

# 尖端具有非线性吸附接触的 界面裂纹的动态特性研究

周振功 邹振祝 马兴瑞 王 铎

(哈尔滨工业大学, 哈尔滨, 150006)

段祝平

(中科院力学研究所, 北京, 100080)

## RESEARCH ON DYNAMIC FEATURES BY AN INTERFACE CRACK WITH NON-LINEAR ADHERENT CONTACT AT ITS TIPS

Zhou Zhen-gong, Zou Zhen-zhu, Ma Xing-rui, Wang Duo

(P.O.Box333, Harbin Institute of Technology, Harbin, 150006)

Duan Zhu-ping

(Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing, 100080)

**摘 要** 研究一类尖端具有非线性吸附接触型裂纹模型的弹性波散射问题。利用积分变换和积分方程方法推导了确定这类问题基本变量的奇异积分方程组, 采用围道积分技术和切比雪夫多项式展开技术得到了待定系数的非线性代数方程组。最后给出了裂纹尖端接触区的大小和接触应力的数值结果, 揭示了这种接触型裂纹模型的动力学特征及物理上的合理性。

**关键词** 界面裂纹, 弹性波散射, 积分方程

**Abstract** In this paper, scattering of elastic waves by an interface crack with adherent contact at its tips is considered. By use of integral transform and integral equation methods, the singular integral equations of this problem are derived, which are transformed into a set of algebraic equations by means of contour integral and Chebyshev polynomials extending techniques. The numerical results on contacting region and stresses amplitudes are given in this paper, which show that the dynamic features of this model are complicated, and this model is physically reasonable.

**Key words** interface crack, elastic wave scattering, integral equation

1991年10月14日收到, 1992年4月12日收到修改稿

国家自然科学基金和中科院力学所非线性连续介质力学开放实验室基金资助课题

对于动载及应力波作用下的裂纹尖端动态特性研究,一般都采用断裂力学中的张开型裂纹模型<sup>[1~3]</sup>,然而,对于不同材料间的界面裂纹,由于材料特性的间断性,裂纹尖端的特性变得异常复杂,如仍按文献[1~3]所采用的裂纹模型,裂纹尖端附近出现应力和位移振荡,因而产生裂纹尖端表面的相互叠合,这显然是不合理的。所以许多研究者试图来解决这一矛盾,文献[4]提出一个裂纹尖端无摩擦接触模型,并相应解决了静力学问题,但利用这种模型得到的接触区长度在  $10^{-5}$  mm 量级以下,不符合连续介质力学的假设。Achenbach 等人<sup>[5]</sup>提出了一个尖端具有吸附性的接触型裂纹模型,同时解决了相应的静力学问题。本文作者在此模型的基础上,首先研究了线性吸附接触的界面裂纹的动力学问题<sup>[6]</sup>,而本文着重考虑了这类裂纹模型的非线性吸附情形下的裂纹尖端动特性问题。

## 1 裂纹模型的建立

设有两个半平面胶接在一起,上下半平面分别充满了介质常数为  $\rho_1, \mu_1, \lambda_1$  和  $\rho_0, \mu_0, \lambda_0$

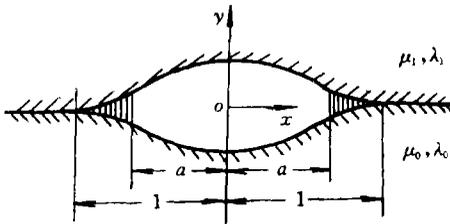


图 1 模型示意图

的不同材料。在交界面上,有一两个单位长的裂纹,如图 1 所示。设在裂纹尖端附近存在一个过渡区域,在过渡区中正应力为二次曲线分布,位错密度显  $1/2$  次方分布。

在稳态弹性波作用下,裂纹模型的边界条件为

$$|x| < a, y = 0, \sigma_y^1 = \sigma_y^0$$

$$= -\sigma_0 \exp(-i\omega t)$$

$$\sigma_{xy}^1 = \sigma_{xy}^0 = 0 \quad (1)$$

$$a < |x| < 1, y = 0, \sigma_y^1 = \sigma_y^0 = T((|x| - a)/(1 - a))^2 \exp(-i\omega t) - \sigma_0 \exp(-i\omega t) \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_x^1 - u_x^0) = -A(1 - x^2)^{1/2} \exp(-i\omega t) \quad (3)$$

$$|x| > 1, y = 0, u_y^1 = u_y^0, u_x^1 = u_x^0 \quad (4)$$

$$|x| > 0, y = 0, \sigma_y^1 = \sigma_y^0, \sigma_{xy}^1 = \sigma_{xy}^0 \quad (5)$$

其中  $u_x^1, u_y^1, u_x^0, u_y^0, \sigma_x^1, \sigma_y^1, \sigma_{xy}^1, \sigma_x^0, \sigma_y^0, \sigma_{xy}^0$  分别为上半平面和下半平面的位移、应力;  $\omega$  为入射波频率;  $T, A, a$  为待定常数。

## 2 基本公式的推导

对于稳态简谐波入射的情形,并设无体力作用,平面波动方程转化为 Helmholtz 方程(去掉简谐因子)<sup>[6]</sup>

$$\nabla^2 \phi_j + K_{L_j}^2 \phi_j = 0$$

$$\nabla^2 \psi_j + K_{T_j}^2 \psi_j = 0 \quad j = 1, 0 \quad (6)$$

其中  $K_{Lj}^2 = \omega^2 \rho_j / (\lambda_j + \mu_j)$ ;  $K_{Tj}^2 = \omega^2 \rho_j / \mu_j$ ;  $\phi_j, \psi_j$  为势函数;  $K_{Lj}$  和  $K_{Tj}$  为纵波和横波波数;  $j=1, 0$  分别代表上半平面和下半平面的量。而位移和应力与势函数的关系详见文献[6]。

经 Fourier 变换, 考虑到边界条件和辐射条件, 并引进两个新的未知函数  $p_1(x)$  和  $p_2(x)$ 。经一系列推演得到关于  $p_1(x)$  和  $p_2(x)$  的积分方程

$$\int_{-1}^1 du \int_{-\infty}^{\infty} [D_1(s)p_1(x) + D_2(s)p_2(x)] e^{-is(x-u)} ds$$

$$= 2\pi \left\{ T \left( \frac{|x|-a}{1-a} \right)^2 [H(|x|-a) - H(|x|-1)] - \sigma_0(x) \right\}$$

$$\int_{-1}^1 du \int_{-\infty}^{\infty} [D_3(s)p_1(x) + D_4(s)p_2(x)] e^{-is(x-u)} ds$$

$$= 0 \quad |x| \leq a \quad (7)$$

$$p_1(x) = (-Ai)(1-x^2)^{1/2} \quad a < |x| < 1 \quad (8)$$

$$\int_{-1}^1 p_1(x) dx = 0$$

和

$$\int_{-1}^1 p_2(x) dx = 0 \quad (9)$$

上式就是未知函数  $p_1(x)$  和  $p_2(x)$  的对偶积分方程, 其中  $D_i(s)$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) 具体表达式见附录。

### 3 界面裂纹对弹性波散射的奇异积分方程 导出及解的讨论

利用关系式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(s) e^{is(u-x)} dx = \frac{2i}{u-x}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{is(u-x)} dx = 2\pi \delta(u-x) \quad (10)$$

方程式(7)~式(9)进一步转化为

$$h_1 p_1(x) + h_2 \int_{-1}^1 \frac{p_2(u)}{u-x} du + \int_{-1}^1 n_1 p_1(u) du + \int_{-1}^1 n_2 p_2(u) du = p(x)$$

$$|x| \leq 1 \quad (11)$$

$$p_1(x) = m_1(1-x^2)^{1/2} \quad a \leq x \leq 1 \quad (12)$$

$$h_3 p_2(x) + h_4 \int_{-1}^1 \frac{p_1(u)}{u-x} du + \int_{-1}^1 n_3 p_1(u) du + \int_{-1}^1 n_4 p_2(u) du = 0$$

$$|x| \leq a \quad (13)$$

$$\text{其中: } \left. \begin{aligned} h_1 &= 2\pi d_1 i, \quad h_2 = 2d_2 i, \quad m_1 = -Ai \\ h_3 &= -2\pi d_1 i, \quad h_4 = 2d_2 i, \quad d_1, d_2 \text{见附录} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} P(x) &= 2\pi \left\{ T \left( \frac{|x|-a}{1-a} \right)^2 [H(|x|-a) - H(|x|-1)] - \sigma_0(x) \right\} \\ n_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} (D_1(s) - id_1) e^{is(u-x)} ds \\ n_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (D_2(s) - \text{sgn}(s)d_2) e^{is(u-x)} ds \\ n_3 &= \int_{-\infty}^{\infty} (D_3(s) - \text{sgn}(s)d_2) e^{is(u-x)} ds \\ n_4 &= \int_{-\infty}^{\infty} (D_4(s) + id_1) e^{is(u-x)} ds \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$H(x)$ 为阶跃函数;  $d_1, d_2, D_i(s)$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) 见附录。

上述方程组的求解一般来说是比较困难的。主要困难是  $n_i(u, x)$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) 及奇异核的处理。从数学上看,  $n_i$  是一种广义积分, 用通常的数字方法难以达到计算精度, 本文采用复平面上的围道积分技术来研究  $n_i(u, x)$  ( $i=1, \dots, 4$ ), 其主要思想是用有限积分加上留数部分等效广义积分<sup>[7]</sup>。

对奇异积分方程组式(11)~式(13)来说, 当  $|x| > a$  时,  $p_1(x) = m_1(1-x^2)^{1/2}$ , 即  $p_1(x)$  在  $\pm 1$  两点有界。方程(13)又可转化为

$$\int_{-1}^1 \frac{p_1(u)}{u-x} du = g(x) \quad (16)$$

$$\text{其中 } g(x) = \frac{1}{h_4} \left\{ -h_3 p_2(x) - \int_{-1}^1 n_3 p_1(u) du - \int_{-1}^1 n_4 p_2(u) du \right\} \quad (18)$$

根据奇异积分方程的性质<sup>[8]</sup>知, 式(16)的奇异积分方程为有界解, 但  $g(x)$  必须满足下列条件

$$\int_{-1}^1 \frac{g(x)}{(1-x^2)^{1/2}} dx = 0 \quad (19)$$

同样式(11)也可转化为如下形式

$$\int_{-1}^1 \frac{p_2(u)}{u-x} du = f(x) \quad (20)$$

$$\text{其中 } f(x) = (1/h_2) \left\{ -h_1 p_1(x) - \int_{-1}^1 n_1 p_1(u) du - \int_{-1}^1 n_2 p_2(u) du + P(x) \right\} \quad (21)$$

故要使  $p_2(x)$  有界, 则  $f(x)$  必须满足

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{(1-x^2)^{1/2}} dx = 0 \quad (22)$$

根据式(12), 式(16)~式(22)的条件, 可以假定奇异积分方程组的解具有

$$P_1(x) = m_1(1-x^2)^{1/2} - (1-x^2/a^2)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} A_n V_n(x/a) \quad (23)$$

$$P_2(x) = (1-x^2)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} B_n V_n(x) \quad (24)$$

其中  $V_n(x)$  为第二类切比雪夫多项式;  $A_n, B_n (n=0, 1, \dots, \infty)$  是待定常数。

将式(23)和式(24)代入奇异积分方程组式(11)和式(13), 然后对代入后的方程两边分别同乘以  $(1-x^2)^{-1/2} T_p(x)$  和  $(1-x^2/a^2)^{-1/2} T_p(x/a)$ , 并分别在  $[-1, 1]$  和  $[-a, a]$  上对  $x$  积分得

$$\begin{aligned} & -\pi h_2 \sum_{n=0}^{\infty} B_n \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} T_p(x) T_{n+1}(x) dx \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} T_p(x) dx \int_{-1}^1 n_2 (1-u^2)^{1/2} V_n(u) du \\ & - h_1 \sum_{n=0}^{\infty} A_n \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} (1-x^2/a^2)^{1/2} T_p(x) V_n(x/a) dx \\ & + h_1 m_1 \int_{-1}^1 T_p(x) dx + m_1 \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} T_p(x) dx \int_{-1}^1 n_1 (1-u^2)^{1/2} du \\ & - \sum_{n=0}^{\infty} A_n \int_{-a}^a (1-x^2)^{-1/2} T_p(x) dx \int_{-a}^a n_1 (1-u^2/a^2)^{1/2} V_n(u/a) du \\ & = \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} T_p(x) P(x) dx \quad (|x| \leq 1) \\ & \quad \dot{p} = 0, 1, 2, \dots, \quad (25) \\ & h_3 \sum_{n=0}^{\infty} B_n \int_{-a}^a (1-x^2)^{1/2} V_n(x) (1-x^2/a^2)^{-1/2} T_p(x/a) dx \\ & - h_3 m_1 \pi \int_{-a}^a (1-x^2/a^2)^{-1/2} T_p(x/a) dx \\ & + h_4 \pi \sum_{n=0}^{\infty} A_n \int_{-a}^a (1-x^2/a^2)^{-1/2} T_p(x/a) T_{n+1}(x/a) dx \\ & + h_4 \pi \sum_{n=0}^{\infty} A_n \int_{-a}^a (1-x^2/a^2)^{-1/2} T_p(x/a) T_{n+1}(x/a) dx \\ & + m_1 \int_{-a}^a (1-x^2/a^2)^{-1/2} T_p(x/a) dx \int_{-1}^1 (1-u^2)^{1/2} n_3 du \\ & - \sum_{n=0}^{\infty} A_n \int_{-a}^a (1-x^2/a^2)^{-1/2} T_p(x/a) dx \int_{-a}^a n_3 (1-u^2/a^2)^{1/2} V_n(u/a) du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \int_{-a}^a (1-x^2/a^2)^{-1/2} T_p(x/a) dx \int_{-1}^1 n_1 (1-u^2)^{1/2} V_n(u) du = 0 \\
 & \quad (|x| \leq a) \quad (26) \\
 & \quad p=0, 1, 2, \dots,
 \end{aligned}$$

另外由方程式(9)得

$$A_0 = m_1/a, \quad B_0 = 0 \quad (27)$$

再把式(23)和式(24)代入到式(19)和式(22), 得

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^1 P(x) (1-x^2)^{-1/2} dx - m_1 \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} dx \int_{-1}^1 n_1 (1-u^2)^{1/2} du \\
 & + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \int_{-a}^a (1-x^2)^{-1/2} dx \int_{-a}^a n_1 (1-u^2/a^2)^{1/2} V_n(u/a) du \\
 & - \sum_{n=0}^{\infty} B_n \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} dx \int_{-1}^1 n_2 (1-u^2)^{1/2} V_n(u) du \\
 & - h_1 m_1 \int_{-1}^1 (1-x^2)^{1/2} (1-x^2)^{-1/2} dx + h_1 \sum_{n=0}^{\infty} A_n \int_{-a}^a (1-x^2)^{-1/2} V_n(x/a) dx \\
 & = 0 \quad (28) \\
 & h_3 \sum_{n=0}^{\infty} B_n \int_{-1}^1 V_n(x) dx + m_1 \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} dx \int_{-1}^1 n_3 (1-u^2)^{1/2} du \\
 & - \sum_{n=0}^{\infty} A_n \int_{-a}^a (1-x^2)^{-1/2} dx \int_{-a}^a n_3 (1-u^2/a^2)^{1/2} V_n(u/a) du \\
 & + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} dx \int_{-1}^1 n_4 (1-u^2)^{1/2} V_n(u) du \\
 & = 0 \quad (29)
 \end{aligned}$$

这样由上述方程构成一个关于  $a$  的非线性方程, 如果取截断至  $N-1$ , 则  $p=0, 1, \dots, N-1$ , 式(25)~式(29)构成  $2N+2$  个方程, 但当  $p=0$  时, 式(28)与式(25)相同, 因此, 实际上独立的方程个数为  $2N+1$ , 未知系数  $A_1, A_2, \dots, A_{N-1}, B_1, B_2, \dots, B_{N-1}$  及  $A, T, a$  共  $2N+1$  个, 故独立方程个数与未知数相同. 本文采用迭代法来求解上述非线性方程组.

#### 4 数值结果及讨论

本文计算了  $P$  波入射情况下, 几组不同频情形下的裂纹尖端接触区和裂纹尖端附近界面应力分布特性, 上, 下半空间的介质分别设为铁与锌, 其介质常数为  $\lambda_1 = 98 \times 10^9$  (N/m<sup>2</sup>),  $\mu_1 = 77 \times 10^9$  (N/m<sup>2</sup>),  $\rho_1 = 7.7 \times 10^3$  (kg/m<sup>3</sup>)  $\lambda_0 = 41.4 \times 10^9$  (N/m<sup>2</sup>),  $\mu_0 = 41.4 \times 10^9$  (N/m<sup>2</sup>),  $\rho_0 = 7.1 \times 10$  (kg/m<sup>3</sup>) 利用文中推得的代数方程组及应力的积分表达式, 经

迭代计算，首先确定裂纹界面接触区的长度，然后确定  $T$ 、 $A$  和系数  $A_n$  和  $B_n$  ( $n=0, 1, \dots, N-1$ )，下面几组结果是不同入射频率下，裂纹尖端界面处的应力分布情况和接触区的大小。

由图 2~图 4 可见，应力的最大值发生在裂纹尖端，这与实际情况相符。在计算频率范围内随入射频率的提高，裂纹尖端正应力也相应增大，而剪应力相对减小；随着界面离裂纹尖端距离增加，应力逐渐趋于平稳。对于正应力数值结果来说，它与用非局部场理论算出的结果大致相同<sup>[9]</sup>。对于裂纹尖端吸附性接触区来讲，经过迭代计算知，它的接触区长度为原裂纹长的 3% 左右，从而解决了文献[4]中所讨论的模型接触区太小的不合理

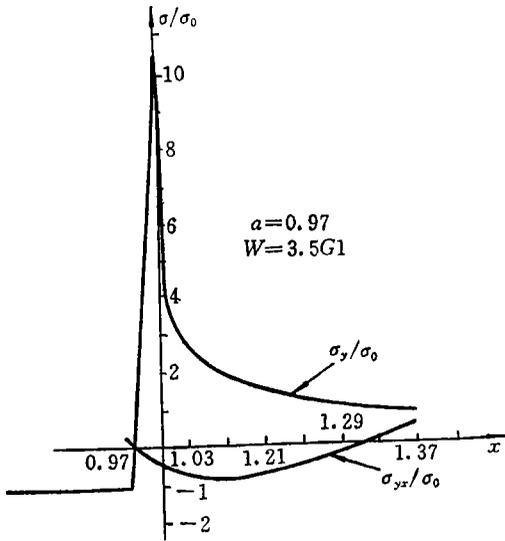


图 2  $W = 3.5 G1$  时，沿裂纹交界面上的应力分布

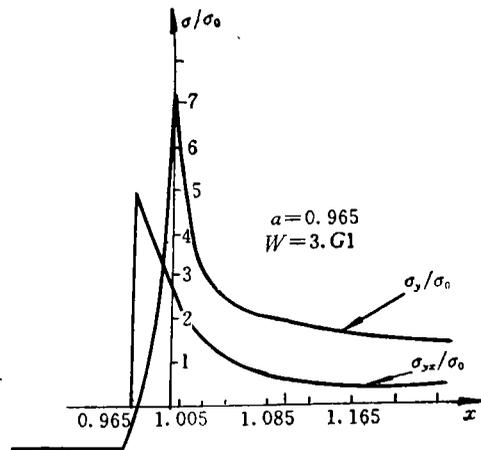


图 3  $W = 3.0 G1$  时，沿裂纹交界面上的应力分布

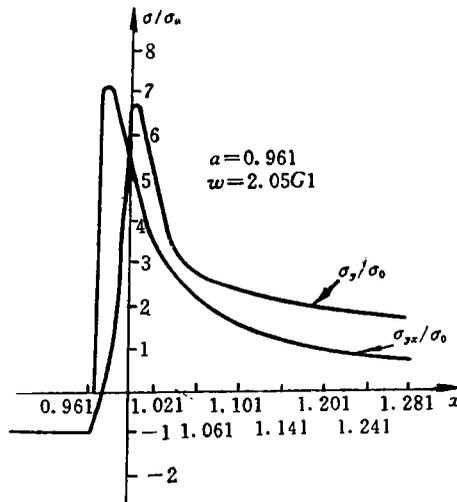


图 4  $W = 2.5 G1$  时，沿裂纹交界面上的应力分布

性。在本文的数值计算中,入射波的频率分别取  $\omega = 3.5G1, 3.0G1$  和  $2.5G1$ 。由计算结果可知裂纹尖端接触区随入射频率增大而减少。

基于上述模型,本文从物理上得到了较为合理的结果,但由于界面裂纹接触问题极其复杂,进一步的研究还有待于进行。

对力学所郑敏研究员,王自强研究员和北京大学王晓东博士给予的建议和帮助,表示感谢。

### 附 录

$$\begin{bmatrix} D_1 & D_2 \\ D_3 & D_4 \end{bmatrix} = \mu_1 [X][Y]^{-1} \frac{1}{s} \quad (\text{附 1})$$

$$[X] = \begin{bmatrix} r_1^2 & 2is\beta_1 \\ 2is\alpha_1 & -r_1^2 \end{bmatrix} \quad (\text{附 2})$$

$$r_j^2 = s^2 + \beta_j^2 \quad (j=0,1), \quad \alpha_j^2 = s^2 - K_{Lj}^2, \quad \beta_j^2 = s^2 - K_{Tj}^2; \quad (\text{附 3})$$

$$[Y] = \begin{bmatrix} -is & \beta_1 \\ -\alpha_1 & -is \end{bmatrix} - \frac{\mu_1}{\mu_0} \begin{bmatrix} -is & -\beta_0 \\ \alpha_0 & -is \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_0^2 & -2is\beta_0 \\ -2is\alpha_0 & -r_0^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} r_1^2 & 2is\beta_1 \\ 2is\alpha_1 & -r_1^2 \end{bmatrix} \quad (\text{附 4})$$

$d_1$  和  $d_2$  为与上, 下半空间介质有关的弹性常数。

### 参 考 文 献

- 1 Lowengrub M, Sneddon I N. *Int J Engng Sci*, 1973, 11: 1025~1034
- 2 Srivastava K N, Gupta O P, Palaiya R M. *Int J Fracture*, 1978, 14(2): 145~154
- 3 Srivastava K N, Gupta O P, Palaiya R M. *Int J Fracture*, 1979, 15(6): 591~599
- 4 Comninou M. *J Appl Mech*, 1977, 44: 631~636
- 5 Achenoach J D, Keer L M, Khetan R P, Chen S H. *J of Elasticity*, 1979, 9(4): 397
- 6 Erdogan F, Gupta G D, Cook T S. *Methods of Analysis and Solution of Crack Problems*, ed G S Sih, Noordhoff Int Pub Legden, 1973, 1: 368~425
- 7 周振功, 邹振祝, 马兴瑞, 王铎. 尖端具有线性吸附接触的界面裂纹对稳态弹性波的散射 (待发表).
- 8 马兴瑞. 层状介质交界裂纹的弹性波散射研究及弹性动力学反问题初探. 哈尔滨工业大学博士学位论文, 1987.
- 9 胡益平. 非局部场理论在断裂力学中几个基本应用问题的研究. 哈尔滨工业大学博士学位论文, 1991.