

复合材料桨叶振动特性 分析的一种新方法

王苻卫 蔡慧莲

(江西省景德镇市825信箱 22分箱, 景德镇, 333001)

王寿梅

(北京航空航天大学固体力学所, 北京, 100083)

A NEW APPROACH TO ANALYSING THE VIBRATION CHARACTERISTICS OF COMPOSITE BLADES

Wang Xing-wei, Cai Hui-lian

(Box825-22 Jingde shen, Jiangxi, 333001)

Wang Shou-mei

(Research Center of Solid Mechanics, Beijing University of Aeronautics and
Astronautics, Beijing, 100083)

摘要 本文研究了复合材料桨叶振动特性的分析方法。基于连续介质力学理论, 提出了一个新的等参曲梁单元, 详细推导了梁上任意一点的形状函数, 讨论了复杂翼型剖面的积分技术。算例表明, 本文的计算结果与实验结果非常吻合。

关键词 桨叶, 复合材料, 振动, 曲梁

Abstract The method for analysing the vibration characteristics of composite blades is presented. Based on the continuum mechanics theory, a new isoparametric curve beam element is set up. The shape functions of every point on the beam are derived in detail and the integral techniques of complex aerofoil are discussed. The new element can model the cross section and the plyment of composite. The calculation time will be widely reduced if this element is used to analyse the vibration characteristics and response of blades. Certainly the new element is fit for the analysis of the other thin-walled structures. Numerical examples show that the results are coincident with the test.

Key words blade, composite, vibration, curve beam

目前我国所使用的几种型号的直升机主、尾桨叶均由复合材料制成, 而对其动力特性分析还只是沿用金属桨叶的分析方法。

1991年11月24日收到, 1992年2月20日收到修改稿

文本建立了一个 3-4 变节点等参梁元, 该单元具有曲轴线、变剖面、任意铺层形式等特点, 能模拟复合材料桨叶的弹性耦合及惯性耦合, 考虑桨叶质心、弹性中心偏离等因素。同时, 这一单元也可以用于复合材料桨叶的静、动力响应分析及其它复合材料薄壁结构的静、动力分析。

1 桨叶运动方程

与一般结构所不同的是桨叶在离心力场中工作, 其运动方程为^[1]

$$[M]\ddot{x} + [C_c]\dot{x} + ([K_e] + [K_N]) - [K_G]x = P(t) \quad (1)$$

其中:

$[M]$ 和 $[K]$ ——质量阵和弹性刚度阵;

$[C_c] = \int_V [N]^T [w] [N] dV$ ——哥氏阻尼矩阵;

$[K_N] = \int_V [G]^T [\sigma] [G] dV$ ——几何刚度矩阵;

$[K_G] = \int_V [N]^T [\rho] [N] dV$ ——离心力刚度矩阵。

在作振动特性分析时, 不考虑外载和阻尼, 则自由振动方程为

$$[M]\ddot{x} + ([K_e] + [K_N]) - [K_G]x = 0 \quad (2)$$

2 等参梁元

2.1 等参梁元的几何描述

2.1.1 梁的轴线

通过梁轴上若干个结点, 可用插值曲线逼近它的轴线, 如下式

$$\bar{x}_i = Ln(\xi)x_i^n \quad i=1, 2, 3 \quad (3)$$

其中 x_i 为总体坐标; L 是一维插值形函数; n 为结点号, $n=1, 2, \dots, m$; ξ 是自然坐标。显然, 轴上一点的切线单位向量 j_3 可用上式对 ξ 微分求得。

2.1.2 梁的横剖面

横剖面的方位由一对正交单位向量表示, 在结点处, 它们记为 j_1^n 和 j_2^n 。在梁轴的其他点处可用插值公式 $j_l = Ln(\xi)j_l^n$, $l=1, 2$ 。

若梁轴的初始形状为一平面曲线, 则 j_2 为垂直于该平面的自由向量, 且可由结点求出。即由连接结点 1-2 和 1-m 的两向量求向量积而得。于是 $j_1 = j_2 \times j_3$

我们把 j_1, j_2, j_3 构成的坐标系称为切面坐标系, 并在 j_1-j_2 坐标面内定义横剖面上的任意一点, 且把坐标记为 y_1 和 y_2 。对于复杂翼型剖面可以看成是若干子矩形的组合体, 对于任一子矩形有

$$y_1 = \bar{y}_1 + \frac{1}{2} b \gamma_1 \sin \theta + \frac{1}{2} b \gamma_2 \cos \theta \quad (4)$$

$$y_2 = \bar{y}_2 - \frac{1}{2} b v_1 \cos \theta + \frac{1}{2} b v_2 \sin \theta \quad (5)$$

其中 \bar{y}_1 和 \bar{y}_2 是子矩形中心点的偏心; h 和 b 分别代表矩形的长和宽; θ 是长度方向对 \mathbf{j}_1 轴的倾角; v_1, v_2 是自然坐标。

注意这是切面坐标系里的值, 它们以梁轴为原点, 且分别沿着 \mathbf{j}_1 和 \mathbf{j}_2 的方向。换算到总体坐标系之后, 应为: $\bar{x}_i = \sum_{l=1}^2 y_l \mathbf{j}_{li}$ 其中 \mathbf{j}_{li} 的第二个下标表示向量 \mathbf{j}_l 在 x_i 轴上的分量。

2.1.3 梁上任一点的总体坐标

显然对梁上任一点有

$$x_i = \bar{x}_i + \bar{x}_i = Ln(\xi) \left\{ x_i^n + \sum_{l=1}^2 y_l \mathbf{j}_{li} \right\} \quad (6)$$

写成矩阵形式就是 $x_i = N_n^T d_i^n$

$$N_n^T = Ln(\xi) [1 \ y_1 \ y_2]^T \quad (7)$$

$$d_i^n = [x_i^n \ \mathbf{j}_{1i}^n \ \mathbf{j}_{2i}^n]^T \quad (8)$$

任一点的坐标向量是

$$\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T = N_n^T d^n \quad (9)$$

$$N_n^T = Ln(\xi) [I_3 \ y_1 I_3 \ y_2 I_3]^T, \quad (10)$$

I_3 是 3 阶单位矩阵。

$$d^n = [x^n \ \mathbf{j}_1^n \ \mathbf{j}_2^n]^T \quad (11)$$

\mathbf{j}_l^n 是向量 \mathbf{j}_l 的列阵表示。

2.1.4 局部坐标系

定义梁壁上具有相同 v_1, v_2 的点的轨迹为母线。沿母线切线方向的单位向量是 $\mathbf{K}_1 = [x_i; \dot{x}_i]$, 把横剖面周线的切线单位向量记为 \mathbf{K}'_2 , 则 \mathbf{K}_1 和 \mathbf{K}'_2 构成了梁壁剖面的切平面。其法线 \mathbf{K}_3 可从其向量积获得, 即 $\mathbf{K}_3 = \mathbf{K}_1 \times \mathbf{K}'_2$

注意 \mathbf{K}_1 与 \mathbf{K}'_2 可能不垂直, 为得到正交坐标系可用 $\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_3 \times \mathbf{K}_1$ 取代 \mathbf{K}'_2 。

2.2 位移形状函数

2.2.1 用切面向量表示的形函数

把变形前、后梁上一点的坐标记为

$$x_i(t) = N_n^T d_i^n(t) \quad (12)$$

$$x_i(t + \Delta t) = N_n^T d_i^n(t + \Delta t) \quad (13)$$

由于剖面不变形, N_n^T 与时间无关。上两式相减得到位移

$$u_i = x_i(t + \Delta t) - x_i(t) = N_n^T \Delta d_i^n \quad (14)$$

$$\Delta d_i^n = [\Delta x_i^n \ \Delta \mathbf{j}_{1i}^n \ \Delta \mathbf{j}_{2i}^n]^T = [\Delta u_i^n \ \Delta \mathbf{j}_{1i}^n \ \Delta \mathbf{j}_{2i}^n]^T \quad (15)$$

$$\Delta u_i^n = x_i^n(t + \Delta t) - x_i^n(t) \quad (16)$$

$$\Delta \mathbf{j}_{li}^n = \mathbf{j}_{li}^n(t + \Delta t) - \mathbf{j}_{li}^n(t), \quad l = 1, 2 \quad (17)$$

与材料点的坐标表达式类似, 材料点位移的 3 个坐标分量的向量可表示成

$$\Delta u = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = N'_n{}^T \Delta d^n \tag{18}$$

用切面向量表示的形函数是

$$N'_n = Ln(\xi) [1 \ y_1 \ y_2]^T \tag{19}$$

$$\begin{aligned} \Delta d^n &= [\Delta u_1^n \ \Delta u_2^n \ \Delta u_3^n \ \Delta j_{11}^n \ \Delta j_{12}^n \ \Delta j_{13}^n \ \Delta j_{21}^n \ \Delta j_{22}^n \ \Delta j_{23}^n]^T \\ &= [\Delta u^n \ \Delta j_1^n \ \Delta j_2^n]^T \end{aligned} \tag{20}$$

注意这向量有 9 个分量，其中后 6 个是线性相关的，它们可以用横剖面的 3 个旋转角来表示。

2.2.2 用结点位移向量表示的形函数

在旋转不大的情况下，我们有 $\Delta j_1^n = \Delta \theta^n \times j_1^n(t)$ 其中 θ^n 是横剖面对总体轴的转动向量，其矩阵表示式为

$$\Delta \theta^n = [\Delta \theta_1^n \ \Delta \theta_2^n \ \Delta \theta_3^n] \tag{21}$$

当转动不大时，可认为它与时间无关，而向量 $j_1^n(t)$ 末端的移动量就是 Δj_1^n 。矩阵表示为

$$\begin{Bmatrix} \Delta j_{11}^n \\ \Delta j_{12}^n \\ \Delta j_{13}^n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & j_{13}^n(t) & -j_{12}^n(t) \\ -j_{13}^n(t) & 0 & j_{11}^n(t) \\ j_{12}^n(t) & -j_{11}^n(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_1^n \\ \Delta \theta_2^n \\ \Delta \theta_3^n \end{Bmatrix} \tag{22}$$

$$\text{或简记为 } \Delta j_1^n = j_1^n(t) \Delta \theta^n \tag{23}$$

可见

$$\begin{aligned} \Delta d^n &= [\Delta u^n \ \Delta j_1^n \ \Delta j_2^n]^T \\ &= \begin{bmatrix} I_3 & 0_3 \\ 0_3 & j_1^n(t) \\ 0_3 & j_2^n(t) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u^n \\ \Delta \theta^n \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{24}$$

$$\text{或} \quad \Delta d^n = T^n \Delta \hat{u}^n \tag{25}$$

所以，与结点位移向量相关的位移形函数和位移表达式是

$$\Delta u = N_n \Delta \hat{u}^n \tag{26}$$

$$N_n = N'_n T^n = Ln(\xi) [I_3 y_1 j_1^n(t) + y_2 j_2^n(t)] \tag{27}$$

2.3 元素特性的积分

元素特性，如刚阵、质量阵及各种等效结点力等，可以表示为

$$H = \int_V F(\xi, y_1, y_2) dV = \int_{-1}^1 \int F(\xi, y_1, y_2) dA |J_\xi| d\xi \tag{28}$$

其中 J_ξ 是与自然坐标 ξ 相关的 Jacobi 矩阵。

在横剖面上的积分与剖面具体形状有关。翼型剖面可以看成是由许多小矩形所构成，因而沿剖面的元素特性积分可表示成许多矩形域上的集合。这种观念也可以推广到层合材料的情形，所以

$$H = \sum_r \sum_c \int_{-1}^1 F(\xi, y_1, y_2) ds |J_\xi| d\xi \tag{29}$$

式中 r 和 c 分别表示对所有小矩形和每层材料求和； ds 是一个矩形积分子域的微元，对此矩形可使用高斯积分法。设积分点 P 的自然坐标是 η_1, η_2 ，则

$$H = \sum_r \sum_c \left[\frac{1}{4} b(\xi) h(\xi) \sum_{\xi, \eta_1, \eta_2} W_p |J_{\xi}^{-1}| F(\xi, y_1, y_2)_p \right] \quad (30)$$

$$y_1 = y_1(\xi, \eta_1, \eta_2) \quad (31)$$

$$y_2 = y_2(\xi, \eta_1, \eta_2) \quad (32)$$

3 算 例

3.1 复合材料桨叶线性静力分析

桨叶为薄壁矩形截面, 长 762 mm, 宽 24.2 mm, 高 13.462 mm, 壁厚 0.762 mm, 材料特性: $E_L = 1.42 \times 10^5$ MPa; $E_T = 9.8 \times 10^3$ MPa; $G_{LT} = 6.14 \times 10^3$ MPa; $\nu = 0.42$; 单层厚度为 0.127 mm。铺层形式见表 1。

表 1 铺层形式

梁 号	铺 层			
1	(0/90) ₃	(0/90) ₂	(0/90) ₁	(0/90) ₂
2	(45) ₆	(45) ₆	(45/-45) ₁	(45/-45) ₃
3	(15) ₆	(-15) ₆	(15) ₆	(-15) ₆

边界条件为一端固支, 一端自由。载荷如表 2。

表 2 载荷条件

梁 号	载荷工况 1	载荷工况 2
1	端部受 4.45N 集中力	---
2	同 1	---
3	---	端部受 113N·mm 扭矩

各梁均分为 2 个等参梁元, 横截面用 4 个子矩形模拟。计算结果与实验^[2]结果非常吻合, 如图 1~图 3 所示。

3.2 复合材料桨叶振频、振型分析

桨叶为薄板悬臂梁, 长 560 mm, 宽 30 mm。材料特性: $E_L = 142.0$ GPa; $E_T = 9.80$ GPa; $G_{LT} = 6.0$ GPa; $\gamma_{LT} = 0.3$; $\rho = 1580$ kg/m³; $t_{ply} = 0.134$ mm。铺层形式: (1) (0/90)_{3r}; (2) (15/0)_r; (3) (20/-70/-70/20)_{2r}。边界条件为一端固支, 一端自由。

分为 2 个等参梁元, 7 个节点, 横截面用 2 个子矩形模拟; 利用子空间迭代法进行分析, 计算结果与实验^[3]结果比较吻合, 频率结果如表 3 所示。

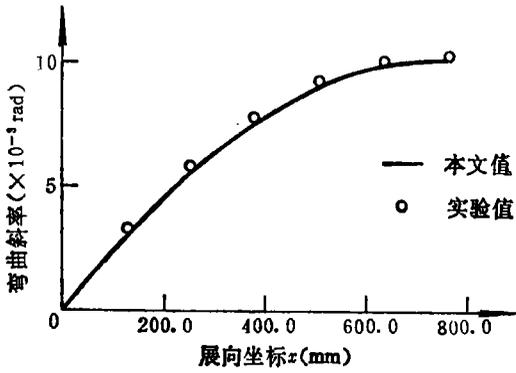


图 1 1 号梁端部受 4.45 N 力时的弯曲斜率

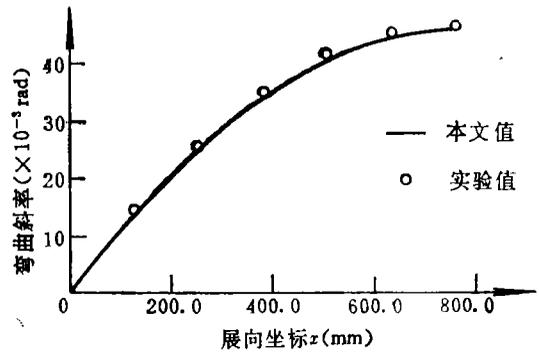


图 2 2 号梁端部受 4.45 N 力时的弯曲斜率

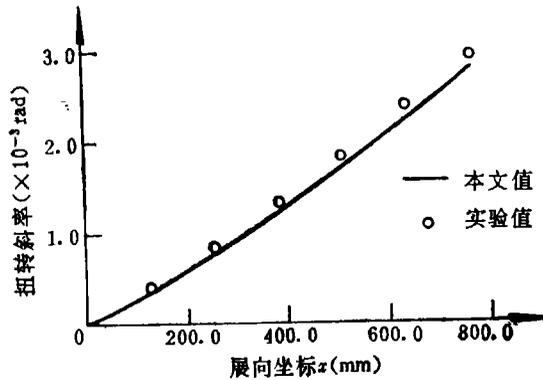


图 3 3 号梁端部受 113 N·mm 扭矩时的扭转斜率

表 3 前 3 阶频率的计算值和实验值⁽³⁾

单位: Hz

铺层种类	1 阶频率		2 阶频率		3 阶频率	
	本文值	实验值	本文值	实验值	本文值	实验值
1	5.8	5.7	36	34	99	98
2	1.3	1.4	8	8	23	20
3	5.8	5.8	36	36	103	103

参 考 文 献

- 1 王寿梅, 王苻卫, 蔡慧莲. 复合材料桨叶线性及非线性静、动力分析方法研究. 中国直升机设计研究所技术报告, 25 B₄-91-2015(2), 1991.
- 2 Ramesh Chandra Alan D, Stemple, Inderjit Chopra. Thin-Walled Composite Beams Under Bending, Jorsional, and Extensional loads. Journal of Aircraft, July 1990, 27(7): 619~625
- 3 Pierre Minguet, John Dugundji. Experiments and Analysis for Composite Blades Under large Deflections part II: Dynamic Behavior. AIAA Journal, September 1990, 28(9): 1580~1588