但也只对求解纯策略均衡有效; 文献[19]将在策略空间中计算纳什均衡转化为在输电状态空间中求解, 提出一种基于单纯剖分算法的迭代算法以求解混合均衡, 该方法还未在理论上得到严格的证明; 收益矩阵方法是求解市场均衡的重要途径^[20], 它首先构建参与者的收益矩阵, 然后运用求解有限策略式博弈均衡的代数方法来考察市场均衡; Baldick 在文献[21]中运用求解双矩阵博弈的著名 Lemke-Howson 算法研究了双寡头市场特性, 并通过一系列启发式处理方式将该算法扩展到求取 3 位参与者时的情形^[22]。

本文首先建立了考虑网络约束的古诺模型, 采用属于收益矩阵方法类型的多项式方程系统算法求解市场可能存在的所有均衡, 最后通过算例阐述了算法的计算流程并探讨了其有效性。

1 市场模型及博弈分析基础

1.1 考虑网络约束的古诺模型

古诺模型是产量竞争模型, 发电商(generator company, GenCo)选择出力作为竞价策略, 需求方根据电价来确定负荷。假设网络拓扑中有 N 个节点, 每个节点均有需求方与发电商, 处于节点 i 的需求方的逆需求函数为

$$p_i(P_{Di}) = -\alpha_i P_{Di} + \beta_i \quad (1)$$

式中: p_i 与 P_{Di} 为节点 i 处的电价与负荷; α_i 和 β_i 为系数, 且满足 $\alpha_i \geq 0$, $\beta_i \geq 0$, 相应的效益函数为

$$B_i(P_{Di}) = \int p_i(P_{Di}) dP_{Di} = -0.5\alpha_i P_{Di}^2 + \beta_i P_{Di} \quad (2)$$

节点 i 处发电商的成本函数为

$$C_i(P_{Gi}) = \frac{1}{2} a_i P_{Gi}^2 + b_i P_{Gi} + c_i \quad (3)$$

式中: P_{Gi} 为发电商的出力, MW; a_i , b_i 与 c_i 为成

本系数。假设其策略集为 $S^i(\{S_1^i, \dots, S_{J_i}^i, \dots, S_{J_i}^i\})$, 其中, J_i 为发电商 i 策略集中的策略个数, 各策略 $S_{J_i}^i$ 即为该发电商的申报竞价出力 P_{Gi}^i 。

市场独立调度(independent system operator, ISO)接收到各发电商竞价策略集合 S^b 后, 需经市场出清确定节点电价 λ 及各个需求方的负荷 P_{Di} , 该优化问题采用直流最优潮流模型, 其目标函数是需求方的效益最大化:

$$\max \Gamma_{\text{ISO}} = \sum_{i=1}^N B_i = \sum_{i=1}^N (-0.5\alpha_i P_{Di}^2 + \beta_i P_{Di}) \quad (4)$$

$$\mathbf{B}'\boldsymbol{\theta} = \mathbf{q} : \lambda \quad (5)$$

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\theta} \leq F_{\max} \quad (6)$$

式中: λ 为等式约束(5)的拉格朗日乘子向量, 即为相应的节点电价向量; $\boldsymbol{\theta}$ 为节点电压相角向量; \mathbf{B}' 为节点导纳矩阵; \mathbf{q} 为节点注入功率向量; 各节点的 $q_i = P_{Gi}^i - P_{Di}$; \mathbf{H} 为支路导纳矩阵; F_{\max} 为线路输电容量上限。式(5)为节点电力平衡约束, 式(6)为线路潮流约束。

发电商 i 的收益与竞价策略集合 S^b 的组合密切相关, 假设 $S^b = \{S_{J_1}^1, \dots, S_{J_i}^i, \dots, S_{J_N}^N\}$ 时, 独立调度确定节点 i 的电价为 λ_i , 此时发电商 i 的收益记为

$$w_{j_1 \dots j_i \dots j_N}^i = \lambda_i S_{j_i}^i - C_i(S_{j_i}^i) \quad (7)$$

不同的竞价策略组合 S^b 产生不同的市场出清结果, 可见发电商 i 的收益矩阵 \mathbf{U}^i 为 $J_1 \times \dots \times J_i \times \dots \times J_N$ 维矩阵, 矩阵元素 $u_{j_1 \dots j_i \dots j_N}^i$ 的值设为收益 $w_{j_1 \dots j_i \dots j_N}^i$ 。

1.2 博弈分析基础

上述市场模型中, 各发电商 $i(i \in \mathbf{N})$ 均拥有策略集 S^i 、收益矩阵 \mathbf{U}^i , 追求自身收益最大化, 构成非合作策略式博弈 $\Gamma = \langle \mathbf{N}, \{S^i\}_{i \in \mathbf{N}}, \{\mathbf{U}^i\}_{i \in \mathbf{N}} \rangle$ 。

混合策略是博弈论中一个重要概念, 指参与者决策在纯策略选择上的概率分布, 例如混合策略 σ^i 是对 S^i 各策略的某一种概率分布, 记 $\sigma_{j_i}^i$ 是 σ^i 赋予 $S_{j_i}^i$ 的分布概率, 需要满足约束条件:

$$\sum_{j_i=1}^{J_i} \sigma_{j_i}^i = 1, \quad \sigma_{j_i}^i \geq 0 \quad (8)$$

记 σ^{-i} 为除 i 外参与者的某一混合策略, S^{-i} 为 σ^{-i} 对应的所有可能纯策略组合, 它的某一元素 s^{-i} 可记为 $\{S_{j_1}^1, \dots, S_{j_{i-1}}^{i-1}, S_{j_{i+1}}^{i+1}, \dots, S_{j_N}^N\}$, 那么策略 $S_{j_i}^i$ 在 σ^{-i} 情形下的收益可表示为

$$w^i(S_{j_i}^i, \sigma^{-i}) = \sum_{s^{-i} \in S^{-i}} w^i(S_{j_i}^i, s^{-i}) \sigma_{j_1}^1 \dots \sigma_{j_{i-1}}^{i-1} \sigma_{j_{i+1}}^{i+1} \dots \sigma_{j_N}^N \quad (9)$$

则 σ^i 在 σ^{-i} 情形下的收益为

$$w^i(\sigma^i, \sigma^{-i}) = \sum_{j_i=0}^{J_i} \sigma_{j_i}^1 w^i(S_{j_i}^i, \sigma^{-i}) \quad (10)$$

纳什均衡 σ_* 为一组混合策略组合及其相应的概率分布, 使得任何参与者没有独立改变当前状态的动机, 即 σ_* 对任一参与者 i 均有

$$w^i(\sigma_*^i, \sigma_*^{-i}) \geq w^i(\sigma^i, \sigma_*^{-i}) \quad (11)$$

内什指出任何有限策略式博弈均存在纳什均衡, 当然这既可能是混合策略均衡, 也可能是退化的纯策略均衡, 本文中运用多项式方程系统算法来求解市场中所有的均衡点。

2 多项式方程系统算法

2.1 多项式方程系统算法整体框架

求解有限策略式博弈的纳什均衡是个数学难题, 求解难度与参与者数目等因素有着密切的联系。求解双矩阵博弈的均衡相对简单: 文献[23]指出其均衡条件构成线性互补问题, 提出的基于路径追踪方法的 Lemke-Howson 算法能够求解到一个均衡; 文献[24]提出了基于同伦思想的算法扩展求解 2 人博弈的所有均衡。多人博弈的均衡条件不再能够构成线性方程, 求解难度随之增大许多: 单纯剖分算法将纳什均衡转化为特定构建的连续函数 Brouwer 不动点, 且运用 Scarf 算法求解该不动点来求取均衡点, 具有全局收敛能力, 能保证求解到一个均衡^[25]; 文献[26]将均衡条件建模为非线性互补问题, 并用牛顿法近似成线性互补问题, 而后序列逼近求解均衡; 李亚普诺夫函数法巧妙地将纳什均衡转化为某特定连续可微函数的最小值, 具有求解多个均衡的能力, 但不能保证求取到所有均衡^[27]; 文献[25]指出均衡条件具有半代数特性, 探讨了运用多项式方程系统算法求解多人博弈所有均衡的可能性; 文献[28]理论上证明了该算法求解所有均衡的可行性。

多项式方程系统算法是基于假设检验的思路求解均衡: 首先构建满足纳什均衡结构的所有策略组合; 而后依次假设每个策略组合是纳什均衡, 将均衡条件依托组合内包含的策略, 构建关于其各策略的分布概率的多项式方程系统以及关于组合外策略的不等式方程约束; 最后求解多项式方程系统的所有孤立解, 检验其中是否存在满足不等式约束的解, 若满足则说明假设的策略组合及其相应的分布概率为一完整的纳什均衡, 反之假设不成立。可见多项式方程系统算法采用枚举的方法考察所有可能的策略组合, 并考察各组合下对应的多项式方

程系统的所有孤立解, 这就保证了其能够求解所有可能存在的纳什均衡; 但也正由于该算法具有双重枚举的性质, 导致该算法具有强指数型计算复杂度。

以下分别探讨分析多项式方程系统算法的几个关键步骤与处理方法。

2.2 构建所有可能的策略组合

博弈中每个参与者都是理性的, 在决策中不会选择被占优策略, 所以在求解纳什均衡过程中, 删除被占优策略不会给计算结果造成影响, 所以这里首先删除被占优策略, 而后再考虑剩下的策略。纳什均衡是一组混合策略组合, 混合策略是对参与者的纯策略的概率分布, 故将被赋予正概率的纯策略集合定义为支集 $\beta(\{\beta^1, \dots, \beta^i, \dots, \beta^N\})$, 其中 β^i 是 S^i 中被赋予正概率策略所构成的子集。对于任一参与者 i 来说, 它的任一策略均有在支集内与在支集外 2 种可能, 只有所有策略都在支集外的这种情况是不可行的, 故 β^i 的所有可行组合个数至多为 $(2^i - 1)$, 那么支集 β 所有可行组合个数 L 至多为

$$L = \prod_{i=1}^N (2^i - 1) \quad (12)$$

因为支集外策略的分布概率皆为 0, 这意味着它们对参与者在均衡处的收益没有影响, 表明支集及其对应的分布概率是构成均衡的重要因素。此处笔者根据均衡条件, 依次检验每个可能的支集是否可以构成纳什均衡。

2.3 构造多项式方程系统

假设支集 $\beta(\beta^1, \dots, \beta^i, \dots, \beta^N)$ 可以构成博弈 Γ 的纳什均衡 φ , 记 β^i 为 $(\beta_{d_1}^i, \dots, \beta_{d_i}^i)$, 其元素个数 D_i 应不大于 J_i 且不小于 1, 其对应的概率记为 $\rho^i(\rho_{d_1}^i, \dots, \rho_{d_i}^i)$, 需满足

$$\sum_{d_i=1}^{D_i} \rho_{d_i}^i = 1, \rho_{d_i}^i > 0 \quad (13)$$

不在支集内的纯策略 $S_{j_k}^k$ 的分布概率 $\varphi_{j_k}^k = 0$, 那么可知式(9)中包含 $\varphi_{j_k}^k$ 的乘项值均为 0, 即策略 $S_{j_i}^i$ 在该均衡下的收益只与支集内的纯策略相关:

$$w^i(S_{j_i}^i, \varphi^{-i}) = \sum_{s_{\beta^{-i}} \in \beta^{-i}} w^i(S_{j_i}^i, s_{\beta^{-i}}) \rho_{d_1}^1 \cdots \rho_{d_{i-1}}^{i-1} \rho_{d_{i+1}}^{i+1} \cdots \rho_{d_N}^N \quad (14)$$

式中 β^{-i} 为支集中除 i 外所有的纯策略组合, $s_{\beta^{-i}}$ 为其中某一特定组合。

考察支集中策略的收益情况, 为不失一般性, 在 β^i 中, 将 $\beta_{d_1}^i$ 的收益 $w^i(\beta_{d_1}^i, \varphi^{-i})$ 设定为基准, 记 $\beta_{d_k}^i$ 为不同于 $\beta_{d_1}^i$ 的任一策略, 若 $w^i(\beta_{d_1}^i, \varphi^{-i}) > w^i(\beta_{d_k}^i, \varphi^{-i})$,

那么 $\beta_{k_i}^i$ 将因被占优而被剔除出 β^i ；反之， β^i 将被剔除。因此当且仅当满足条件(15)才能形成稳定的支集以构建纳什均衡。式(15)~(16)共有 $C = \sum_{D_i=D_1}^{D_N} D_i$ 个等式方程，需求解的参数个数即未知概率 ρ 个数亦为 $C = \sum_{D_i=D_1}^{D_N} D_i$ ，它们构成一个完备的多项式方程系统。附录 A 以一个简单情形为例，说明了多项式方程系统的构建过程。

$$w^j(\beta_{k_i}^i, \varphi^{-i}) - w^j(\beta_1^i, \varphi^{-i}) = 0 \quad (15)$$

$$\rho_i^j + \sum_{k_i=2}^{D_i} \rho_{k_i}^j = 1 \quad (16)$$

式中： $i=1, \dots, N$ ； $k_i=2, \dots, D_i$ 。

同理可知，支集外的任一策略 $S_{j_i}^i$ 在 φ^{-i} 下的收益应小于 β_1^i 的收益，否则 $S_{j_i}^i$ 将可能被赋予正的分布概率而进入支集，因此支集外的策略需要满足条件：

$$\begin{cases} w^j(S_{j_i}^i, \varphi^{-i}) - w^j(\beta_1^i, \varphi^{-i}) < 0 \\ \varphi_{j_i}^i = 0 \end{cases} \quad (17)$$

式中： $i=1, \dots, N$ ； $S_{j_i}^i \notin \beta^i$ 。

综上所述，通过假设支集可以构成纳什均衡，将均衡条件转化为关于支集内策略的分布概率的等式方程系统(15)、(16)以及关于支集外策略的不等式约束(17)，形成典型的半代数系统，一般来说可以通过检验的方法来求解，即首先求取方程系统(15)、(16)的所有孤立解，随后检验判断所有孤立解中是否存在满足式(17)、式(13)中不等式约束的解，若存在，则表明该解与假设的支集构成一个完整的纳什均衡，若不存在，说明假设该支集可构成均衡的命题不成立。因此求解如式(15)、(16)所示的多项式方程系统的全部孤立解是多项式方程系统算法求取所有均衡的关键。

2.4 求取多项式方程系统的所有孤立解

数值求解式(15)、(16)所示的多项式方程系统是个经典的课题，考虑其全部解却是新兴的研究领域，目前主要方法有基于消元理论的 Grobner 基方法以及基于路径追踪的同伦连续算法。同伦连续算法在计算稳定性与并行能力方面的优势日趋明显，故本文讨论并运用该算法求解^[29]。

将式(15)、(16)记为目标系统 $P(P_1(\rho), \dots, P_C(\rho))=0$ ，由 C 个等式方程构成。若知目标系统所有孤立解个数 M ，则可通过构建同伦系统求解其全部解。首先构造某个容易求解且全部孤立解数为

M 的初始系统 $Q(Q_1(\rho), \dots, Q_C(\rho))=0$ ，根据参数 t 构造从初始系统到目标系统的同伦系统：

$$H(\rho, t) = a(1-t)^k Q(\rho) + t^k P(\rho), \quad t \in [0, 1] \quad (18)$$

式中 a 与 k 为常数。若 H 是正则的，则目标系统 $P(P_1(\rho), \dots, P_C(\rho))=0$ 的每个孤立解均为同伦系统相应解曲线的终点，即 $t=1$ ^[30]，将同伦系统对 t 求导：

$$H_\rho d\rho/dt + H_t = 0 \quad (19)$$

即解曲线 $\rho(t)$ 由以下常微分方程组决定：

$$\begin{cases} d\rho/dt = -H_\rho^{-1} H_t \\ \rho(0) = \rho^0 \end{cases} \quad (20)$$

式中 ρ^0 为初始系统 $Q(Q_1(\rho), \dots, Q_C(\rho))=0$ 的解，数值算法逼近 $\rho(t)$ 不成问题，这就保证了可以求解出目标系统的所有孤立解。

对于确定目标系统孤立解的个数 M ，经典的 Bézout 定理指出其 M 值不超过其全次数：

$$T_D = \prod_{j=1}^C R_j \quad (21)$$

式中 R_j 为系统第 j 个方程的次数。系统(15)中各方程的次数均为 $(N-1)$ ，式(16)中各方程的次数为 1，故目标系统的全次数为

$$T_D(P) = (N-1) \sum_{D_i=D_1}^{D_N} (D_i-1) \quad (22)$$

可见需跟踪的解曲线个数具有指数复杂度。

有多种方法可以构建初始系统，一个经典的随机线性系统 $Q(\rho)=0$ 可设计为

$$\begin{cases} Q_1(\rho) = x_1 \rho_1^{R_1} - y_1 = 0 \\ Q_2(\rho) = x_2 \rho_2^{R_2} - y_2 = 0 \\ \vdots \\ Q_C(\rho) = x_C \rho_C^{R_C} - y_C = 0 \end{cases} \quad (23)$$

式中 x_i, y_i 为随机生成的参数。

软件包 PHCpack^[31]是目前求解该问题的有效工具，它不仅实现了上述的经典同伦方法，而且一直跟随代数几何理论的发展，对孤立解个数 M 的数值有更精确的估计，主要包含多齐次同伦算法与混合体积法：多齐次同伦算法充分利用方程组的最佳齐次结构，可减少跟踪曲线个数；混合体积法利用组合几何理论给出目前最为精确的 M 上限估计。这 2 种算法均相当复杂^[32]。本文运用软件包 PHCpack 的缺省配置来求解目标系统(15)、(16)，它计算了目标系统的全次数，也用多齐次同伦算法及混合体积法确定了 M 值，且以随机线性方程组作为初始系统。

3 算例及分析

3.1 网络拓扑及参数设置

本节以文献[22]中的测试系统为例阐述多项式

方程系统算法的有效性。系统网络拓扑如图1所示，系统参数列于表1，传输线假设为无损且有相等阻抗，节点1、3间的线路具有最大传输容量 L_{max} 。

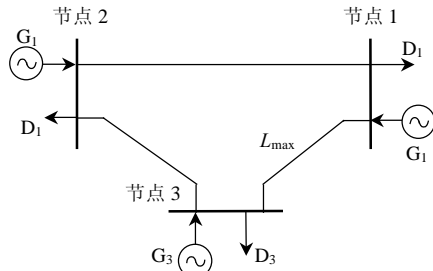


图1 测试系统拓扑图
Fig.1 Sample system

表1 需求方与发电商的参数
Tab.1 Data of demand and GenCo

节点	需求方		发电商		
	$\alpha_i/$ \$(\text{\\$}\cdot\text{MW})^{-2}\cdot\text{h}^{-1}\$	$\beta_i/$ \$(\text{\\$}/\text{MW}\cdot\text{h})\$	$a_i/$ \$(\text{\\$}\cdot\text{MW})^{-2}\cdot\text{h}^{-1}\$	$b_i/$ \$(\text{\\$}/\text{MW}\cdot\text{h})\$	$c_i/$ \$(\text{\\$}/\text{h})\$
1	108.409 6	0.055 500	0.015 718	1.360 575	9 490.366
2	103.823 8	0.066 909	0.021 052	-2.078 070	11 128.950
3	105.670 9	0.063 703	0.012 956	8.105 354	6 821.482

文献[22]首先设置各发电商的竞价容量区间，并对其进行一定网格间距的均匀离散化，以构建策略集；运用基于 Lemke-Howson 算法的扩展方法求解此时3人博弈的纳什均衡；根据均衡中的策略分布，逐步改变区间与策略个数来求解适当间距的纳什均衡。

为了说明多项式方程系统算法的求解过程，并与文献[22]提出的方法做比较，本文根据设置不同的 L_{max} 值来构建不同的实验情形，其中构造策略集时参照了文献[22]的方法，将策略区间设置为 [600,1500]MW，根据网格间距设置的不同情况分别讨论。

3.2 网格间距为900 MW 的情形

在这种情况下设置输电约束为 $L_{max}=40$ MW 来探讨市场均衡，且标记为情形A。此时发电商 i 只有2个策略 (S_i^1 和 S_i^2)。首先建立收益矩阵，以发电商1为例，其收益矩阵 U^1 为

$$U^1(S^1, (S^2, S^3)) = \begin{matrix} & (S_1^2, S_1^3) & (S_2^2, S_2^3) & (S_2^2, S_1^3) & (S_2^2, S_2^3) \\ \begin{matrix} (S_1^2, S_1^3) \\ (S_2^2, S_2^3) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 28\ 584 & 33\ 519 & 18\ 216 & 23\ 150 \\ 21\ 104 & 23\ 245 & -4\ 754 & -2\ 677 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

式中元素 $u_{j_1 j_2 j_3}^1$ 为 $U^1(S_{j_1}^1, (S_{j_2}^2, S_{j_3}^3))$ ，其值设置为 $w_{j_1 j_2 j_3}^1$ ，例如矩阵 U^1 中元素 28 584 就是指发电商1在竞价策略组合 $\{S_1^1, S_1^2, S_1^3\}$ 下的收益。

然后删除被占优策略，构建所有可能的策略组合：从 U^1 可知，不管 $\{S^2, S^3\}$ 做何种选择，发电商

1 选择 S_1^1 的收益都比选择 S_2^1 的大，所以策略 S_2^1 因被占优而删除；同理，策略 S_2^2 因被占优而删除； S^2 中没有被占优策略。此时策略集中剩下的策略为 S_1^1 、 S_1^2 与 S_2^2 、 S_3^3 ，根据式(12)可知，可能的组合有3个，分别为 $S_1(\{S_1^1, S_1^2, S_1^3\})$ 、 $S_2(\{S_1^1, S_2^2, S_1^3\})$ 和 $S_3(\{S_1^1, \{S_1^2, S_2^2\}, S_1^3\})$ 。由于存在 $U^2(S_1^1, S_2^2, S_1^3)$ 大于 $U^2(S_1^1, S_1^2, S_1^3)$ ，对于 S_1 而言，支集外策略的收益大于支集内的，故不符合均衡假设；对于 S_3 而言，支集内策略的收益不等，也不符合均衡假设；对于 S_2 来说，它满足所有的约束条件，故该情形有纯策略均衡 $\{S_1^1, S_2^2, S_1^3\}$ ，即 $\{600, 1\ 500, 600\}$ MW。

3.3 网格间距为100 MW 的情形

3.3.1 不考虑输电约束的情形

不考虑输电约束时，市场模型退化为常规的古诺模型，各发电商的收益函数具有凹函数性质，众多策略因被占优而剔除，运用多项式方程系统算法快速地求解出市场唯一存在的纯策略均衡 $\sigma_B(\{S_6^1, S_5^2, S_5^3\})$ ，这与文献[22]中所求得的一个均衡是吻合的。

3.3.2 设置输电约束 $L_{max}=40$ MW 的情形

文献[22]将该实验情形作为案例来分析市场考虑网络约束后的纳什均衡。剔除被占优策略后，将发电商的收益矩阵有效维数降为 $5 \times 5 \times 5$ ，所有可能的策略组合数 L 为 $\prod_{i=1}^3 (2^5 - 1)$ 。

经过遍历所有可能的策略组合，利用多项式方程系统算法求解得此时市场有的一个混合策略均衡 $\sigma_C(\{\{S_3^1, S_4^1, S_6^1\}, \{S_6^2\}, \{S_2^3, S_3^3, S_4^3\}\})$ ，对应的概率分布为 $\sigma_C^1 = \{0.115, 0.274, 0.611\}$ 与 $\sigma_C^3 = \{0.119, 0.178, 0.703\}$ ，而 σ_C^2 选择了纯策略。通过比较，所求均衡与文献[22]的结果相一致。多项式方程系统算法求取均衡的整个过程在 Pentium(R) 3.00 GHz、1.00 G 内存的 PC 机上耗时 57 min 38 s。

3.3.3 设置输电约束 $L_{max}=30$ MW 的情形

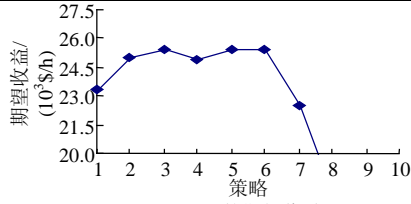
继续降低 L_{max} 值来考察市场均衡的状态。被占优策略剔除后，收益矩阵的有效维数降为 $5 \times 4 \times 5$ 。运用多项式方程系统算法求解后可知，该情形下市场存在3个均衡，各均衡状态如表2所示。为了更细致地考察均衡，将对手的策略选择固定在均衡状态下，计算并描绘各发电商的各策略相应的期望收益，分别如图2~4所示。

如图2所示，发电商1的策略 S_3^1 与 S_5^1 具有相等的最大收益 25 454 $\text{\$/h}$ ，均系 σ_{D1}^{-1} 的最优反应；策

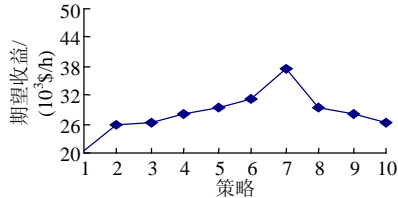
表 2 $L_{\max}=30$ MW 时所有纳什均衡的状况

Tab. 2 Situation of all Nash equilibrium when $L_{\max}=30$ MW

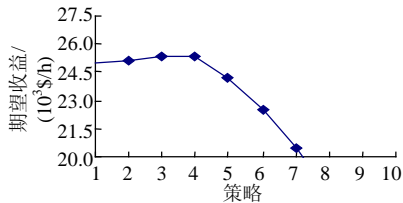
发电商	纳什均衡 σ_{D1}		纳什均衡 σ_{D2}		纳什均衡 σ_{D3}	
	支集	概率	支集	概率	支集	概率
发电商 1	$\{S_3^1, S_5^1\}$	{0.190, 0.810}	$\{S_3^1, S_5^1, S_6^1\}$	{0.198, 0.322, 0.480}	$\{S_3^1, S_5^1, S_6^1\}$	{0.201, 0.748, 0.051}
发电商 2	$\{S_7^2\}$	{1.000}	$\{S_6^2\}$	{1.000}	$\{S_6^2, S_7^2\}$	{0.153, 0.847}
发电商 3	$\{S_3^3, S_4^3\}$	{0.842, 0.158}	$\{S_2^3, S_3^3, S_4^3\}$	{0.054, 0.561, 0.385}	$\{S_3^3, S_4^3\}$	{0.813, 0.187}



(a) 1 的期望收益



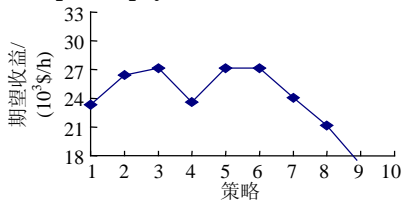
(b) 2 的期望收益



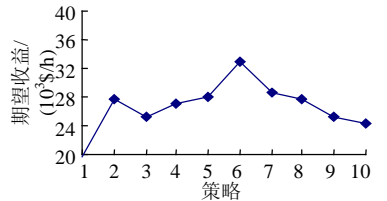
(c) 3 的期望收益

图 2 均衡 σ_{D1} 下各发电商的期望收益

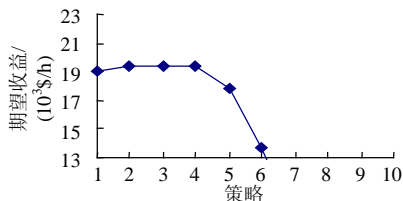
Fig. 2 Expected payoffs of each GenCo under σ_{D1}



(a) 1 的期望收益



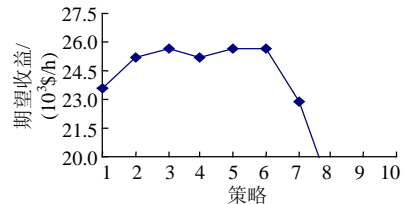
(b) 2 的期望收益



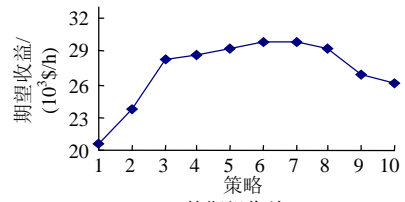
(c) 3 的期望收益

图 3 均衡 σ_{D2} 下各发电商的期望收益

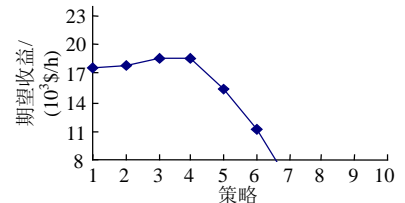
Fig. 3 Expected payoffs of each GenCo under σ_{D2}



(a) 1 的期望收益



(b) 2 的期望收益



(c) 3 的期望收益

图 4 均衡 σ_{D3} 下各发电商的期望收益

Fig. 4 Expected payoffs of each GenCo under σ_{D3}

略 S_7^2 对应的最大期望收益为 37 618 \$/h; 发电商 3 的 S_3^3 与 S_4^3 都具有最大收益 18 303 \$/h, 是 σ_{D1}^{-3} 的最优反应。可见组合 σ_{D1} 满足所有的纳什均衡条件。

图 3 中: 发电商 1 选择 S_3^1 、 S_5^1 与 S_6^1 均具有相同的最大收益 27 136 \$/h; S_6^2 对应的最高期望收益为 33 004 \$/h; 发电商 3 的策略 S_2^3 、 S_3^3 与 S_4^3 具有最高收益 19 410 \$/h。可见 σ_{D2} 中支集 i 中各策略都是 σ_{D2}^{-i} 的最优反应, 这也从侧面验证了 σ_{D2} 是市场的纳什均衡。

从图 4 可知: 支集 $\{S_3^1, S_5^1, S_6^1\}$ 是 σ_{D3}^{-1} 的最优反应, 各策略对应相同的收益 25 711 \$/h; 发电商 2 的 S_6^2 与 S_7^2 具有相同的最高收益 29 924 \$/h; 发电商 3 的 S_3^3 与 S_4^3 具有的最高收益为 18 502 \$/h。可见 σ_{D3} 也为市场的纳什均衡。

综上所述, 多项式方程系统算法成功地求取了此市场状况下的所有 3 个各不相同的纳什均衡, 共耗时 9 min 8 s。

3.3.4 输电约束对均衡形态的关系

由 3.3.1~3.3.3 节的情形可知, 均衡的构成形态与输电约束 L_{\max} 有着密切的联系。为考察输电约束对均衡的影响, 本文计算不同输电约束下的市场纳什均衡的形态(类型及数目), 如图 5 所示。

当 $L_{\max} \geq 100$ MW 时, 市场仅存在唯一的纯策略均衡, 皆同于市场在无网络约束下的均衡点 σ_B ;

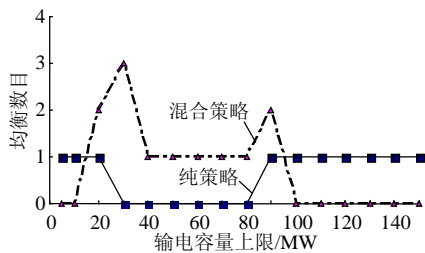


图5 市场均衡形态的变化

Fig. 5 Evolution of configuration of the equilibrium

当 $L_{\max} = 90$ MW 时, 市场存在 σ_B 与 2 个混合策略均衡; 输电容量上限在 $[30, 80]$ MW 间时, 市场只存在混合均衡; $L_{\max} \leq 20$ MW 时, 市场有不相同的纯策略均衡, 其中在 20 MW 处还存在混合均衡。总之, 随着 L_{\max} 的减小, 市场均衡的状态由纯策略均衡变化到混合均衡, 再至纯策略均衡, 其中在 2 种状态交接处均同时存在 2 种均衡类型。

3.4 网格间距更小的情形

3.4.1 不考虑输电约束的情形

对于 3.3.1 节的情形仅将其网格间距改变为 50 MW, 剔除被占优策略, 将收益矩阵的有效维数从 $19 \times 19 \times 19$ 降为 $3 \times 3 \times 3$, 求得其唯一的纯策略均衡 $(\{1\ 100, 1\ 050, 1\ 000\}$ MW); 进一步将发电商 1 的决策空间设置为 $[1\ 050, 1\ 150]$ MW, 将发电商 2, 3 的决策空间分别设置为 $[1\ 000, 1\ 100]$, $[950, 1\ 050]$ MW, 而网格间距为 10 MW, 可将有效维数降为 $2 \times 2 \times 2$, 根据求解出的市场均衡可进一步缩小决策空间; 将发电商 1, 2, 3 的市场均衡分别设置为 $\{1\ 100, 1\ 110\}$, $\{1\ 040, 1\ 050\}$, $\{990, 1\ 000\}$ MW, 网格间距为 1 MW, 经求解可知, 市场存在唯一的纯策略均衡 $\{1\ 106, 1\ 045, 995\}$ MW。这里逐步设置的决策空间范围虽与文献[22]不尽相同, 但所求取的网格间距为 1 MW 时的均衡是一致的。

3.4.2 输电约束 $L_{\max}=40$ MW 的情形

将网格间距设置为 50 MW, 剔除被占优策略后, 收益矩阵的有效维数从 $19 \times 19 \times 19$ 降为 $11 \times 10 \times 9$, 这依然是个庞大数目, 具有相当高的计算复杂度, 原因有二: 根据式(12)可知, 需要遍历的支集个数高达 1.07×10^9 ; 求解多项式方程系统时, 据式(22)可知, 系统全次数高达 1.34×10^8 。虽用多齐次同伦算法可减少需追踪的解路径, 但改变不了其指数复杂度, 所以从目前来看, 求解 2 个这样的叠加问题相当困难。本文耗时 1 805 min 20 s 计算了前 20 000 个支集, 尚未找到纳什均衡。

3.4.3 输电约束 $L_{\max}=30$ MW 的情形

将 L_{\max} 设置为 30 MW 时, 经剔除被占优策略

后, 收益矩阵的有效维数降至 $12 \times 10 \times 10$, 求解依旧相当困难。

3.5 实验分析

经典的基于线性互补的 Lemke-Howson 算法只能求解双人博弈单个均衡, 而文献[22]是将该算法扩展到 3 人博弈, 故也仅能求解单个均衡。多项式方程系统算法充分利用了支集的概念与特征, 可从理论上严格证明其能够求解有限策略式博弈的所有均衡。

在没有输电容量约束的 3.4.1 节的情形下, 多项式方程系统算法成功地求解了给定网格间距的所有纯策略均衡。对于 3.4.2 节的情形, 文献[22]利用发电商 2 在该状态下选择纯策略的现象, 将 3 人博弈转化为双人博弈, 从而将复杂的非线性方程系统转化为线性方程系统来求解, 这是文献[22]可以继续求解网格间距更细密的市场均衡的原因, 但是这种思路难以推广到一般情形, 例如市场存在类似 σ_{D3} 的混合策略均衡, 即无参与者选择纯策略, 或者多于 3 位参与者的多人博弈。而多项式方程系统算法虽然具有指数型计算复杂度, 但具有严格的数学证明, 适用于一般情形。

如 3.3 节所示, 在网格间距适当的情况下, 多项式方程系统算法成功地求解了各市场状态下的所有均衡, 进而发现输电容量约束不仅仅根据产生网络阻塞与否来影响市场均衡, 而且阻塞的松紧程度决定着均衡变化趋势; 网络约束不仅决定着市场均衡是纯策略均衡还是混合均衡, 同时也影响着均衡总数目。

4 结论

在考虑网络约束电力市场的均衡分析中, 求解混合策略均衡以及判断是否存在多个均衡均是相当重要的课题, 本文提出多项式方程系统算法来探讨此问题。通过引用支集的概念, 本文所提的算法将纳什均衡条件转化成一组多项式方程系统来求解; 分别对算法的 2 个主要环节(遍历所有可能的支集以及同伦连续算法求解多项式方程组)进行了分析, 本文对该算法的计算复杂度进行了探讨。

为考察多项式方程系统算法的计算能力, 本文构建了不同的实验场景, 结果表明算法的复杂度不仅与网格间距相关, 也受输电约束松紧程度的影响: 没有输电约束时, 因为发电商的收益函数为严格凹函数, 需遍历的支集数目相对较小, 所以该算法可以求解不同细密网格间距下的均衡; 在适当细

密的网格间距下, 该算法能够求解出市场在不同输电约束下的所有均衡, 由于电力系统有自身特殊的技术要求与限制, 发电商的决策变量不可能如理想假设那样连续且无限可分, 对其进行适当网格间距的高离散化, 是可行的并且是必要的, 可见多项式方程系统算法在实际电力市场的均衡分析中有相当重要的作用。

参考文献

- [1] David A K, Wen F S. Market power in electricity supply[J]. IEEE Transactions on Energy Conversion, 2001, 16(4): 352-360.
- [2] Cunningham L, Baldick R, Baughman M. An empirical study of applied game theory: transmission constrained cournot behavior [J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2002, 17(1): 166-172.
- [3] Klemperer P D, Meyer M A. Supply function equilibria in oligopoly under uncertainty[J]. Econometrica, 1989, 57(6): 1243-1277.
- [4] Green R J, Newbery D M. Competition in the British electricity spot market[J]. The Journal of Political Economy, 1992, 100(5): 929-953.
- [5] Chen H, Wong K P, Nguyen H M. Analyzing oligopolistic electricity market using coevolutionary computation[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2006, 21(1): 143-152.
- [6] Chen H, Wong K P, Chung C Y. A coevolutionary approach to analyzing supply function equilibrium model[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2006, 21(3): 1019-1028.
- [7] Hobbs B F, Metzler C B, Pang J S. Strategic gaming analysis for electric power systems: an MPEC approach[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2000, 15(2): 638-645.
- [8] Hobbs B F. Linear complementarity models of Nash-Cournot competition in bilateral and PoolCo power markets[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2001, 16(2): 194-202.
- [9] Weber J D, Overbye T J. An individual welfare maximization algorithm for electricity markets[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2002, 17(3): 590-596.
- [10] Correia P F, Overbye T J. Searching for noncooperative equilibria in centralized electricity markets[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2003, 18(4): 1417-1424.
- [11] 王晔, 李渝曾, 张少华. 求解电力市场均衡模型的非线性互补方法[J]. 电力系统自动化, 2004, 28(1): 7-11.
Wang Xian, Li Yuzeng, Zhang Shaohua. A nonlinear complementary approach to the solution of equilibrium models for electricity markets[J]. Automation of Electric Power Systems, 2004, 28(1): 7-11(in Chinese).
- [12] Wang X, Li Y, Zhang S. Oligopolistic equilibrium analysis for electricity markets: a nonlinear complementarity approach[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2004, 19(3): 1348-1355.
- [13] 袁智强, 候志俭, 宋依群, 等. 考虑输电约束古诺模型的均衡分析[J]. 中国电机工程学报, 2004, 24(6): 73-79.
Yuan Zhiqiang, Hou Zhijian, Song Yiqun, et al. Analysis of equilibrium of cournot model with considering transmission constraints[J]. Proceedings of the CSEE, 2004, 24(6): 73-79(in Chinese).
- [14] Yuan Z, Liu D, Hou Z, et al. Analysis of supplier equilibrium strategy considering transmission constraints[J]. IEE Proceedings: Generation, Transmission and Distribution, 2005, 152(1): 17-22.
- [15] 刘有飞, 吴复立. 线路传输容量约束对电力市场均衡的影响[J]. 电力系统自动化, 2005, 29(15): 1-9.
Liu Youfei, Wu Fuli. Impacts of transmission line limits on electricity market equilibrium[J]. Automation of Electric Power Systems, 2005, 29(15): 1-9(in Chinese).
- [16] Liu Y, Wu F. Impacts of network constraints on electricity market equilibrium[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2007, 22(1): 126-135.
- [17] 杨彦, 陈皓勇, 张尧. 基于协同进化算法求解寡头电力市场均衡[J]. 电力系统自动化, 2009, 33(18): 42-46.
Yang Yan, Chen Haoyong, Zhang Yao. A coevolutionary approach to calculating equilibrium for oligopolistic electricity market [J]. Automation of Electric Power Systems, 2009, 33(18): 42-46(in Chinese).
- [18] Son Y, Baldick R. Hybrid coevolutionary programming for Nash equilibrium search in games with local optima[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2004, 8(4): 305-315.
- [19] 余贻鑫, 陈晓明. 考虑输电约束的古诺混合策略均衡求解方法[J]. 中国电机工程学报, 2006, 26(11): 115-120.
Yu Yixin, Chen Xiaoming. Computing transmission constrained cournot mixed strategy equilibrium in electricity market [J]. Proceedings of the CSEE, 2006, 26(11): 115-120(in Chinese).
- [20] Ferrero R, Shahidehpour S M, Ramesh V C. Transaction analysis in deregulated power systems using game theory[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 1997, 12(3): 1340-1344.
- [21] Lee K H, Baldick R. Tuning of discretization in bimatrix game approach to power system market analysis[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2003, 18(2): 830-836.
- [22] Lee K H, Baldick R. Solving three-player games by the matrix approach with application to an electric power market[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2003, 18(4): 1573-1580.
- [23] Lemke C E, Howson J T. Equilibrium points in bimatrix games [J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 1964, 12(2): 413-432.
- [24] Kostreva M, Kinard L. A differential homotopy approach for solving polynomial optimization problem and noncooperative games [J]. Computers and Mathematics With Applications, 1991(21): 135-143.
- [25] McKelvey R D, McLennan A. Computation of equilibria in finite games[J]. Handbook of Computational Economics, 1996(1): 87-142.
- [26] Mathiesen L. An algorithm based on a sequence of linear complementarity problems applied to a Walrasian equilibrium model: an example[J]. Mathematical Programming, 1987(37): 1-18.
- [27] McKelvey R D. A Liapunov function for Nash equilibria [R]. Pasadena: California Institute of Technology, 1998.
- [28] Herings P J, Peeters R. A globally convergent algorithm to compute all Nash equilibria for n -person games[J]. Annals of Operation Research, 2005(137): 349-368.
- [29] 梁恒. 多齐次同伦连续方法中的计算问题[D]. 北京: 清华大学, 2004.
Liang Heng. Computational problems from multi-homogeneous homotopy continuation method[D]. Beijing: Tsinghua University, 2004(in Chinese).
- [30] Garcia C B, Zangwill W I. Finding all solutions to polynomial systems and other systems of equations[J]. Mathematical Programming, 1979(16): 159-176.
- [31] Verschelde J. Algorithm 795: PHCpack, a general purpose solver for polynomial systems by homotopy continuation[J]. ACM Transactions

on Mathematical Software, 1999, 25(2): 251-276.

[32] Verschelde J. Homotopy continuation methods for solving polynomial systems[D]. Leuven: Katholieke Universiteit Leuven, 1996.

附录 A 构建多项式方程系统示例

假设支集 $\beta(\{(\beta_1^1, \beta_2^1), (\beta_1^2, \beta_2^2), (\beta_1^3, \beta_2^3)\})$ 可以构成博弈 Γ 的纳什均衡 φ ，且假设均衡 φ 所对应的分布概率为 $\rho((\rho_1^1, \rho_2^1), (\rho_1^2, \rho_2^2), (\rho_1^3, \rho_2^3))$ 。对于 β^1 中的策略， φ^{-1} 对应的纯策略组合 β^{-1} 中有 4 个元素，因而 β_1^1 在均衡处的收益为

$$w^1(\beta_1^1, \varphi^{-1}) = w^1(\beta_1^1, \beta_1^2, \beta_1^3) \rho_1^2 \rho_1^3 + w^1(\beta_1^1, \beta_1^2, \beta_2^3) \rho_1^2 \rho_2^3 + w^1(\beta_1^1, \beta_2^2, \beta_1^3) \rho_2^2 \rho_1^3 + w^1(\beta_1^1, \beta_2^2, \beta_2^3) \rho_2^2 \rho_2^3 \quad (A1)$$

β_2^1 在均衡处的收益为

$$w^1(\beta_2^1, \varphi^{-1}) = w^1(\beta_2^1, \beta_1^2, \beta_1^3) \rho_1^2 \rho_1^3 + w^1(\beta_2^1, \beta_1^2, \beta_2^3) \rho_1^2 \rho_2^3 + w^1(\beta_2^1, \beta_2^2, \beta_1^3) \rho_2^2 \rho_1^3 + w^1(\beta_2^1, \beta_2^2, \beta_2^3) \rho_2^2 \rho_2^3 \quad (A2)$$

那么对参与者 1 来说，有

$$\begin{cases} w^1(\beta_2^1, \varphi^{-1}) - w^1(\beta_1^1, \varphi^{-1}) = 0 \\ \rho_1^1 + \rho_2^1 = 1 \end{cases} \quad (A3)$$

同理，对参与者 2 与 3，都可建立类似式(A3)的方程，故对支集 β 可建立 6 个关于 6 个未知分布概率的方程，是一个完备的多项式方程系统。



杨彦

收稿日期：2010-07-05。

作者简介：

杨彦(1983)，男，博士研究生，研究方向为电力市场、电力系统优化规划与经济运行，yang.yan@mail.scut.edu.cn；

陈皓勇(1975)，男，博士，教授，主要研究方向为电力市场、电力系统优化规划与运行、人工智能在电力系统的运用；

张尧(1948)，男，博士，教授，博士生导师，通信作者，主要研究方向为电力系统分析、电力系统安全与稳定、电力市场等，epyzhang@scut.edu.cn。

(责任编辑 刘浩芳)