第13卷 第9期
1992年9月

航空学报
ACTA AERONAUTICA ET
ASTRONAUTICA SINICA

Vol. 13No. 9
Sep. 1992

基于容限控制策略的结构振动鲁棒控制器设计

陈卫东 顾仲权

（南京航空学院振动研究所，南京，210016）

ROBUST CONTROLLER DESIGN FOR STRUCTURAL VIBRATION BASED ON TOLERANCE CONTROL STRATEGY

Chen Wei-dong, Gu Zhong-quan

(*Vibration Engineering Research Institute, Nanjing Aeronautical Institute, Nanjing*, 210016)

摘 要 本文研究了一种直接满足控制性能要求的结构振动鲁棒控制的常增益反馈优化设计方法，提出了基于容限性能指标的控制设计准则，依据特征结构配置思想构造了反馈控制增益的优化设计程式，并辅以算例给出具体计算中的一些考虑。

关键词 振动控制，鲁棒控制器，优化设计

Abstract The present paper develops a robust design method of structural vibration control based on the tolerant measure of performance. Firstly, a kind of quantitative index of controlled responses called "tolerance control index" is presented which is in contrast to the standard asymptotic idea and owing to the high needs for the quickness and accuracy, A class of structural control system with some bounded uncertainties subject to bounded uncertain loads is considered. Tolerance controlling specifications including the direct and clear response index and representation of robustness range are formulated in terms of neighborhoods in normed function spaces. Secondly, a set of robust design criteria of structural vibration control for the direct satisfaction of performance specifications, based primarily on fixed point and operator norm techniques, is established through the state feedback control, which offers a quantitative design for high-precise structural vibration control problems. Thirdly, according to the eigenstructure assignment idea, an integrated optimum synthesis procedure for the robust controller is given so that the parameters of feedback controller are optimally obtained. Finally, Some considerations on the applicability of such derived design procedure are demonstrated through a calculation example.

Key words vibration control, robust controller, optimum design

1991年11月21日收到，1992年3月21日收到修改稿

结构振动主动控制所涉及的核心问题就是如何设计反馈控制器，大体归述为：一是建立结构动力学系统之控制模式，其中包括给出响应性能指标、控制方程与初步设计准则等；二是建立结构振动控制之综合模式，即提供控制器的结构型式及其参数的确定方法。目前在设计方法的选取上仍以时域反馈控制技术为主，但这方面的发展尚不平衡。相当一部分的工作是基于定性的极点配置设计方法的[1,2]。80 年代中后期，有人提出了定量的极点配置方法[3,4]。这两类方法均是以沟通系统特性与特征频率之间的关系为出发点进行控制综合，结果会造成反馈设计参数的不唯一。作为改进，近年来大量的研究致力于运用特征结构配置思想来设计反馈控制器方面[5,6]。这类方法利用特征空间的内在本质关系，以同时配置系统的特征值和特征向量来确定反馈结构及其参数。但是其设计本身不能直接反映出系统在时域内的直观响应特性。为了完善上述的设计策略，本文提供直接满足控制要求的设计准则，又按特征结构配置方法给出预定的反馈控制器的结构型式及其合适的参数，力求推出一套更趋系统化的反馈控制设计方案，实现对结构振动控制（尤其是柔性结构的响应控制）所提出的快速性、精度性、鲁棒性以及对控制器结构小规模性的要求。

1　鲁棒控制器的初步设计准则

1.1　性能指标与控制响应方程

这里先提供一种有别于普通渐近意义下的性能指标，即为直接依赖于被控响应或状态，从时域内展示控制精度与快速性的直观定量指标形式。它是根据 Banach 空间来表示，以构造下列闭域而形成

$$S(y,\beta_0)=\{y\in L_\infty^l(T)\mid \|y\|\leqslant\beta_0\} \tag{1}$$

式中

$$\|y\|=\max_{1\leqslant i\leqslant l}[\sup_{t\in T}|y_i(t)|] \tag{2}$$

$L_\infty^l(T)$为有界函数空间，且为 Banach 空间；$y\in R^l$ 为被控响应或状态；y_i 为 y 之分量；T 为时间空间；β_0 为具体的精度常数。

由于性能指标的这种闭域形式呈现，故又可称之为响应的容限指标。

振动响应控制的一大目标就是要确保在系统存在内外不确定因素情况下满足响应的预置指标，实质上又为一鲁棒控制问题。出于简化描述，将一些不确定因素归为“不定但有界”之列，并依附于指标形式（1），以相容形式获得所谓的鲁棒性范围表示。

根据上述的设计要求，对应的控制响应方程应针对一类不确定的结构系统模型，用状态方程描述为

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)+Dd(t)+(\Delta A)x(t) \tag{3}$$

式中

$$u(t)=-Kx(t)+v(t) \tag{4}$$

$x(t)\in R^{n_s}$ 为被控状态；$u(t)\in R^{n_c}$ 为控制量；$d(t)\in R^{n_d}$ 与 $v(t)\in R^{n_c}$ 分别表示来自不希望的动力载荷与控制器输出中的有界不确定量；$K\in R^{n_s\times n_c}$ 为增益设计矩阵；A、B、D 为具有适当维的已知的系统矩阵；ΔA 表示 A 的不确定部分，其元素设为“不定但有界”。

组合方程式（3）与式（4），如果矩阵 $R=A-BK$ 的特征值均位于左半复平面内，并设定系统初始状态为零，则可将上列控制响应方程写成算子方程的形式

$$x(t)=L(\Delta A)x(t)+LDd(t)+LBv(t) \tag{5}$$

式中L为有界函数空间到自身的线性映射

$$(Lx)(t)=\int_0^t e^{R(t-\tau)}x(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{6}$$

我们称L为控制算子，问题是要设计它来满足预定的响应要求。

1.2 鲁棒设计准则[4]

考虑由式（3）描述的结构振动控制系统，假定矩阵R的特征值均位于左半复平面内，并设L为满足式（5）的线性设计算子，则对于上述亦以闭域描述的任何不确定扰动量$\Delta A,d$和v，控制系统欲具备如下响应性能

$$S(\beta_0)=\{x\in L_\infty^{n_s}(T)\mid \|Qx\|\leqslant\beta_0\} \tag{7}$$

只要设计矩阵K可以选得使下列不等式成立，即可实现此目标。

$$\|QLQ^{-1}\|\leqslant\frac{\beta_0}{\beta_0\|Q(\Delta A)Q^{-1}\|+\beta_d\|QD\|+\beta_v\|QB\|}=U_b^* \tag{8}$$

式中

$$\|QLQ^{-1}\|=\max_i\Big\{\sum_{j=1}^{n_s}\sum_{k=1}^{n_s/2}\frac{1}{r_k}[(A_{ij}^{(k)}+B_{ij}^{(k)})f(\Psi_{ij}^{(k)})$$

$$+\sqrt{(A_{ij}^{(k)})^2+(B_{ij}^{(k)})^2}\,\mathrm{e}^{\Psi_{ij}^{(k)}+\pi g(\Psi_{ij}^{(k)})}/(\mathrm{e}^{\pi}-1)]\Big\}=U_b \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda_k,\lambda_k^*=-r_k\pm jr_k\\
&A^{(k)}=[A_{ij}^{(k)}]_{n_s\times n_s}=[\alpha_{kR}(R_0+r_{kI})+r_k\alpha_{kI}I]P_k\\
&B^{(k)}=[B_{ij}^{(k)}]_{n_s\times n_s}=[\alpha_{kI}(R_0+r_{kI})-r_k\alpha_{kR}I]P_k\\
&R_0=QRQ^{-1},\ P_k=\prod_{l\neq k}(R_0-\lambda_lI)(R_0-\lambda_l^*I)\\
&\alpha_k=\alpha_{kR}+j\alpha_{kI}=[\mathrm{Re}(\beta_k)+j\mathrm{Im}(\beta_k)]/|\beta_k|^2\\
&\beta_k=4r_k\prod_{l\neq k}(r_l-r_k)(r_k+jr_l)\\
&\Psi^{(k)}=[\Psi_{ij}^{(k)}]_{n_s\times n_s}=\left[\mathrm{tg}^{-1}\frac{A_{ij}^{(k)}}{B_{ij}^{(k)}}\right]_{n_s\times n_s}\\
&f(\Psi_{ij}^{(k)})=\begin{cases}1,\Psi_{ij}^{(k)}\geqslant0\\0,\Psi_{ij}^{(k)}<0\end{cases},\quad g(\Psi_{ij}^{(k)})=\begin{cases}0,\Psi_{ij}^{(k)}\geqslant0\\1,\Psi_{ij}^{(k)}<0\end{cases}
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Q为非奇加权矩阵，用于强调对各个控制状态的不同精度要求；β_d,β_v分别为关于d与v的界常数。

2 鲁棒控制器的优化综合模式

2.1 系统的特征结构配置

令$\Lambda=\{\lambda_{di}\}(i=1,2,\cdots,n_s)$为所希望的闭环特征值，它为不包含开环特征值的一组相异的共轭复根。系统之特征值问题为

$$(\lambda_{di}I-R)V_{Ai}=0,\ i=1,2,\cdots,n_s \tag{11}$$

式中　V_{Ai} 为R的对应特征值 λ_{di} 的特征向量；$I \in R^{n_s \times n_s}$ 为单位矩阵。

变换一种形式表示，可简化成

$$V_{Ai}=L_i Z_i,\ i=1,2,\cdots,n_s \tag{12}$$

式中

$$L_i=(\lambda_{di} I - A)^{-1} B \tag{12a}$$

$$Z_i=-KV_{Ai} \tag{12b}$$

定义 V_{di} 为闭环系统对应于 λ_{di} 的希望特征向量，并假设$\{V_{di}\}_{i=1}^{n_s}$是线性独立的。值得指出的是，当 V_{di} 不位于由 L_i 所展成的空间时，它便不等于 V_{Ai}。因此，求取 V_{Ai} 的过程将通过使 V_{di} 与 V_{Ai} 之间的误差加权范数最小的条件来实现，即给出

$$J_i=\min(V_{di}-V_{Ai})^{\mathrm{T}} R_i (V_{di}-V_{Ai}),\ i=1,2,\cdots\cdots,n_s \tag{13}$$

式中　$R_i \in R^{n_s \times n_s}$ 为半正定加权矩阵。

将式（12）代入此条件，得出它的优化结果

$$Z_i^*=(L_i^{\mathrm{T}} R_i L_.)^{-1} L_i^{\mathrm{T}} R_i V_{di},\ i=1,2,\cdots,n_s \tag{14}$$

又定义矩阵 V_A 与 Z^* 如下

$$V_A=[V_{A1},V_{A2},\cdots,V_{Ai},\cdots,V_{An_s}]$$

$$Z^*=[Z_1^*,Z_2^*,\cdots,Z_i^*,\cdots,Z_{n_s}^*]$$

由此构造式（12b）的一般形式，在设定 V_A 为非奇的情况下，可以得到设计矩阵K的显式表示

$$K=-Z^* V_A^{-1} \tag{15}$$

可见，通过适当的特征结构配置，反馈增益已表成 λ_{di}、V_{di} 的元素及加权阵 R_i 元素的函数。

2.2　反馈增益优化设计

控制优化的要点是，能确保前述的响应性能、力求控制能量尽可能小的消耗以及设法增强一定的鲁棒性。于是提出如下优化问题：

目标函数

$$\min J = T_r[Z^*(V_A^{\mathrm{T}} V_A)^{-1} Z^{*1}]\ (T_r(KK^{\mathrm{T}})) + w\left[\sum_{i=1}^{n_s-1}\sum_{j=i+1}^{n_s} V_{Ai}^H V_{Aj} + \sum_{i=1}^{n_s}(V_{Ai}^H V_{Ai}-1)\right] \tag{16}$$

约束条件

$$U_b \leqslant U_b^* \tag{17}$$

$$(-Z^* V_A^{-1})_{ij}=0\ (K_{ij}=0) \tag{18}$$

式中　$T_r(\cdot)$ 为矩阵的迹；w 为正实的加权因子。优化变量取为用以表示K的系统特征向量的若干元素和一些加权矩阵的元素。

目标函数由三项组成，第一项（亦即对应$\int_0^T u^{\mathrm{T}} u \mathrm{d}t$，其中 u 为控制向量）表示使控制能量最小；后两项试图赋予优化结果一定的鲁棒性。由于最终目的是要获得反馈增益阵K，而当系统存在着模型不准确或未知因素时，矩阵 V_A 的大条件数必然导致由式（15）推出的K的不合适结果，所以在目标函数中立项使矩阵 V_A 近似酉正交，取得其最小的条件数，从而增强优化对模型或系统参数不确定的鲁棒性。

第一个约束条件反映了对振动控制响应的性能要求；第二个约束条件则是反映了对反馈控制的某些限制或是出于缩小控制器结构规模的考虑（如对位控制的情况）。这个条件也可以把前面控制用状态反馈形式表示与实际的输出反馈形式沟通起来。

3 算　　例

本文引用文献[4]中的例子，通过上述设计方案给出了相应的结果，并与文献[4]中的设计进行了比较。系统的各个矩阵与设计加权矩阵给定如下

$$A=\begin{bmatrix}0&0&2&1\\0&0&1&2\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\end{bmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix}1/\sigma&0&0&0\\0&1/\sigma&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

其中：σ 为大于1的正数，Q 的形式强调了对状态中位移的控制要求。

响应的精度常数以及反映鲁棒性要求的各个界常数依次为

$$\beta_0=0.1,\beta_d=1,\beta_p=0.1,\qquad 0\leqslant(\Delta A)_{ij}\leqslant 0.2$$

由这些条件，即可推算出式（8）确定的控制算子范数的不可逾越的界 U_h^*

$$U_h^*=\beta_0/(0.1\beta_0+\beta_d+\beta_p)\sigma=0.0877\sigma$$

取 $\sigma=5$，则 $U_h^*=0.1385$。将其置入约束条件式（17）中。

初始的希望特征结构的选取（亦即优化变量的初值）基于下列这样的考虑：

（1）特征值的分布先保证系统的模态频率不变，仅增强系统的阻尼至最佳阻尼比状态。

（2）特征向量的选择兼顾到线性无关性与强调对位移控制的需要。这里采取的形式为

$$\begin{bmatrix}\times\\\times\\0\\1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}\times\\\times\\0\\\times\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}\times\\\times\\1\\0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}\times\\\times\\\times\\0\end{bmatrix}$$

其中：“×”表示“待定”元素，也即待优化的变量。

（3）根据前述的特征结构配置原理，需涉及一些加权阵的选取问题。建议均取为对角的，且对角元分为两部分：一部分置为零，对应于特征向量中的“待定”元素；另一部分置为非零数，对应于特征向量中的已定元素。这部分非零数的取值不同，最终也会影响设计增益。因此，我们也视其为优化设计变量。

优化设计考虑了控制器结构的约束问题，从缩小规模出发，要求反馈是对位形式的。这由约束条件式（18）来反映。

优化设计的结果列于表1中。表1中还同时列出了文献[4]的数据。

从表中可以看出，尽管本文所提供的设计最终在特征值的变化上幅度较大，但其对应的反馈增益却明显小了许多。这说明了仅从特征值配置设计，而不考虑特征向量的匹配设计可能是更多地消耗能量的。本文的优势就在于综合了合适的特征结构。

表 1　优化设计结果

设计方案	希望之特征值 $\lambda_{di}(i=1,2,3,4)$	反馈增益矩阵 K
本　文	26.75$(-1\pm j)$ 28.2)$(-1\pm j)$	$\begin{bmatrix} 21.59 & 0 & 310.6 & 0 \\ 0 & 36.02 & 0 & 688.7 \end{bmatrix}$
文献[4]	21.36$(-1\pm j)$ 27.60$(-1\pm j)$	$\begin{bmatrix} 43.66 & 0 & 920.5 & 0 \\ 0 & 54.26 & 0 & 1487.2 \end{bmatrix}$

4 结　　论

本文提出了基于特征结构配置的结构振动鲁棒控制的常增益反馈优化设计方法。它不仅提供了直接满足控制性能要求（响应的快速性、精度性以及鲁棒性要求）的设计准则，而且在此基础上构造了反馈增益优化程式，以求得合适的系统特征结构来使控制力尽可能小的消耗及确保优化算法一定鲁棒性的途径而获得完满的设计。此优化综合方案还考虑了控制器结构的约束情况，这使得降低控制器结构的复杂程度与增加其可靠性成为可能。设计中还强调了阻尼增强的概念（即最佳阻尼比），这是为了迎合所给的高性能响应指标的要求，也可认为是为了适应柔性结构的振动控制问题。此外，文中涉及的设计方向完全针对强迫扰动下的控制问题，倘若考虑系统的非零初始状态或瞬态响应的作用，只需对准则主式稍作修改就能适用。文中所给算例提供了一定的可行性依据。

参 考 文 献

1 Leipholz H H, Abdel-Rohman M. Control of Structures. Netherlands: Martinus Nijhoff Publishers, 1986;98

2 Atluri S N, Amos A K. Large Space Structures: Dynamics and Control. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Germany, 1988. 195～212

3 Jayasuriya S. Robust Tracking for A class of Uncertain Linear Systems. International J of Control, 1987, 45(3): 875～892

4 Chen W D, Gu Z Q. A Robust Design Method for Structural Vibration Control. In: Proceedings of International Symposium on Active Control of Sound and Vibration, Tokyo: Japan, ASJ, 1991. 345～350

5 Nayak A P, Youssef H M. Sensitivity Analysis of Generalized Eigenstructure Assignment Using Constant Output Feedback. In: A Collection of Technical Papers, AIAA GNC Conference, Minneapolis, MN, Washington, AIAA, 1988. 414～420

6 Sater G L, Zhang Q. Controller Design By Eigenspace Assignment. In: A Collection of Technical Papers, AIAA Dynamics Specialist Conference, Long Beach: CA, Washington, AIAA, 1990. 19～31