第13卷 第3期　　航 空 学 报　　Vol. 13 No. 3
ACTA AERONAUTICA ET
1992年3月　　ASTRONAUTICA SINICA　　March 1992

随机载荷作用下构件疲劳可靠性分析方法

凌　静　（北京理工大学飞行器工程系，北京，100081）
高镇同　（北京航空航天大学固体力学所，北京，100083）

A METHOD FOR THE FATIGUE RELIABILITY ANALYSIS OF MACHINE PARTS UNDER RANDOM LOADS

Ling Jing
(*Department of Vehicle Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing*, 100081)

Gao Zhen-tong
(*Research Center of Solid Mechanics, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing*, 100083)

摘　要　本文建立了用于随机载荷作用下构件疲劳可靠性分析的二维应力强度干涉模型。当影响疲劳强度的诸因素为随机变量时，给出了在二维应力强度干涉模型中考虑这些因素的方法，并用蒙特卡罗(Monte Carlo)方法求解了该模型。最后将上述模型应用于工程实际。

关键词　疲劳，可靠性，应力强度干涉模型，蒙特-卡罗方法

Abstract One-dimensional model of stress-strength interference was often used in the fatigue reliability analysis in the past. In fact, it is necessary to describe the fatigue loads with two parameters, such as load amplitude and mean load; and they should be considered as the two random variables. The two-dimensional model of stress-strength interference is set up in this paper, and it can be applied to the fatigue reliability analysis of the machine parts under random loads. If the factors of effect on fatigue strength are considered as random variables, the method of taking account of them in the two-dimensional model of stress-strength interference is suggested. The two-dimensional model of stress-strength interference is calculated by the Monto-Carlo method, and it is used in engineering. It is proved that the two-dimensional model of stress-strength interference is more reasonable than the traditional one-dimensional model, because it takes account of the effects of the amplitude value and mean value of fatigue load at the same time. When the model is calculated by the Monte-Carlo method, the applied stress on a machine

1990年5月26日收到，1991年2月5日收到修改稿

part, fatigue strength of material and the factors influencing the fatigue strength are allowed to be the random variables of any known distribution.

Key words　fatigue, reliability, model of stress-strength interference, the MonteCarlo method

0 前　　言

随机载荷作用下的结构，其构件疲劳危险点的应力也是随机交变的。疲劳可靠性分析时，一般是在幅值域内对疲劳危险点的应力历程进行雨流计数统计处理，雨流计数的结果必须用两个参量来表示，如用应力幅值 σ_a 和应力均值 σ_m，即应力的概率分布实际上是二维的。文献〔1〕认为载荷幅值服从对数正态分布，载荷均值服从正态分布，用二元统计分析方法来处理疲劳载荷。文献〔2,3〕研究了载荷幅值服从 Weibull 分布，载荷均值服从正态分布的疲劳载荷二维分析方法。

因为构件疲劳危险点的应力是由两个参量控制的，即概率密度函数是二维的。因此，在进行疲劳可靠性分析时，疲劳强度也应用二维概率分布。文献〔4〕建立了给定寿命下二维疲劳强度分布函数和给定应力下疲劳寿命分布函数之间的数学关系，从疲劳寿命的分布函数推导出二维疲劳强度概率分布函数的一般表达式。文献〔5〕给出了上述一般表达式中 P-S_a-S_m-N 曲面的求法，从而可以从试验所得的疲劳性能数据求得二维疲劳强度概率分布。

有了上面的二维应力概率密度函数和二维疲劳强度概率分布函数，本文下面建立用于构件疲劳可靠性分析的二维应力强度干涉模型。

1　二维应力强度干涉模型的建立

在图 1 所示的一维应力强度干涉模型中，构件的可靠度可定义为 $P(S>\sigma)$ 的数学期望

$$R=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{\sigma}^{\infty}g(S)\mathrm{d}S\right]f(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma \tag{1}$$

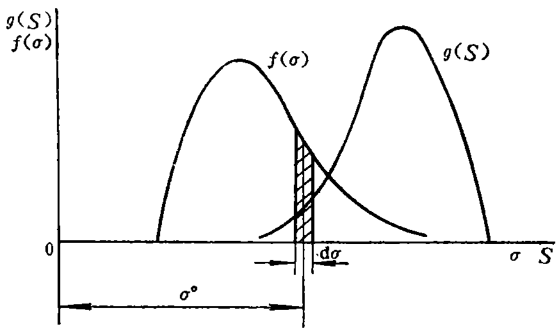

图 1　一维应力强度干涉模型

此式又可写成

$$R=1-\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\sigma}g(S)\mathrm{d}S\right]f(\sigma)\mathrm{d}\sigma \tag{2}$$

令 $P(\sigma)$ 为分布函数

$$P(\sigma)=\int_{-\infty}^{\sigma}g(S)\mathrm{d}S \tag{3}$$

则

$$R=1-\int_{-\infty}^{\infty}P(\sigma)f(\sigma)\mathrm{d}\sigma \tag{4}$$

将式（4）推广到二维情况，则构件的可靠度为

$$R=1-\iint_{-\infty}^{\infty}P(\sigma_a,\sigma_m)f_\sigma(\sigma_a,\sigma_m)\mathrm{d}\sigma_a\mathrm{d}\sigma_m \tag{5}$$

式中 $f_\sigma(\sigma_a,\sigma_m)$ 是二维应力概率密度函数[1~3]；$P(\sigma_a,\sigma_m)$ 为二维疲劳强度概率分布函数。根据文献〔4〕，当对数疲劳寿命服从正态分布时

$$P(\sigma_a,\sigma_m)=\int_{-\infty}^{\frac{\lg N^*-\mu(\sigma_a,\sigma_m)}{\sigma(\sigma_a-\sigma_m)}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{Y^2}{2}}\mathrm{d}Y \tag{6}$$

这里从 $\mu(\sigma_a,\sigma_m)$ 和 $\sigma(\sigma_a,\sigma_m)$ 分别为应力水平 (σ_a,σ_m) 下对数疲劳寿命的均值和标准差，均为 σ_a 和 σ_m 的函数[5]。

将式（6）代入式（5）中

$$R=1-\iint_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\frac{\lg N^*-\mu(\sigma_a,\sigma_m)}{\sigma(\sigma_a,\sigma_m)}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{Y^2}{2}}\mathrm{d}Yf_\sigma(\sigma_a,\sigma_m)\mathrm{d}\sigma_a\mathrm{d}\sigma_m \tag{7}$$

这就是二维应力强度干涉模型的一般表达式。

2 疲劳强度各影响系数的考虑

影响疲劳强度的因素很多，如：构件应力集中系数 K、尺寸系数 ϵ、表面加工系数 β 等。如果用光滑试件测得的材料疲劳性能数据来进行构件的疲劳可靠性分析，则必须考虑这些因素的影响。

徐灏[6]认为这些影响系数各自也为一随机变量，并假设它们均来自正态母体，给出了一些具体的数值。因为文献〔6〕还认为疲劳强度服从正态分布，这样要考虑这些影响系数只是考虑正态随机变量积、商的分布。经过推导文献〔6〕得出了正态随机变量的积、商仍近似服从正态分布，并给出了均值和标准差的近似求解公式。

研究表明[7]：疲劳强度一般不服从正态分布，而是服从某一偏态分布，这就给考虑这些影响系数带来了很大不便。下面介绍不论疲劳强度和其影响系数服从什么分布，在二维应力强度干涉模型中考虑它们的方法。

如果材料的疲劳强度为 (S_a,S_m)，考虑疲劳强度影响系数后，可用于构件设计的疲劳强度 (S_a',S_m') 为

$$\left.\begin{aligned} S_a' &= \frac{\varepsilon\beta S_a}{K} \\ S_m' &= S_m \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

当应力均值 $\sigma_m = S_m' = S_m$ 时

$$\left.\begin{aligned} \sigma_a &\geq S_a' = \frac{\varepsilon\beta S_a}{K} \quad \text{构件破坏} \\ \sigma_a &< S_a' = \frac{\varepsilon\beta S_a}{K} \quad \text{构件安全} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

即当 $\sigma_m = S_m$ 时

$$\left.\begin{aligned} \sigma_a' &= \sigma_a \frac{K}{\varepsilon\beta} \geq S_a \quad \text{构件破坏} \\ \sigma_a' &= \sigma_a \frac{K}{\varepsilon\beta} < S_a \quad \text{构件安全} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

由式（10）可见，对疲劳强度修正与对构件应力修正是等价的。设构件上应力的概率密度函数为 $f(\sigma_a, \sigma_m)$，考虑到影响疲劳强度的各因素后，应力幅值和均值为

$$\left.\begin{aligned} \sigma_a' &= \frac{K}{\varepsilon\beta}\sigma_a \\ \sigma_m' &= \sigma_m \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

因为 K、ε、β、σ_a、σ_m 都是随机变量，那么 σ_a' 和 σ_m' 服从什么分布呢？我们知道如果两个相互独立的随机变量 X 和 Y 各自的概率密度函数为 $f_x(x)$和 $f_y(y)$，则由它们的积所产生的新的随机变量 $Z = XY$ 的概率密度函数为

$$h(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f_x(x) f_y\left(\frac{Z}{x}\right) \mathrm{d}x \tag{12}$$

由它们的商所产生的新的随机变量 $Z = \dfrac{Y}{X}$的概率密度函数为

$$h(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_x(x) f_y(xZ) \mathrm{d}x \tag{13}$$

运用上面公式，因为 ε、β、K 和 σ_a 相互独立，如果用 $f_\varepsilon(\varepsilon)$、$f_\beta(\beta)$、$f_K(K)$ 分别表示 ε、β、K 的概率密度函数，则有

$$f_{\sigma'}(\sigma_a', \sigma_m') = \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{|\varepsilon||\beta|}{|K|} f_\varepsilon(\varepsilon) f_\beta(\beta) f_K(K) f_\sigma\left(\frac{\sigma_a'\varepsilon\beta}{K}, \sigma_m'\right) \mathrm{d}\varepsilon \mathrm{d}\beta \mathrm{d}K \tag{14}$$

这样当对数疲劳寿命服从正态分布时，式（7）所示的二维应力强度干涉模型变成

$$R = 1 - \iint_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{\lg N^* - \mu(\sigma_a', \sigma_m')}{\sigma(\sigma_a', \sigma_m')}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Y^2}{2}} \mathrm{d}Y f_{\sigma'}(\sigma_a', \sigma_m') \mathrm{d}\sigma_a' \mathrm{d}\sigma_m' \tag{15}$$

将式（14）代入式（15）中

$$R = 1 - \iiiint\!\!\iint_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{\lg N^* - \mu(\sigma_a', \sigma_m')}{\sigma(\sigma_a', \sigma_m')}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Y^2}{2}} \mathrm{d}Y \frac{|\varepsilon||\beta|}{|K|} f_\varepsilon(\varepsilon) f_\beta(\beta)$$

$$f_K(K) f_\sigma \left(\frac{\sigma'_a \varepsilon \beta}{K}, \sigma'_m\right) d\varepsilon d\beta dK d\sigma'_a d\sigma'_m \tag{16}$$

此即考虑了影响疲劳强度诸系数的二维应力强度干涉模型，形式为高维积分。

3 干涉模型的蒙特-卡罗法求解

因为用蒙特-卡罗方法计算多重积分时，其误差与积分重数无关，所以本文用它来求解上述的二维应力强度干涉模型。令

$$f(\varepsilon, \beta, K, \sigma'_a, \sigma'_m) = \frac{|\varepsilon||\beta|}{|K|} f_\varepsilon(\varepsilon) f_\beta(\beta) f_K(K) f_\sigma \left(\frac{\sigma'_a \varepsilon \beta}{K}, \sigma'_m\right) \tag{17}$$

$$g^*(\sigma'_a, \sigma'_m) = \int_{-\infty}^{\frac{\lg N^* - \mu(\sigma'_a, \sigma'_m)}{\sigma(\sigma'_a, \sigma'_m)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Y^2}{2}} dY \tag{18}$$

则

$$F = 1 - R = \iiiint\!\!\int_{-\infty}^{\infty} g^*(\sigma'_a, \sigma'_m) f(\varepsilon, \beta, K, \sigma'_a, \sigma'_m)\, d\varepsilon d\beta dK d\sigma'_a d\sigma'_m = E[g^*(\sigma'_a, \sigma'_m)] \tag{19}$$

即 F 是随机变量函数 $g^*(\sigma'_a, \sigma'_m)$ 的数学期望。现抽取服从 $f(\varepsilon, \beta, K, \sigma'_a, \sigma_m)$ 的 N 个点 $(\varepsilon_i, \beta_i, K_i, \sigma'_{ai}, \sigma'_{mi}), i=1,2,\cdots,N$，并计算出 N 个函数值 $g^*(\sigma'_{ai}, \sigma'_{mi})$，则可用算术平均值

$$\bar{F} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} [g^*(\sigma'_{ai}, \sigma'_{mi})] \tag{20}$$

作为 F 的近似值。

由强大数定理知道，如果随机序列：$g^*(\sigma'_{ai}, \sigma'_{mi}), i=1,2,\cdots\cdots, N$ 相互独立、同分布、期望值存在，则对任意正数 ε 有

$$\lim_{N\to\infty} P\{|\bar{F} - F| < \varepsilon\} = 1 \tag{21}$$

按中心极限定理，只要随机变量序列：$g^*(\sigma'_{ai}, \sigma'_{mi}), i=1,2,\cdots\cdots, N$ 相互独立、同分布、数学期望值存在，有限标准差 $\sigma \neq 0$，那么当 $N\to\infty$ 时，随机变量

$$Y = \frac{\bar{F} - F}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} \tag{22}$$

渐近地服从标准正态分布 $N(0, 1)$，即

$$P(Y < t_a) \approx \int_{-\infty}^{t_a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \tag{23}$$

也即对任何 $t_a > 0$，有

$$P(|Y| < t_a) = P(|\bar{F} - F| < \frac{t_a \sigma}{\sqrt{N}}) \approx \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{t_a} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 - \alpha \tag{24}$$

这表示不等式

$$|\bar{F}-F|<\frac{t_a\sigma}{\sqrt{N}} \tag{25}$$

成立的概率近似地等于 $1-\alpha$。

因为 σ 理论值无法知道，根据文献[8]在实际计算中用下式的 $\bar{\sigma}$ 来代替 σ。

$$\bar{\sigma}=\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}g^{*2}(\sigma'_{a\,i},\sigma'_{m\,i})-\bar{F}^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{26}$$

4 工 程 应 用

某飞机构件受随机载荷作用，用文献[3]的方法对构件疲劳危险点的名义应力历程统计处理后得其概率密度函数为

$$f_\sigma(\sigma_a,\sigma_m)=0.039\left(\frac{\sigma_a-19.8}{4.9}\right)^{1.3}e^{-\left(\frac{\sigma_a-19.8}{4.9}\right)^{2.3}}e^{-\frac{(\sigma_m-9.6-0.2\sigma_a)^2}{2\times4.8^2}} \tag{27}$$

此构件用调质 40 CrNiMoA 钢制成，对其小圆棒试件进行疲劳试验，用文献[5]的方法处理试验结果可得

$$\mu(S_a,S_m)=7.2605-2.7175\lg\left(\frac{226.86}{226.86-S_m}S_a-46.5313\right) \tag{28}$$

$$\sigma(S_a,S_m)=-0.7076-2.7175\lg\left(\frac{226.86}{226.86-S_m}S_a-46.5313)\right)$$

$$+3.2934\lg\left(\frac{196.95}{196.95-S_m}\right)S_a-44.6875) \tag{29}$$

疲劳强度的诸影响系数均服从正态：$K\text{-}N(1.6,0.0384)$，$\beta\text{-}N(1,0)$，$\varepsilon\text{-}N(0.79,0.069)$。

对疲劳强度影响系数 K,β,ε 的概率密度函数和式(27)～式(29)代入式（16）中，用上面介绍的蒙特-卡罗方法，可求出可靠度 R 随寿命 N 变化的趋势如图 2。对几个特殊的寿命值，其相应的可靠度如表 1。

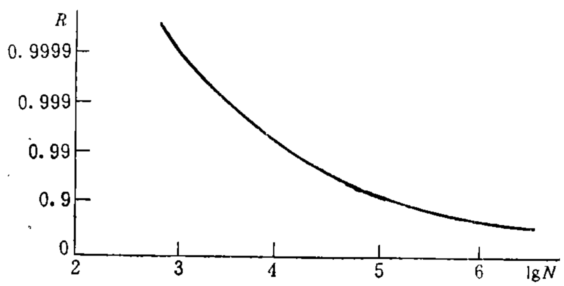

图 2　可靠度随寿命的变化

$$\varepsilon=\frac{t_a\sigma}{\sqrt{N}}>|\bar{R}-R| \tag{30}$$

计算中取随机抽样点数 $N=10000$，$t_a=3$ 即有99.7％的把握求解出的可靠度 R 与准确值误差小于表 1 中所列 ε 值。

表 1

lg$N$	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5
R	0.99420	0.96773	0.95028	0.89889	0.83080	0.77739
ε	0.0011	0.0047	0.0059	0.0074	0.0097	0.0110

表中ε为求解精度

5 结 论

本文提出的用于随机载荷作用下构件疲劳可靠性分析的二维应力强度干涉模型同时考虑了疲劳载荷幅值和均值两个因素，比传统的一维应力强度干涉模型更好地反映疲劳的实际情况。当用蒙特-卡罗方法求解上述模型时，构件工作应力、材料疲劳强度以及疲劳强度的诸影响系数可以是任意已知分布的随机变量。

参 考 文 献

1 陈爱雅，高镇同.二维随机疲劳载荷的统计处理及其应用.北京航空学院学报，1986；(1)75～85

2 顾明，陈健元.非对称循环载荷二维载荷谱编制的分析及计算程序.机械强度，1987；9:(1)62～68

3 凌静，高镇同.母体参数估计的χ^2最小值法.航空学报，1991;12:(2)50～55

4 傅惠民，高镇同.二维疲劳强度分布函数，航空学报，1988;9;（增刊）72～77

5 凌静，高镇同.P-S_a-S_m-N曲面的求法.航空学报，1991;12:（7）A365～A372

6 徐灏.机械强度的可靠性设计.机械工业出版社，北京，1984;96～106

7 Fu Huimin, Gao Zhentong. Probability Density Function of Fatigue Strength. Conference Proceedings of ICOSSAR'85, 1985; 765～774

8 徐钟济.蒙特-卡罗方法.上海科学技术出版社，上海，1985;171～195