

# 复合材料层板的瞬态动响应分析

丁锡洪 周 丽 顾慧芝

(南京航空学院振动工程研究所, 南京, 210016)

## TRANSIENT RESPONSE OF LAYERED COMPOSITE PLATES

Ding Xi-hong, Zhou Li, Gu Hui-zhi

(Vibration Engineering Research Institute, Nanjing Aeronautical  
Institute, Nanjing, 210016)

**摘 要** 本文用混合杂交单元分析复合材料层板的瞬态动力响应。针对纤维增强复合材料层板的特点, 综合考虑精确性和经济性, 对于较薄的板采用 Mindlin 直线假设的位移模式; 对于较厚的层板提出分段折线假设的位移模式, 并讨论了其适用范围。对动响应分析采用振型叠加法和 Wilson- $\theta$  积分法确定层板对突加载荷的动挠度和动应力。最后, 通过各种数值算例考查本文方法的有效性。

**关键词** 纤维增强复合材料层板, 混合杂交单元, 瞬态动力响应, 振型叠加法

**Abstract** In this paper a mixed hybrid-stress element is applied to analyzing transient response of layered composite plates. In accordance with the characteristics of layered fiber-reinforced composite plates and for the sake of synthetic consideration of their accuracy and economy, a Mindlin straight line assumption is used to get the displacement patterns for the thin plates and a broken line assumption used for thick plates. Their suitability is also discussed. A mode summation method and Wilson-integration are used for dynamic response analysis to determine the dynamic deflections and stress states of composite laminates under sudden loading. Finally, several numerical examples and experiments verify that the method is very effective.

**Key words** fiber-reinforced composite laminates, mixed hybrid-stress element, transient response, mode summation method

## 1 基于 Hellinger-Reissner 变分原理的应力杂交法的有限元列式

### 1.1 应力杂交单元的刚度矩阵

将层状非均匀各向异性弹性体占有域离散成  $M$  个单元, 将每个单元按层分为  $N$  个子域  $\Omega_m^{(k)}$  ( $m=1, 2, \dots, M; k=1, 2, \dots, N$ )。H-R 泛函的矩阵形式可表示为

1991年11月24日收到, 1992年2月20日收到修改稿  
航空科学基金、高等学校科学技术基金资助项目

$$\Pi_{\text{HR}} = \sum_m \sum_k \left[ \int_{\Omega_m^{(k)}} (\{\sigma\}^T \{\hat{\varepsilon}\} - \frac{1}{2} \{\sigma\}^T [S] \{\sigma\})_m^{(k)} d\Omega - \int_{s_{\sigma_m^{(k)}}} \{u\}^T \{\bar{T}\} ds \right] \quad (1)$$

在单元内, 假设位移场为

$$\{u\}^{(k)} = [N]^{(k)} \{q\} \quad (2)$$

在每层内, 应力场独立假设为

$$\{\sigma\}^{(k)} = [P]^{(k)} \{\beta\}^{(k)} \quad (3)$$

式中  $[N]^{(k)}$  为位移插值函数矩阵;  $\{q\}$  为单元节点位移向量;  $[P]^{(k)}$  为应力插值函数矩阵;  $\{\beta\}^{(k)}$  为应力参数向量;  $[S]^{(k)}$  为弹性常数矩阵;  $\{\bar{T}\}$  为已知边界力。

设  $\{\beta\}$  为单元  $m$  所有层总应力参数向量, 各层的  $\{\beta\}^{(k)}$  与  $\{\beta\}$  有如下变换关系

$$\{\beta\}^{(k)} = [C]^{(k)} \{\beta\} \quad (4)$$

式中  $[C]^{(k)}$  为应力参数组装矩阵, 它使得层间应力  $\tau_{yz}$ 、 $\tau_{xz}$ 、 $\sigma_z$  保持连续并且在层板上、下表面满足力边界条件。

于是式 (1) 泛函可表示为

$$\Pi_{\text{HR}} = \sum_m (\{\beta\}^T [G] \{q\} - \frac{1}{2} \{\beta\}^T [H] \{\beta\} - \{q\}^T \{Q\})_m \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{式中 } [G] &= \sum_k [C]^{(k)T} [G]^{(k)}; & [G]^{(k)} &= \int_{\Omega_m^{(k)}} ([P]^T [\partial N])_m^{(k)} d\Omega; \\ [H] &= \sum_k [C]^{(k)T} [H]^{(k)} [C]^{(k)}; & [H]^{(k)} &= \int_{\Omega_m^{(k)}} ([P]^T [S] [P])_m^{(k)} d\Omega; \\ \{Q\} &= \sum_k \{Q\}^{(k)}; & \{Q\}^{(k)} &= \int_{s_{\sigma_m^{(k)}}} ([N]^T \{\bar{T}\})_m^{(k)} ds. \end{aligned}$$

由泛函的驻值条件, 得到单元的平衡方程

$$[k] \{q\} = \{Q\} \quad (6)$$

式中  $[k]$  为应力杂交单元刚度矩阵

$$[k] = [G]^T [H] [G] \quad (7)$$

## 1.2 位移模式的选择

本文采用两种位移模式: 对于较薄板 (宽厚比  $a/h > 10$ ) 采用 Mindlin 直线假设, 它考虑了横向剪切变形的平均效应; 对较厚板提出分段折线假设, 将层板沿厚度分若干段, 既满足了一定的精度要求, 且大大减少了计算量。

(1) Mindlin 直线假设的位移模式为

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\theta_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\theta_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned}$$

式中:  $u_0$ 、 $v_0$  为中面沿  $x$ 、 $y$  的位移;  $w$  为横向挠度;  $\theta_x$ 、 $\theta_y$  为转角; 位移参量  $\{\delta\}^T = [u_0 \ v_0 \ w \ \theta_x \ \theta_y]$ 。

(2) 分段折线假设, 将层板沿厚度分成  $I$  段, 位移参量为

$$\{\delta\}^T = [u_0, v_0, w, \theta_{x1}, \theta_{y1}, \theta_{x2}, \theta_{y2}, \dots, \theta_{xI}, \theta_{yI}]$$

式中:  $u_0, v_0$  为第一段中面沿  $x, y$  的位移;  $\theta_{yj}, \theta_{xj}$  为第  $j$  段的转角。

### 1.3 应力模式的假设

Mindlin 位移模型应用到很薄的板壳时将发生“闭锁”现象。而应力杂交模型用适当选择应力参数  $\beta$  构造不包含多余零能模式的单元可以克服这一缺点。

本文根据文献[1]所述建立应力场的原则, 并考虑应力参数之间的匹配, 选取有 63 个应力参数的应力场<sup>[2]</sup>, 满足平衡条件, 且强制应力  $\tau_{yz}, \tau_{xz}, \sigma_z$  在层间界面处保持连续性及在层板表面满足力边界条件。已通过各种算例表明这种应力模式能较准确模拟横向应力的分布规律。单元的总应力参数向量为

$$\{\beta\}^T = [\beta_{14}^{(1)}, \beta_{16}^{(1)}, \dots, \beta_{63}^{(1)}, \beta_{14}^{(2)}, \beta_{16}^{(2)}, \dots, \beta_{63}^{(2)}, \dots, \beta_{14}^{(N)}, \beta_{16}^{(N)}, \dots, \beta_{63}^{(N)}]$$

## 2 动力响应分析

应用应力杂交单元求得质量矩阵  $[M]$  和刚度矩阵  $[K]$ , 可确定层板前  $n$  阶固有频率  $\omega_j$  和相应的正则化振型  $\{\varphi_j\}$ 。利用正则化振型的正交性, 有

$$[\phi]^T [M] [\phi] = [I], \quad [\phi]^T [K] [\phi] = [\omega_j]$$

对于小阻尼情况, 常假定阻尼矩阵  $[C]$  可用正则化振型解耦, 得

$$[\phi]^T [C] [\phi] = [2\omega_j \xi_j]$$

式中  $[\phi] = [\{\varphi_1\} \{\varphi_2\} \dots \{\varphi_n\}]$ ;  $\xi_j$  为第  $j$  阶模态阻尼比, 可用实验确定。借助坐标变换, 结构动响应分析的方程可变为  $n$  个独立的 2 阶常微分方程

$$\eta_j(t) + 2\omega_j \xi_j \dot{\eta}_j(t) + \omega_j^2 \eta_j(t) = f_j \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (8)$$

而  $f_j = \{\varphi_j\}^T \{F\}$ ,  $\{F\}$  为节点载荷向量。

方程 (8) 中的每一个方程式相当于一个单自由度系统的振动方程, 可方便地求解。本文采用 Wilson- $\theta$  数值积分法求解。由于高阶的特征解对系统的响应影响很小, 故只要对前几阶特征解的响应叠加就能很好的近似系统的真实响应, 用振型叠加法分析结构的动响应非常省时。

## 3 算例及讨论

取板边长  $a=b=25$  cm, 板厚  $h=5$  cm, 质量密度  $\rho=8 \times 10^{-6}$  N·s<sup>2</sup>/cm<sup>4</sup>, 弹性模量  $E_2=2.1 \times 10^6$  kPa, 泊松比  $\nu=0.25$ 。正交异性板和复合材料层板取  $E_1=25E_2, G_{12}=G_{13}=G_{23}=0.5E_2$ 。

载荷为阶跃函数, 载荷 I 在板上表面均匀分布, 载荷 II 为正弦分布, 如图 1 所示。

算例 1 各向同性四边简支板在载荷 I 下的中心挠度  $w$  和正应力  $\sigma_x$ 。结果示于图 2。从图 2 的曲线看到, 当只取第一阶模态进行响应计算, 就已达到一定的精度, 取 3, 5, 10 阶的计算结果差别很小, 尤其是挠度。高阶模态对应力的贡献比挠度大。综合考虑, 以下算例均取前 5 阶模态叠加。

算例 2 正交异性四边简支板在载荷 I 作用下的中心挠度和正应力。结果示于图 3。与 Reddy 的有限元解<sup>[3]</sup>进行比较, 两者结果相当一致。

算例 3 正交铺层 (0°/90°) 复合材料层板在载荷 II 作用下的中心挠度和正应力。结果示于图 4。用 Reddy 的封闭形式解<sup>[3]</sup>来检验本文结果, 两者极其吻合。

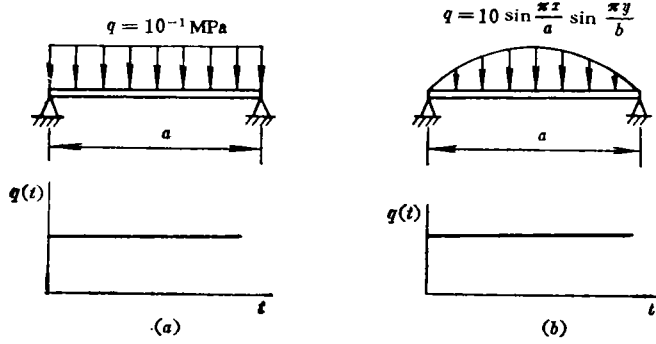


图 1 载荷分布(a)载荷 I, (b)载荷 II

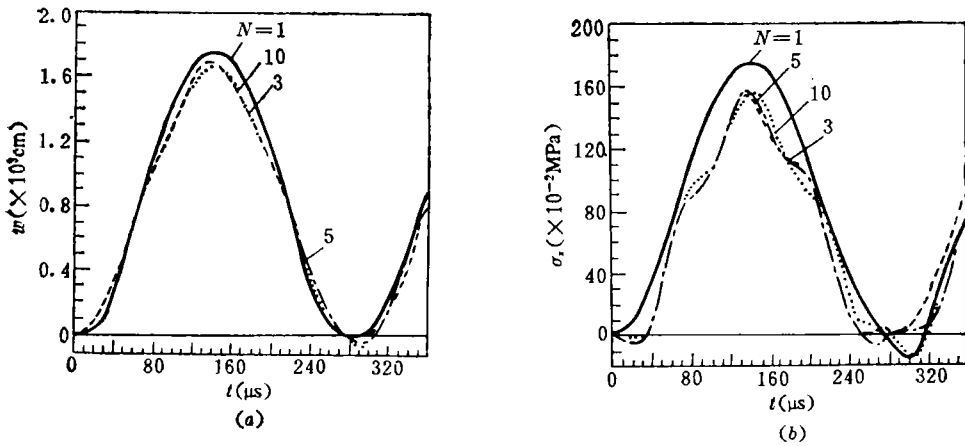


图 2

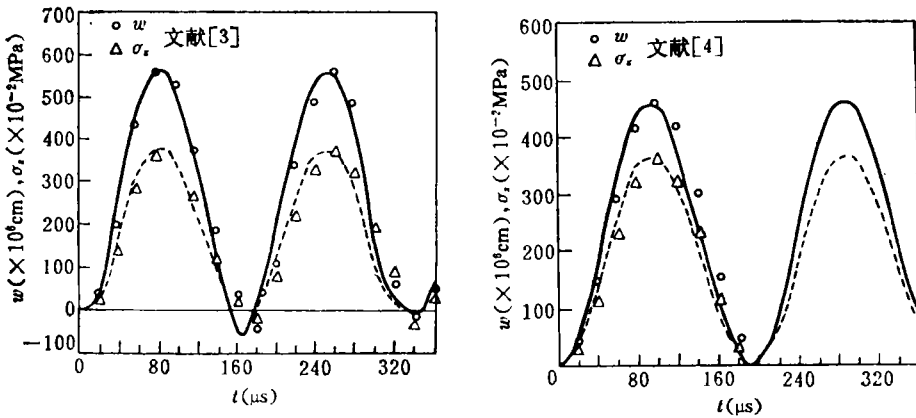


图 3

图 4

算例 4 正交铺层 ( $0^\circ/90^\circ$ ) 复合材料层板在载荷 I 作用下的中心挠度、正应力和横向剪应力。计算了 3 种宽厚比情况,  $a/h=5, 10, 100$ , 均取  $h=5$  cm。该算例比较了用直线假设 I 和折线假设 II 两种位移模式的计算结果, 以确定各自的适用范围。计算结果示于图 5~图 7。

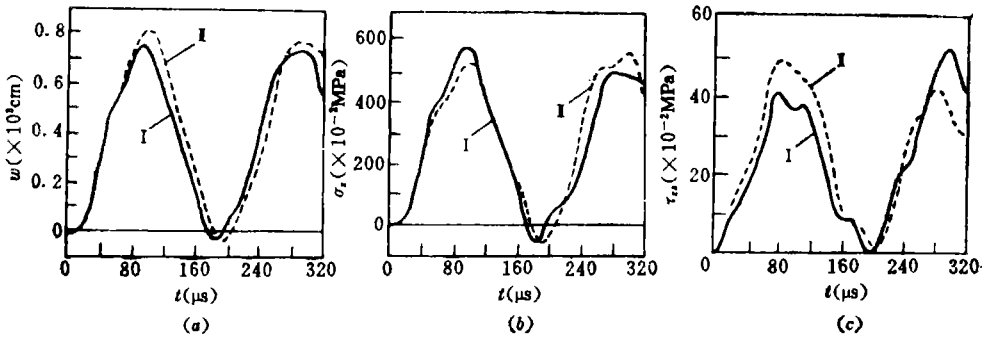


图 5  $a/h = 5$

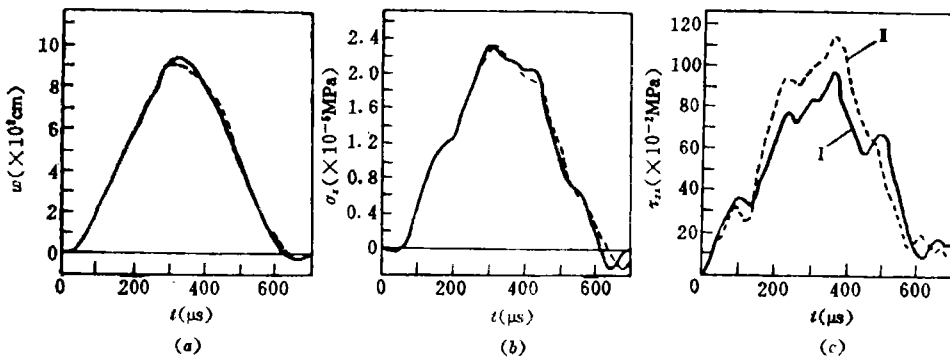


图 6  $a/h = 10$

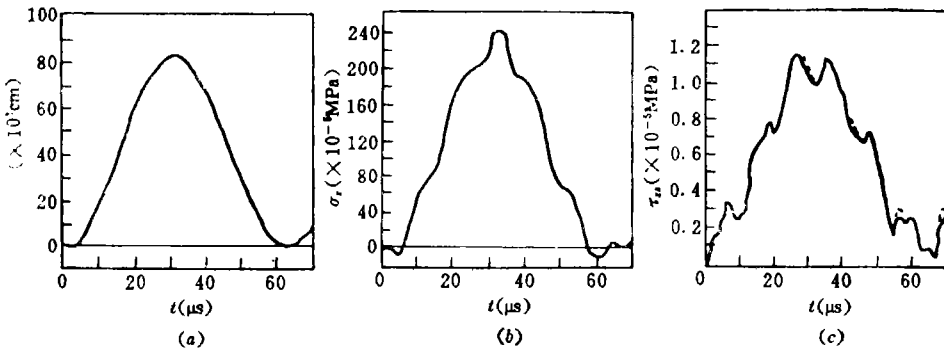


图 7  $a/h = 100$

参 考 文 献

- 1 Spilker R L, Munir N I. The Hybrid-Stress Model for Thin Plates. *Int J Num Meth Engng*, 1980, 15: 1239~1260
- 2 周 丽, 丁锡洪. 一种适合于复合材料层板的杂交应力单元. 南京, 南京航空学院技术报告 NHJB-90-6291, 1990.
- 3 Reddy J N. Dynamic (Transient) Analysis of Layered Anisotropic Composite Material Plates. *Int J Num Meth Engng*, 1983, 19: 237~255
- 4 Reddy J N. On the Solution to Forced Motion of Rectangular Composite Plates. *J App Meth*, 1982, 49: 403~418