第13卷 第10期 航 空 学 报 Vo1.13 No.10
1992年 10月 ACTA AERONAUTICA ET ASTRONAUTICA SINICA Oct. 1992

多输入非线性控制系统的可控标准型

王兴伟 高为炳
(北京航空航天大学七研，北京，100083)

CONTROLLABILITY CANONICAL FORM FOR MULTI-INPUT NONLINEAR CONTROL SYSTEMS

Wang Xing-wei, Gao Wei-bing
(*Beijing University of Aeronautics and Astronautics,Beijing*,100083)

摘 要 本文用代数方法进一步研究了多输入非线性控制系统的可控标准型问题。补充证明了李文林文章结论，并获得一些新结果。

关键词 多输入非线性控制系统，可控标准型，状态变换

Abstract The result about controllability canonical form for multi-input nonlinear control systems by the algebraic method established is refined in this paper. This problem was studied in many papers mainly by differential geometric method which is not easy to possess and apply for engineers. Two complete sets of sufficient conditions for existence of state transformation which converts the nonlinear control system to the controllability canonical form are given . Then ,a procedure for the calculation of the controllability indices is established. After this , a special case which is called uniform controllability canonical form is considered. Furthermore, the uniqueness of the canonical form in the framework of a given procedure for constructing the state transformation is discussed.

Key words multi-input nonlinear control systems, controllability canonical form, state transformation

对非线性系统进行分析设计时，可控标准型是一个十分有用的工具[1~4]。关于可控标准型的研究，很多都是采用了较抽象的微分几何方法，给工程技术应用带来了许多不便。文献[5]用代数方法导出的结果，其证明和具体使用都比较方便，但证明中存在一些不足，本文将加以补充，并在其基础上对这一问题作进一步的探讨。

1 非线性系统的可控标准型

文献[5]对非线性控制系统

$$\dot{x} = f(x,u), \qquad x \in R^n \;, \quad u \in R^m$$

定义其可控标准型为

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} A_{11} & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ 0 & & & A_{mm} \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} C_1(y) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ C_m(y) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ B_m \end{bmatrix} u \tag{1}$$

1990 年 8 月 21 日收到，1991 年 6 月 15 日收到修改稿

其中

$$A_{ii}=\begin{bmatrix}0 & 1 & & 0\\ & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & 1\\ 0 & & & 0\end{bmatrix},\ c_i(y)=\begin{bmatrix}0\\ \cdot\\ \cdot\\ 0\\ C_i(y)\end{bmatrix},\ B_i=\begin{bmatrix}0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0\\ \cdot & & & & \cdot\\ \cdot & & & & \cdot\\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0\\ 0 & \cdot & 1 & \cdot & 0\end{bmatrix}$$

(i)

$A_{ii}, B_i, C_i(y)$分别为$n_i\times n_i, n_i\times m, n_i\times 1$维矩阵，$\sum_{i=1}^{m} n_i=n$。

文献[3]指出一个多输入非线性系统若可经状态变换化为可控标准型，则必为

$$x=A(x)+B(x)u \tag{2}$$

形式。因此，在以下研究中，将仍以 (2) 式为模型。

对于多输入非线性控制系统的可控标准型问题，文献 [5] 中的定理 4 给出了一个充分条件，但因缺少一个条件，而保证不了充分性。下面给出改正后的定理。

记向量$a_i=[0\cdots 0\ \ 1\ \ 0\cdots 0]^{\mathrm{T}}$，第$\sum_{k=1}^{i}(d_k+1)$项

矩阵$R(i)=[b_1(x), b_{1A}^{1}(x),\cdots, b_{1A}^{d_1}(x);\cdots; b_i(x), b_{iA}^{1}(x),\cdots, b_{iA}^{d_i}(x); b_{i+1}(x),$

$\cdots, b_{i+1A}^{d_i}(x), b_m(x), b_{mA}^{1}(x),\cdots, b_{mA}^{di}(x)]$

其中

$$b_{iA}^{1}(x)=\nabla A(x)b_i(x)-\nabla b_i(x)A(x),$$

$$b_{iA}^{k}(x)=\nabla A(x)b_{iA}^{k-1}(x)-\nabla b_{iA}^{k-1}(x)A(x),$$

$\sum_{i=1}^{m}(d_i+1)=n$，$b_i(x)$是$B(x)$的第i列。

再记$R^{-1}(i,i)$表示$R(i)$的广义逆的第$\sum_{k=1}^{i}(d_k+1)$行。有下面定理

定理1 多输入非线性控制系统若满足

(1)$d_1\geqq d_2\geqq\cdots\geqq d_m$;

(2)$R(x)=[b_1(x), b_{1A}^{1}(x),\cdots, b_{1A}^{d_1}(x);\cdots; b_m(x), b_{mA}^{1}(x),\cdots, b_{mA}^{d_m}(x)]$,满秩;

(3)秩$[a_i; R_{(i)}^{\mathrm{T}}]=$秩$[R_{(i)}]$,

(4)$R^{-1}(i,i)$的原函数存在、

则存在一个可逆状态变换将其化为可控标准型。

原证明经部分改动后仍适用。

为减弱定理1条件(1)的限制，令

$p=\max\{d_i,\ i\in \underline{m}\}$

$c_i=[0\ \cdots\ 0\ 1\ 0\ \cdots\ 0]^{\mathrm{T}}$,第$(i-1)\times(p+1)+d_i+1$项

矩阵$R(p)=[b_1(x),b_{1A}^1(x),\cdots,b_{1A}^p(x);\cdots;b_m(x),\cdots,b_{mA}^p(x)]$,

$R^{-1}(i,p)$, $i\in \underline{m}$为$R(p)$的广义逆的第$(i-1)\times(p+1)+d_i+1$行

定理2　多输入非线性控制系统若满足

(1)$R(x)$满秩;

(2)秩$[C_i,R^{\mathrm{T}}(p)]=$秩$R(p)$;

(3)$R^{-1}(i,p)$的原函数存在。

则存在一个可逆状态变换将其化为可控标准型。

证明从略

附注：定理 2 虽然减弱了定理 1 中条件 (1) 的限制，但因 a_i 与 C_i 及 $R(i)$ 及 $R(p)$ 在维数上的差别，使得不满足定理 2 的系统仍可能满足定理 1，故定理 2 不能代替定理 1。

定义 2　对一个给定的多输入非线性控制系统，满足定理 1 或定理 2 的一组非负整数 $\{d_i,\ i\in \underline{m}\}$ 称为该系统的可控指数。

定义3　对多输入非线性系统(2)式，矩阵

$U(x)=[b_1(x),\cdots,b_m(x);b_{1A}^1(x);\cdots;b_{mA}^1(x)\cdots,b_{1A}^{n-m}(x),\cdots,b_{mA}^{n-m}(x)]$

称为系统的可控矩阵。

定理1和定理2都需要可控指数d_i,以下给出一个求可控指数的方法。

引理 1　自左至右搜索 $U(x)$ 中的线性无关列时，若某列 $b_{iA}^q(x)$ 与其左方的列线性相关，则 $b_{iA}^{q+j}(x),(q+j\leqq n-m)$，亦与其各自左方的列线性相关。

证明　设$b_{iA}^q(x)$与其左方的列线性相关

$$b_{iA}^q(x)=\sum_{i=1}^m k_{oj}b_j(x)+\sum_{j=1}^m k_{1j}b_{jA}^1(x)+\cdots+\sum_{j=1}^m k_{q-1j}b_{jA}^{q-1}(x)+\sum_{j=1}^{i-1}k_{qj}b_{jA}^q(x)$$

其中k_{ij}不会为零。将$b_{iA}^{q+1}(x)$展开得

$$\begin{aligned}b_{iA}^{q+1}(x)&=\nabla A(x)b_{iA}^q(x)-\nabla b_{iA}^q(x)A(x)\\&=\sum_{j=1}^m k_{oj}b_{jA}^1(x)+\sum_{j=1}^m k_{1j}b_{jA}^2(x)+\cdots+\sum_{j=1}^m k_{q-1j}b_{jA}^q(x)+\sum_{j=1}^{i-1}k_{qj}b_{jA}^{q+1}(x)\end{aligned}$$

由此看出 $b_{1A}^{q+1}(x)$ 与其左方的列线性相关。以完全相同的方法可证得 $b_{1A}^{q+j}(x),q+j\leqq n-m$，亦与其各自左方的列线性相关。

定理 3　如果多输入非线性系统可经状态变换化为可控标准型，则可通过对 $U(x)$ 进行无关列搜索，将可控指数确定出来。

因为证明中要多次用到$U(x)$的展开式，书写起来比较繁索。具体证明过程从略。

定义 4　满足 $n_1 = n_2 = \cdots = n_m$ 的一类特殊的可控标准型，称为匀可控标准型。对于匀可控标准型，有以下充分必要条件。

引理4　多输入非线性系统可经状态变换化为匀可控标准型的充要条件为

$$(1) d_1 = d_2 = \cdots d_m = \frac{n-m}{m} = K(\text{自然数})$$

(2)$R(x)$满秩，且$R_i^{-1}(x)$的原函数存在。

证明和定理 1 类似。

2　可控标准型的唯一性

将文献[5]定理 4 中构造状态变换 $y = T(x)$ 的方法称为积分构造法。在这种方法下可控标准型的唯一性问题，有下面结论。

引理 2　在积分构造法下，多输入非线性控制系统的可控性指数是唯一的（若有的话）。

证明略

由引理 2，很容易得出

定理 5　在积分构造法下，多输入非线性控制系统的可控标准型是唯一的(若有的话)

3　结论

以代数方法在文献[5]的基础上，对多输入非线性控制系统的可控标准型作了进一步研究，指出了文献[5]的不足之处，并给出了补充证明。另外给出了求可控指数 d_i 的具体方法，从而使定理的结论真正能够应用。最后讨论了匀可控标准型和积分构造法下可控标准型的唯一性问题。一般情况下可控标准型的唯一性问题有待进一步研究。

参 考 文 献

1 Zeitz M. Controllability Canonical Form for Nonlinear Time-Variable Systems. Int J Contr, 1883;37:(6) 1449～1457

2 Beste D, Zeitz M. Canonical Form Observer Design for Nonlinear Time-Variable Systems. Int J contr 1983;38:(2) 419～431

3 高为炳等.关于非线性控制系统的线性化问题. 中国科学A辑，1987;(7)

4 高为炳.变结构控制基础.北京，中国科学技术出版社. 1989;155～175

5 李文林等.非线性控制系统的可控标准型问题. 航空学报，1989;10(5),249～258

6 王兴伟.非线性控制系统的可控标准型. 北航硕士论文 1990