

振动系统动力修改的近频耦合模态 子空间摄动法

孙久厚 朱德懋

(南京航空学院振动研究所, 南京, 210016)

COUPLED-MODE SUBSPACE PERTURBATION METHOD FOR STRUCTURE DYNAMIC MODIFICATION

Sun Jiu-hou, Zhu De-mao

(Vibrative Institute of Nanjing Aeronautical Institute, Nanjing, 210016)

摘 要 本文给出了对振动系统作小修改的一种近频耦合模态子空间摄动法。算例表明这种算法简单、精度高, 算法可行。

关键词 结构动力学, 振动分析方法, 摄动法, 小参数法

Abstract A coupled-mode subspace perturbation method is presented in this paper. When the structural system has closed natural frequencies, the modes are coupled and the ordinary matrix perturbation method is invalid. By use of the initial modal coordinate transformation, the coupled-mode subspace is defined. After the next subspace modal transformation, the coupled-mode subspace perturbation method gives the complete perturbed eigensolution. The sample problems demonstrat that the method presented here is accurate and efficient.

Key words structural dynamics, vibration analysis method, perturbation method, small parameter method

0 引 言

结构系统的动力设计多采用计算机辅助设计的方法。通常在初步设计阶段, 首先建立一个初始数学模型, 用有限元法计算其固有动态特性——固有频率和固有振型。此后, 往往对初始系统要进行结构修改, 需要对修改系统进行动力分析, 以求解修改系统的固有特性。每作一次修改, 都要重新进行计算, 多次求解大型广义特征问题是极不经济的。为此, 探讨简单可行的模态修正方法已引起广泛的关注, 其中摄动方法被许多学者重视和研究。文献[1]作了系统论述, 分别对孤立模态^[2]、重频模态^[3]和近频模态组^[4]等多种情况作了分析和讨论, 尤其对模态组的研究使摄动法更趋完善。该问题的提法是: 已知 n 自由

1990年8月1日收到, 1991年4月17日收到修改稿

度振动系统的质量矩阵 M_0 、刚度矩阵 K_0 及其某频段的 $m(m \leq n)$ 阶特征值矩阵 S_0 、特征向量矩阵 X_0 。

$$S_0 = \text{diag}(s_{01}, s_{02}, \dots, s_{0m})$$

$$X_0 = [x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0m}]$$

又知道修改系统的质量矩阵 M 、刚度矩阵 K

$$M = M_0 + \varepsilon M_1$$

$$K = K_0 + \varepsilon K_1$$

其中 ε 为小参数; εM_1 、 εK_1 分别为质量、刚度修改的增量矩阵。要求不重复求解大型广义特征问题, 来计算修改系统在该频段的特征值 s_i 和特征向量 $x_i (i=1 \dots, m)$ 。

对于孤立模态, 用常规的矩阵摄动法即可解决。本文的侧重点在于解决近频(包括重频)耦合模态问题, 给出了一种近频耦合模态子空间摄动法, 对振动系统进行动力修改。在初始模态坐标变换的基础上, 近频耦合模态的摄动解法作了二次模态坐标变换, 给出了它的完整解。从而综合了各种情况下的模态摄动解。

1 孤立模态的矩阵摄动法

将修改系统的特征值矩阵 S 按小参数 ε 展开为

$$S = S_0 + \varepsilon S_1 + \varepsilon^2 S_2 + \dots \quad (1)$$

特征向量矩阵 X 在初始特征向量子空间 X_0 内近似地表示为

$$X = X_0 Q \quad (2)$$

其中模态坐标变换矩阵 Q 也按小参数 ε 展开

$$Q = I_m + \varepsilon A + \varepsilon^2 B + \dots \quad (3)$$

这里截去了频段以外的模态。式中 $A = (a_{ji})$, $B = (b_{ji})$ 均为 m 阶矩阵。由此得出模态坐标下的特征方程和正交条件为

$$(S_0 + \varepsilon K_G)Q = (I_m + \varepsilon M_G)QS \quad (4)$$

$$Q^T (I_m + \varepsilon M_G)Q = I_m \quad (5)$$

其中

$$M_G = X_0^T M_1 X_0, \quad K_G = X_0^T K_1 X_0 \quad (6)$$

一般地说, 它们都是满阵。

对于无耦合模态情况, 常规的摄动法给出一阶摄动 (ε^1) 量为

$$s_{1i} = K_{Gii} - s_{0i} M_{Gii} \quad (i=1, \dots, m) \quad (7)$$

$$a_{ji} = \frac{1}{s_{0i} - s_{0j}} (K_{Gji} - s_{0i} M_{Gji}) \quad (i \neq j; i, j=1 \dots, m) \quad (8)$$

$$a_{ii} = -\frac{1}{2} M_{Gii} \quad (i=1, \dots, m) \quad (9)$$

其二阶摄动 (ε^2) 量为

$$s_{2i} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^m (K_{Gik} - s_{0i} M_{Gik}) a_{ki} - s_{1i} M_{Gii} \quad (i=1, \dots, m) \quad (10)$$

$$b_{ji} = \frac{1}{s_{0i} - s_{0j}} \left[\sum_{k=1}^m (K_{Gjk} - s_{0i} M_{Gjk}) a_{ki} - s_{1i} (a_{ji} + M_{Gji}) \right] \quad (11)$$

($i \neq j; i, j = 1, \dots, m$)

$$b_{ii} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^m a_{ki} (a_{ki} + 2 M_{Gik}) \quad (i = 1, \dots, m) \quad (12)$$

将它们代入式 (1)、式 (2)、式 (3), 即可得出修改系统的特征解。

2 近频耦合模态子空间摄动法

如果所研究的 m 阶频段内有 m_c ($m_c \leq m$) 个特征值相等或非常接近, 则称为近频耦合模态。由式 (8)、式 (11) 可以看出, 常规方法不能直接应用。为此将模态变换公式 (2) 改写为分块形式

$$X = X_0 Q = \begin{bmatrix} X_{0c} & X_{0d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_c \\ Q_d \end{bmatrix} \quad (13)$$

同样, 将 M_G 、 K_G 也改写为分块形式

$$M_G = \begin{bmatrix} M_{Gcc} & M_{Gcd} \\ M_{Gdc} & M_{Gdd} \end{bmatrix}, \quad K_G = \begin{bmatrix} K_{Gcc} & K_{Gcd} \\ K_{Gdc} & K_{Gdd} \end{bmatrix} \quad (14)$$

其下标 c 、 d 分别表示近频耦合模态和孤立模态。由此得出模态坐标下的特征方程为

$$\begin{bmatrix} S_{0c} + \varepsilon K_{Gcc} & \varepsilon K_{Gcd} \\ \varepsilon K_{Gdc} & S_{0d} + \varepsilon K_{Gdd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_c \\ Q_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{m_c} + \varepsilon M_{Gcc} & \varepsilon M_{Gcd} \\ \varepsilon M_{Gdc} & I_{m_d} + \varepsilon M_{Gdd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_c \\ Q_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_c & 0 \\ 0 & S_d \end{bmatrix} \quad (15)$$

其中

$$m_c + m_d = m$$

现仅将 m_c 个近频耦合模态组成一模态子空间, 其特征方程为

$$\begin{bmatrix} S_{0c} + \varepsilon K_{Gcc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{m_c} + \varepsilon M_{Gcc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_c \end{bmatrix} \quad (16)$$

一般说来, $m_c \ll n$, 解这个小型广义特征问题是容易的。现求得其特征解为

$$\Lambda_c = \text{diag}(\dots \lambda_{ci} \dots), \quad P_c = [P_{cij}] \quad (i, j = 1, \dots, m_c)$$

再作第二次模态坐标变换

$$\begin{bmatrix} Q_c \\ Q_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_c & 0 \\ 0 & I_{m_d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_c \\ R_d \end{bmatrix} \quad (17)$$

可得出修改系统第二次模态坐标变换后的特征方程及正交条件为

$$\begin{bmatrix} A_c & \varepsilon P_c^T K_{Gcd} \\ \varepsilon K_{Gdc} P_c & S_{0d} + \varepsilon K_{Gdd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_c \\ R_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{m_c} & \varepsilon P_c^T M_{Gcd} \\ \varepsilon M_{Gdc} P_c & I_{m_d} + \varepsilon M_{Gdd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_c \\ R_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_c & 0 \\ 0 & S_d \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} R_c^T & R_d^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m_c} & \varepsilon P_c^T M_{Gcd} \\ \varepsilon M_{Gdc} P_c & I_{m_d} + \varepsilon M_{Gdd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_c \\ R_d \end{bmatrix} = I_m \quad (19)$$

将修改系统特征值按小参数 ε 展开

$$\left. \begin{aligned} s_{ci} &= s_{0ci} + \varepsilon s_{1ci} + \varepsilon^2 s_{2ci} + \dots & (i = 1, \dots, m_c) \\ s_{di} &= s_{0di} + \varepsilon s_{1di} + \varepsilon^2 s_{2di} + \dots & (i = 1, \dots, m_d) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

将第二次模态坐标变换矩阵 R 也按小参数 ε 展开

$$R = I + \varepsilon A + \varepsilon^2 B + \dots \quad (21)$$

将它们代入特征方程式 (18) 及正交条件式 (19), 由摄动法给出零阶摄动 (ε^0) 量为

$$s_{0ci} = \lambda_{ci} \quad (i=1, \dots, m_c) \quad (22)$$

它即为近频耦合模态子系统的特征值。其一阶摄动 (ε^1) 量为

$$s_{1ci} = 0 \quad (i=1, \dots, m_c) \quad (23)$$

$$a_{cji} = 0 \quad (i, j=1, \dots, m_c) \quad (24)$$

$$a_{dji} = -\frac{1}{s_{0ci} - s_{0di}} \sum_{k=1}^{m_c} (K_{Gcjk} - s_{0ci} M_{Gdcjk}) \dot{p}_{ckj} \quad (25)$$

$$(i=1, \dots, m_c; j=1, \dots, m_d)$$

其二阶摄动 (ε^2) 量为

$$s_{2ci} = \sum_{k=1}^{m_c} \dot{p}_{ckj} \sum_{k=1}^{m_d} (K_{Gcdkl} - s_{0ci} M_{Gcdkl}) a_{dli} \quad (i=1, \dots, m_c) \quad (26)$$

$$b_{cji} = \frac{1}{s_{0ci} - \lambda_{cj}} \sum_{k=1}^{m_c} \dot{p}_{ckj} \sum_{l=1}^{m_d} (K_{Gcdkl} - s_{0ci} M_{Gcdkl}) a_{dli} \quad (i \neq j; i, j=1, \dots, m_c) \quad (27)$$

$$b_{:ii} = -\frac{1}{2} \sum_{l=1}^{m_d} a_{dli}^2 - \sum_{k=1}^{m_c} \dot{p}_{ckj} \sum_{l=1}^{m_d} M_{Gcdkl} a_{dli} \quad (i=1, \dots, m_c) \quad (28)$$

$$b_{dji} = \frac{1}{s_{0ci} - s_{0dj}} \sum_{l=1}^{m_d} (K_{Gddjl} - s_{0ci} M_{Gddjl}) a_{dli} \quad (i=1, \dots, m_c; j=1, \dots, m_d) \quad (29)$$

对于除近频耦合模态之外的 m_d 阶非耦合模态,仍可用式(7)~式(12)求得 其摄动量。将以上所得的摄动量代入式(20)、式(21)、式(17)、式(13),即可得出修改系统的特征解。

根据上述原理,又研制了结构动力修改计算程序 STDYMO,对孤立模态情况和有近频耦合模态情况都能有效地计算,结果十分令人满意。

3 算 例

3.1 孤立模态情况算例

设有一初始系统为钢质均匀悬臂梁,长 0.4 m,宽 30 mm,弹性模量为 2.1×10^3 MPa,密度为 7.8×10^3 kg/m³。对于初始系统,取梁厚度为 4 mm,等分成 10 段梁元,用有限元法,求解广义特征问题,得出初始系统的特征解 S_0 、 X_0 ;对于其对应的修改系统,假定梁自由端一半长度铣去 0.2 mm(图 1),用本文方法计算出修改系统的特征解 S 、 X 。再将修改系统用有限元法,求解广义特征问题,计算出修改系统的特征解 \bar{S} 、 \bar{X} ,作为与 S 、 X 对比的基准。计算结果对比列入表 1。

3.2 耦合模态情况算例

设有一初始系统为正方形匀质弹性薄膜,边长 $a=1$ m,单位面积质量 $\rho\delta=0.5$ kg/m²,四周受均布张力 $T_0=100$ N/m。将其等分成 16 个膜元,用有限元法求解广义特征问题,得出初始系统的特征解 S_0 、 X_0 ;对于其对应的修改系统,假定在 7、8、9、13、14、17 等 6 个节点各另有集中质量 0.01 kg(图 2),用本文方法算出修改系统的特征解 S 、 X 。再用有限元法计算出修改系统的特征解 \bar{S} 、 \bar{X} ,作为与 S 、 X 比较的基准。计算结果对比列入表 2。

表 1 悬臂梁前 5 阶特征值

模态序号 i	1	2	3	4	5
初始系统特征值 S_{0i}	17335	680861	5340423	20536062	56293718
修改系统特征值 \tilde{s}_i	18047	653199	5071076	19476538	53517394
本文计算结果 s_i	18052	654089	5072788	19505468	53639816
误差 $\eta_i = \frac{s_i - \tilde{s}_i}{\tilde{s}_i}$	0.027%	0.136%	0.034%	0.149%	0.229%

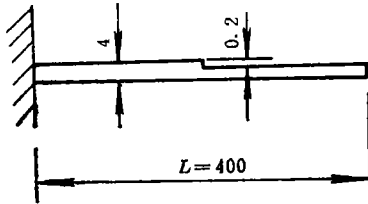


图 1 悬臂梁

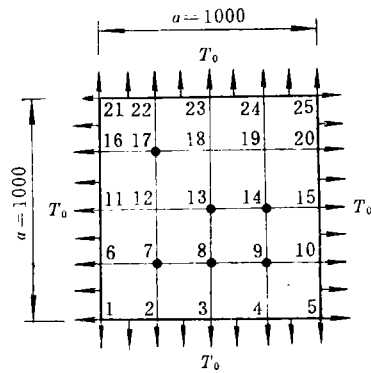


图 2 弹性薄膜

表 2 弹性薄膜前 4 阶特征值

模态序号 i	1	2	3	4
初始系统特征值 S_{0i}	0	2077.32	2077.32	4154.66
修改系统特征值 \tilde{s}_i	0	1863.32	1941.07	3850.93
本文计算结果 s_i	0	1871.58	1947.68	3882.16
误差 $\eta = \frac{s_i - \tilde{s}_i}{\tilde{s}_i}$	0	0.44%	0.34%	0.81%

4 结 论

算例表明，本文所讨论的方法是可行的。采用近频耦合模态子空间摄动法，既可以避免重复求解大型广义特征问题，又妥善地解决了重频、近频耦合模态所带来的麻烦。计算简单，并有较高的精度。

参 考 文 献

- 1 胡海昌. 多自由度结构固有振动理论. 科学出版社, 北京, 1987.5; 13~38

- 2 Fox R L, Kapoor M P. Rates of Change of Eigenvalues and Eigenvectors. AIAA J, 1968; 6: (12) 2426~2429
- 3 Chen J C, Wada B K. Matrix Perturbation for Structural Dynamic Analysis. AIAA J, 1977; 15: (8) 1095~1100
- 4 陈塑寰. 退化系统振动分析的矩阵摄动法. 吉林工业大学学报 1981; (4) 11



航空维修工程年会在京召开

中国航空学会航空维修工程专业委员会于1991年10月26~29日在北京召开纪念专业委员会成立10周年及学术年会。到会代表来自空军、海军、民航、陆航及航空工业部等系统10余个单位70余人。各大系统有关领导及中国航空学会油江副理事长到会祝贺,中国航空学会《航空学报》杂志社及19个专业委员会、湖南省航空学会等15个省学会的代表向大会致贺词。空军工程部副部长、专业委员会副主任赵汉立致开幕词、空一所所长、专业委员会主任荆治纯做10年工作总结报告。10年来航空维修工程专业委员会组织召开各种学术交流会、研讨会及专题讨论会共24次,收到论文1415篇,其中宣读论文978篇,评选出优秀论文49篇。参加会议代表人数达1838人次。出版《论文报告选编》10集,收入论文310篇。从1983年以来先后派出7个代表团21人次参加国际航空维修会议。并组织了10次专题学习班和小型专题研讨会。除开展各种国内外学术活动外,专业委员会健全了组织机构,组建的6个专业学组有力推动了学术活动的开展,加强了与兄弟专业委员会及各省市维修专业委员会的横向联系。

本届年会收到论文108篇,评审、录取85篇,其中会议宣读60篇,并评选了5篇优秀论文。会议期间召开了专业委员会工作会议,“八五”期间专业委员会初步计划:1992年将筹办:黑匣子研讨会、发动机停车故障研讨会、腐蚀问题研讨会、油液污染研讨会,适航性研讨会及发动机维修研讨会等。1993年筹办召开飞机事故分析研讨会、东南亚地区维修工程国际会议。1994年举办事故学习培训班。1995年争取召开一次国际航空维修工程会议。

(李铁柏)