

## 二元机翼带外挂系统极限环颤振次谐响应分析

杨 翊 仁

(西南交通大学应用力学研究所, 成都, 610031)

赵 令 诚

(西北工业大学五系, 西安, 710072)

### SUBHARMONIC RESPONSE OF THE LIMIT CYCLE FLUTTER OF WING-STORE SYSTEM

Yang Yi-ren

(*Institute of Applied Mechanics, Southwestern Jiaotong University, Chengdu, 610031*)

Zhao Ling-cheng

(*Fifth Department, Northwestern Polytechnical University, Xi'an, 710072*)

**摘 要** 借助于非对称分段线性振子的次谐分叉条件, 本文首次讨论了二元机翼带外挂系统处于稳定极限环颤振情况下, 外挂的次谐响应。算例表明, 单自由度非线性振子的分叉条件能够预示非线性颤振系统的运动规律。

**关键词** 分段线性, 极限环颤振, 次谐分叉

**Abstract** The Method of equivalent linearization for nonlinear flutter is used to determine the region of the stable limit cycle flutter of wing-store system. Under the condition of stable limit cycle flutter, the mathematical model is further reduced to a single degree of freedom system. By means of the subharmonic bifurcation condition of single degree of freedom oscillator, for the first time, an engineering analysis method, which can predict the region of the subharmonic response of the limit cycle flutter of wing-store system, is developed in the paper. The example shows that the bifurcation condition of single degree of freedom nonlinear oscillator can indicate the motional behavior of nonlinear flutter system.

**Key words** piecewise linear, limit cycle flutter, subharmonic bifurcation

近年来, 许多文献<sup>[1~3]</sup>对单自由度分段线性振子的稳定性进行了深入的研究。对于比单自由度更复杂的结构系统, 若分析其运动的次谐分叉问题, 一般来说是相当困难的。本

1991年1月25日收到, 1991年8月18日收到修改稿



采用定常气动力,且不计外挂物上的气动力,并在  $h$ 、 $\alpha$  自由度上引入阻尼  $C$ ,则系统的颤振运动方程为

$$(\mu_h + \mu_\beta) \ddot{h} + (\mu_\alpha x_\alpha + \mu_\beta x_\beta - \mu_\beta \bar{l}) \ddot{\alpha} + \mu_\beta x_\beta \ddot{\beta} + C \dot{h} + \mu_h \omega_h^2 h = -2 \left(\frac{V}{b}\right)^2 \alpha \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & (\mu_\alpha x_\alpha + \mu_\beta x_\beta - \mu_\beta \bar{l}) \ddot{h} + (\mu_\alpha r_\alpha^2 + \mu_\beta r_\beta^2 + \mu_\beta \bar{l}^2 - 2\mu_\beta x_\beta \bar{l}) \ddot{\alpha} \\ & + (\mu_\beta r_\beta^2 - \mu_\beta x_\beta \bar{l}) \ddot{\beta} + C \dot{\alpha} + \mu_\alpha r_\alpha^2 \omega_\alpha^2 \alpha = (1 + 2\alpha) \left(\frac{V}{b}\right)^2 \alpha \end{aligned} \quad (5)$$

$$\mu_\beta x_\beta \ddot{h} + (\mu_\beta r_\beta^2 - \mu_\beta x_\beta \bar{l}) \ddot{\alpha} + \mu_\beta r_\beta^2 \ddot{\beta} + \mu_\beta r_\beta^2 G(\beta) = 0 \quad (6)$$

其中  $G(\beta) = \begin{cases} \omega_1^2 \beta & \beta \leq \beta_0 \\ (\tilde{\omega} \omega_1)^2 \beta + \omega_1^2 (1 - \tilde{\omega}^2) \beta_0 & \beta > \beta_0 \end{cases}$

$$\tilde{\omega}^2 = \frac{K_2}{K_1}; \quad \omega_1^2 = \frac{K_1}{\mu_\beta r_\beta^2};$$

$\mu_h$ 、 $\mu_\alpha$ 、 $\mu_\beta$ —质量;  $\omega_h$ 、 $\omega_\alpha$ —分支圆频率;  $r_\alpha$ 、 $r_\beta$ —回转半径; 其余参数见图 1。

将 (6) 式中含有  $\ddot{h}$ 、 $\ddot{\alpha}$  的项移到右端,有

$$\mu_\beta r_\beta^2 \ddot{\beta} + \mu_\beta r_\beta^2 G(\beta) = -\mu_\beta x_\beta \ddot{h} - (\mu_\beta r_\beta^2 - \mu_\beta x_\beta \bar{l}) \ddot{\alpha} \quad (7)$$

当系统处于稳定极限环颤振时,有

$$\left. \begin{aligned} \ddot{h} &= -\omega_F^2 |h| \cos(\omega_F t) \\ \ddot{\alpha} &= -\omega_F^2 |\alpha| \cos(\omega_F t) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

其中  $|h|$ 、 $|\alpha|$ — $h$ 、 $\alpha$  的幅值;  $\omega_F$ —极限环颤振频率。

将 (8) 式代入 (7) 式,并作代换  $\tau = \omega_1 t$ , 得

$$\frac{d^2 \beta}{d\tau^2} + \tilde{G}(\beta) = A \cos(\omega \tau) \quad (9)$$

其中  $\omega = \omega_F / \omega_1$  (10)

$$\tilde{G}(\beta) = \begin{cases} \beta & \beta \leq \beta_0 \\ \tilde{\omega}^2 \beta + (1 - \tilde{\omega}^2) \beta_0 & \beta > \beta_0 \end{cases}$$

$$A = \left(\frac{\omega_F}{\omega_1}\right)^2 \frac{x_\beta |h| + (r_\beta^2 - x_\beta \bar{l}) |\alpha|}{r_\beta^2}$$

(9) 式即将外挂分支运动方程化为与 (1) 式 ( $\alpha=0$ ) 时一样的形式,为直接引用分叉条件 (3) 式提供了依据。

### 3 机翼带外挂系统的当量线性化分析

(4) 式~(6)式中,各参数取值如表 1 所示。

按文献[4]中方法,系统的颤振边界曲线如图 2 所示;颤振频率变化曲线如图 3 所示。根据谐波平衡法<sup>[4]</sup>分析知,稳定极限环颤振只能在外挂当量线性化频率  $\omega_{eq} < \omega_s$  及  $\omega_{eq} > \omega_L$  区域内存在,如图 2 中下半部所示。对于非对称分段线性型非线性,其当量固有频率满足下式<sup>[3]</sup>

$$\omega_1 < \omega_{eq} < \frac{2\tilde{\omega}}{1+\tilde{\omega}} \omega_1 \quad (11)$$

在确定了颤振边界曲线后,由图 2 及图 3 可以估计出在某一风速  $V_F$  下的颤振频率  $\omega_F$ 。

表 1

$\mu_h$	$\mu_a$	$\mu_\beta$	$\omega_h$	$\omega_a$	$x_a$	$x_\beta$	$r_a^2$	$r_\beta^2$	$\bar{l}$	$a$	$b$	$c$	$\beta_0$	$\omega_1$	$\tilde{\omega}$
12.8	12.8	4	95	113.1	0.12	0.1	0.19	0.25	0.2	-0.34	0.118	22.6	0.05	可变	可变

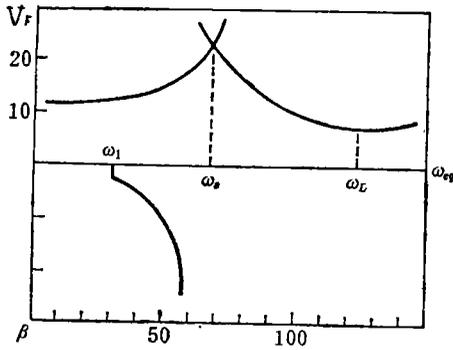


图 2 颤振边界曲线

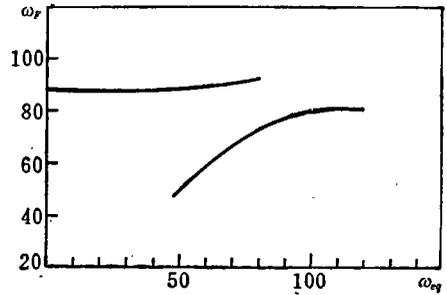


图 3 颤振频率曲线

#### 4 外挂运动的分叉分析

外挂非线性环节的可调参数有 3 个，即  $\beta_0$ 、 $\omega_1$  及  $\tilde{\omega}$ 。这里，取定  $\beta_0$  为一个小量，则余下的参数只有  $\omega_1$  和  $\tilde{\omega}$  可调。结合 (10) 式，要得到满足 (3) 式的  $\omega$ 、 $\tilde{\omega}$  值，可通过调整  $\omega_1$  值实现。当然， $\omega_1$  的取值应使  $\omega_{eq}$  落入稳定极限环存在区域。下面将考虑  $\omega_1$  改变时，外挂分支的运动规律，并用变步长四阶龙格-库塔法积分颤振方程进行验证（图 6 中各相图均为积分结果）。为此，先作出外挂单自由度在  $(\omega, \tilde{\omega})$  平面内的分叉图。由 (3) 式可算出两条分叉曲线，如图 4 所示。阴影区域为周期 1 轨道不稳定区。

对于一个给定的气动弹性系统，在某一风速下，用谐波平衡法<sup>[4]</sup>估算出一个颤振频率。若取定  $\tilde{\omega}$ ，就可以对  $V_F$  与  $\omega_1$  的变化作外挂分支运动的讨论。

结合图 2~图 4 及 (10) 式，可将  $(V_F, \omega_1)$  平面定性地划分为如图 5 所示几个区域（取  $\tilde{\omega}=3$  为例，见图 5 中实线所示区域）：

$A_1$  区：系统运动收敛。取域内一点作数值积分，得外挂分支的典型相图如图 6 (a) 所示。

$A_2$  区：系统为稳定极限环颤振，外挂分支为稳定的周期 1 运动。同样，域内点的典型数值积分相图如图 6 (b) 所示。

$A_3$  区：系统为稳定极限环颤振。但外挂分支为周期 1 轨道不稳定，次谐响应出现。取域内点  $\omega_1=41$ ， $V_F=13.5$  作数值积分，外挂分支为稳定的周期 2 运动，其相图见图 6 (c)。当  $\omega_1=40$ ， $V_F=13.5$  时，外挂运动再次发生分叉，周期 2 轨道不稳定，周期 4 轨道稳定，见图 6 (d)。

$A_4$  区：系统为发散运动。外挂分支的典型相图见图 6 (e)。

#### 5 结语

对于本文所用模型的颤振边界曲线，按谐波平衡分析法知，稳定极限环颤振在外挂当

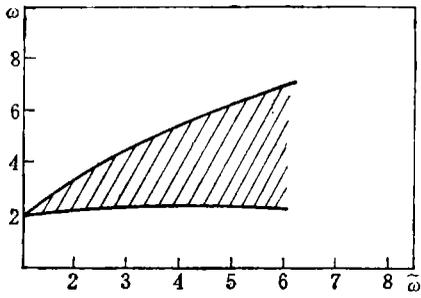


图 4  $(\tilde{\omega}, \omega)$  平面分叉图

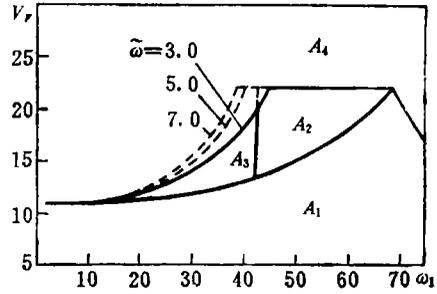


图 5 运动定性区域划分图

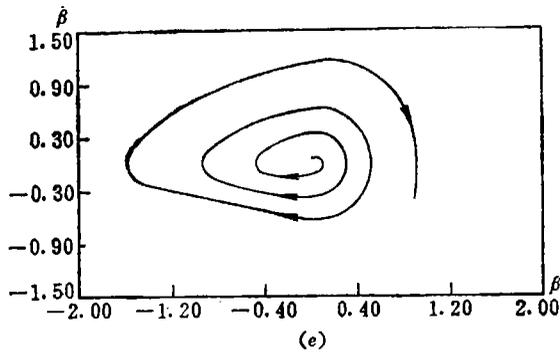
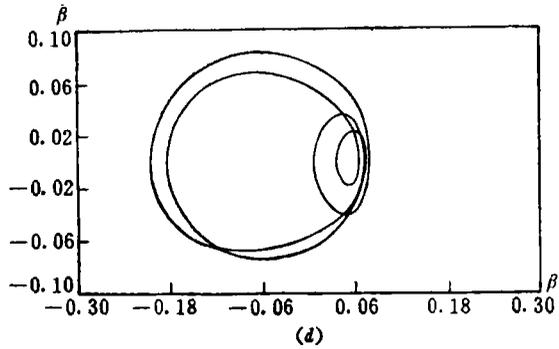
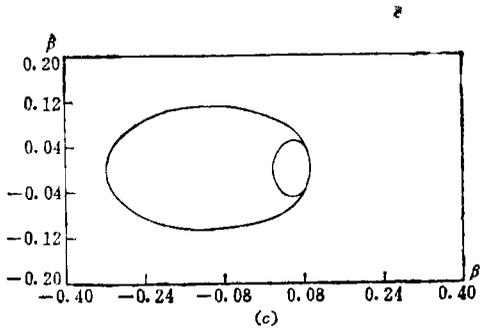
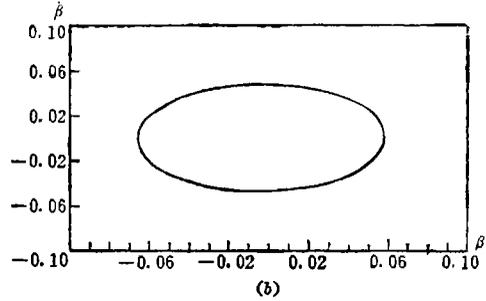
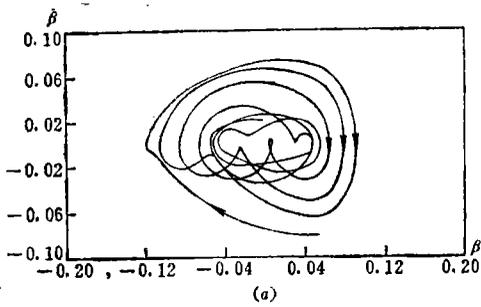


图 6 各区域相图。参数取值 (a)  $V_F = 6, \omega_1 = 45$ ; (b)  $V_F = 14, \omega_1 = 45$ ; (c)  $V_F = 13.5, \omega_1 = 41$ ;  
(d)  $V_F = 13.5, \omega_1 = 40$ ; (e)  $V_F = 25, \omega_1 = 50$ 。

量频率  $\omega_{eq} < \omega_s$  及  $\omega_{eq} > \omega_L$  区域内存在 (参见图 2)。显然,  $\omega_{eq}$  的最小值为  $\omega_1$ 。当  $\omega_1 > \omega_L$  时, 极限环颤振频率不能满足次谐分叉条件 (3) 式, 所以此时外挂分支不可能为次谐响应。而当  $\omega_1 < \omega_s$  时, 外挂分支呈现出两种稳态运动形式, 即  $A_2$  区内的稳定周期 1 运动和  $A_3$  区内的次谐响应。因此,  $\omega_1$  的取值对外挂进入次谐响应区极为重要。另外, 数值积分解得到了系统极限环颤振的周期倍化情形, 即由周期 1 到周期 2, 再到周期 4。

本文成功地将单自由度分段线性振子的次谐分叉条件应用于二元机翼带外挂的三自由度气动弹性系统中, 对系统极限环颤振的次谐响应情况作出了定性预估。数值积分颤振方程表明这种预估是正确的。

### 参 考 文 献

- 1 Macgawa S, Furukawa S. Superharmonic Resonance in Piecewise-Linear System. Bulletin of Japanese Society of Mechanical Engineering, 1973; 16: (96)931~941
- 2 Shaw S W. The Dynamics of a Harmonically Excited System Having Rigid Amplitude Constraints, Part 1: Subharmonic Motions and Local Bifurcations. Trans of the ASME J of Applied Mech, 1985; 52: 453~458
- 3 Shaw S W, Holmes P J. A Periodically Forced Piecewise Linear Oscillator. J of Sound and Vibration, 1983; 90: (1)129~155
- 4 Yang Z C, Zhao L C. Analysis of Limit Cycle Flutter of an Airfoil in Incompressible Flow. J of Sound and vibration, 1988; 123: (1)1~13